



Corol'aire

Décembre 2025

n° 143

C'est l'heure du départ !

Frédéric de Ligt

Au début de la nouvelle année je vais prendre ma retraite. En conséquence de quoi je vais laisser la place de président de notre association. Il faut un ou une collègue en activité pour l'animer efficacement. Je ne vais pas pour autant abandonner le comité où je pense pouvoir encore aider comme le font d'autres retraités.

J'aborde cette nouvelle étape de la vie avec sérénité car je tiens toujours le « Fil des Maths » qui m'a guidé tout au long de la carrière et je n'envisage pas de le lâcher.

Je sais déjà d'avance que les élèves vont me manquer, la curiosité et la soif d'apprendre de certains, l'énergie de presque tous. Mais quand je songe par ailleurs que je n'aurai plus à accompagner des réformes et une idéologie générale que je désapprouve, une gestion technocratique du personnel, finalement, je suis plutôt soulagé. Je suis un peu triste pour certains collègues qui ont encore de nombreuses années à exercer, qui déjà parlent de retraite et qui pourtant aiment ce métier avec passion. Je suis inquiet pour l'avenir de notre métier. Le moral de la troupe n'est pas bon, et pourtant si la transmission venait à faiblir que deviendrions-nous collectivement ?

Aussi j'encourage les collègues à s'accrocher, coûte que coûte, la mission passe au-dessus.

Pour le moment, le comité s'associe à moi pour vous souhaiter, à toutes et tous, de bonnes fêtes de fin d'année.

Sommaire

Édito	p.1
Affiche Rallye.....	p.2
Rallye mathématique	p.3
Décès de Vincent Fielbard...	p.3
Solides de Dürer.....	p.4
Rubricol'age	p.9



Rallye mathématique de Poitou-Charentes 2026



maths & pâtisserie

MARDI 10 MARS 2026





La recette du Rallye 2026

Corinne Parcelier

- Allez chercher l'épreuve d'entraînement et le dossier « pâtissier » en devenir sur la partie régionale du site de l'APMEP.
- Découvrez l'affiche de notre Rallye que nous a concoctée Céline Fauvinet avec beaucoup de gourmandises.
- Téléchargez cette affiche pour la mettre dans la salle des professeurs et dans vos classes.
- Proposez le travail sur le thème « **Maths et pâtisserie** » à vos élèves et entraînez-les sur la partie problèmes. Il y en a pour tous les niveaux, du CM aux 2^{nde} professionnelles et 2^{nde} générales !
- Inscrivez vos classes sans plus attendre, et au plus tard le 1^{er} février 2026.
- Régalez-vous, **c'est gratuit** !



Décès de Vincent Fielbard



Nous avons appris, au détour d'une rencontre, la disparition de notre collègue Vincent Fielbard, décédé d'un cancer, à 76 ans, à l'automne 2024. Rappelons son rôle central, avec son épouse Françoise, dans l'organisation de nos Journées Nationales à La Rochelle, son lieu d'exercice, en 2008.

Et rappelons-nous de sa présence active lors des Journées Nationales à Jonzac en 2022. Vincent et Françoise étaient des habitués des Journées Nationales de l'APMEP.

Voici un extrait d'une interview de Dominique Gaud et Vincent Fielbard, dans Sud-Ouest, le 25 octobre 2008 : *Il vient de prendre sa retraite, après 35 ans de bons et loyaux services. Sa dernière mission : organiser les journées nationales à La Rochelle. « J'y travaille depuis 3 ans ». Une équation à plusieurs inconnues. Combien de chambres d'hôtels à réserver, pour combien de congressistes ?*

Future exposition sur les solides

Solides de Dürer, Melancholia I 1514

Le travail effectué au cours de la conception de la future exposition **Les maths, c'est du solide** (titre provisoire), je me suis intéressé aux polyèdres curieux que vous ne manquerez pas de découvrir lors de votre future visite. Parmi ceux-ci : le solide dit de Dürer (faute de lui avoir trouvé un autre nom).

Dominique Gaud



Cette gravure au burin sur cuivre (23,8 cm x 18,5 cm) de Dürer a intrigué et intrigue toujours les historiens de l'art, les philosophes et les mathématiciens.

Elle est l'objet d'une littérature abondante parfois contradictoire quant à l'interprétation des symboles cachés dans cette gravure.

Albrecht Dürer naît en 1471 et meurt en 1528 à Nuremberg dans le Saint Empire. Il est à la fois dessinateur, graveur, peintre, célèbre par ses autoportraits mais aussi ses gravures sur cuivre : *Melancholia I* est une des estampes avec *Saint Jérôme dans sa cellule* et *La mort et le diable, le Chevalier* qui forment selon les historiens de l'art un ensemble symbolisant respectivement les travaux intellectuels, spirituels et moraux. Son père est orfèvre et le jeune Albrecht a appris l'art de la gravure dans l'atelier familial.

Il voyage en Flandre et a ainsi accès aux œuvres des maîtres flamands Van Eyck et Van der Weyden. Il effectue deux voyages en Italie où il rencontre les grands maîtres italiens (Bellini, Mantegna l'influenceront) mais aussi les peintres vénitiens : Titien, Giorgone etc. C'est lors du premier voyage qu'il découvre la perspective à laquelle il sera initié par Jacopo de Barbari auquel on a attribué le portrait de Luca Pacioli. Dès lors, la perspective fera l'objet des recherches de Dürer jusqu'à la fin de sa vie. Il inventera de nombreux perspectographes.

Au retour de son deuxième séjour en Italie, il décide d'étudier les mathématiques à partir des œuvres d'Euclide, de Luca Pacioli, de Vitruve, d'Alberti...

Son œuvre mathématique majeure est *Les instructions pour la mesure à la règle et au compas*² connu en français sous le nom de *Géométrie*.



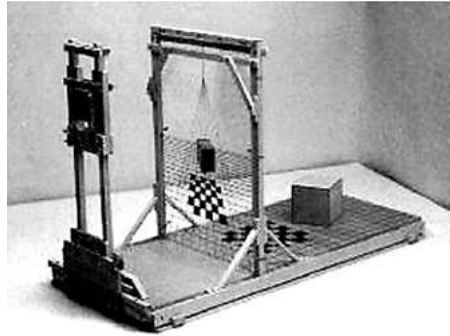
Luca Pacioli (tableau attribué à Barbari peint en 1495). Le polyèdre serait de la main de Léonard de Vinci. **La divine proportion** (appelée maintenant nombre d'or), œuvre célèbre de Luca Pacioli paraît en 1509. Le nombre d'or est très présent dans ce tableau.

¹ Visible au Met à New York

² Géométrie Albrecht Dürer, Traduction Jeanne Peiffer, Seuil, 1995



*Le lièvre, gravure sur cuivre
1502, Albertina, Vienne*

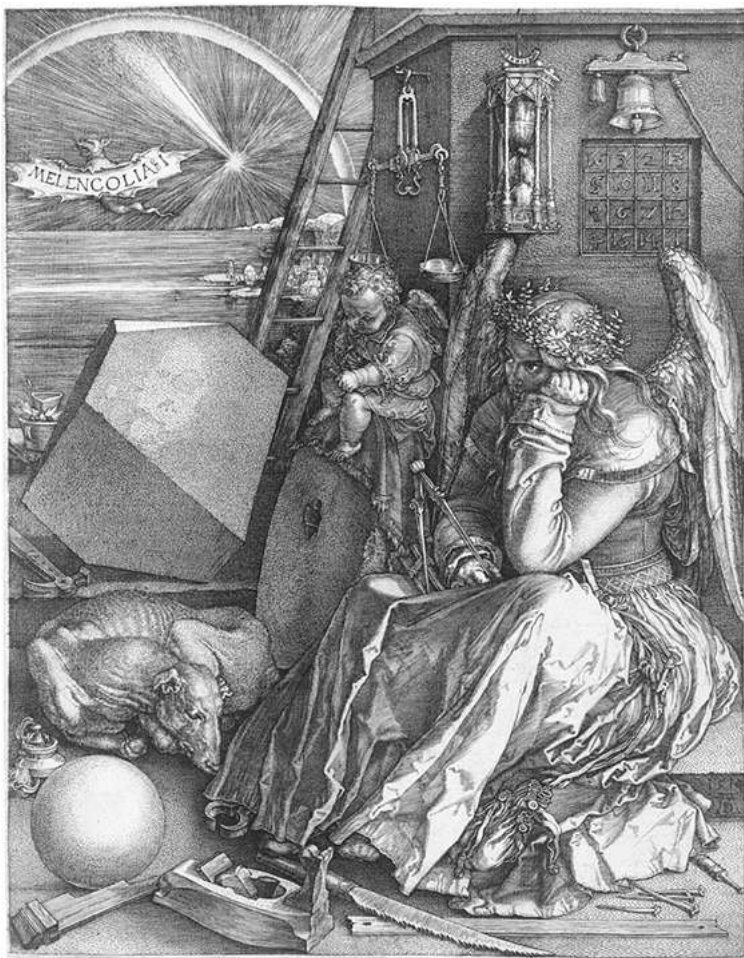


Perspectographe



*Autoportrait vers 1500
Alte Pinakothek, Munich*

Description (les interprétations des symboles qui figurent sont toujours sujets à caution.)



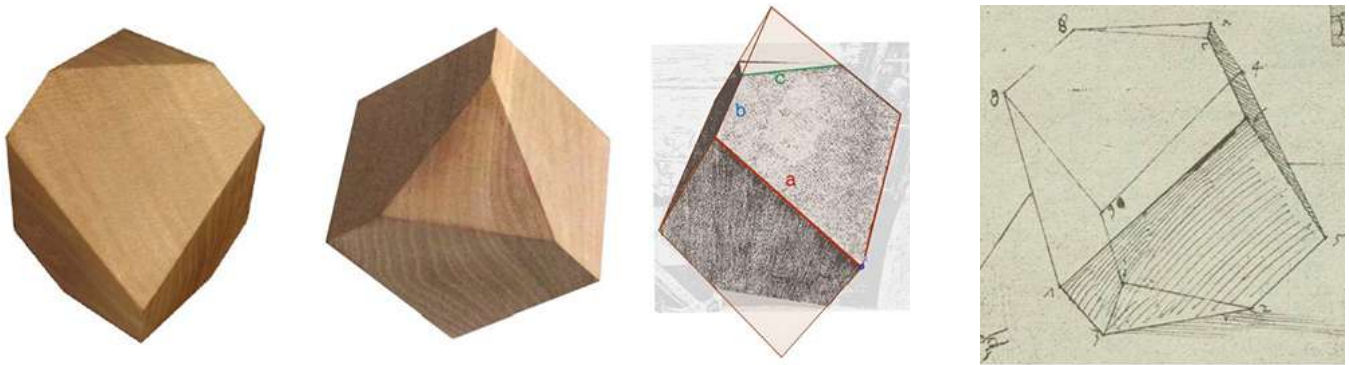
- une **figure ailée féminine** est souvent interprétée comme une personnification de la mélancolie ou du génie créatif,
- un **enfant assis** (au second plan, tenant une tablette ou un carnet) symbolise la pensée naissante ou en cours,
- un **sablier** symbolise le temps qui s'écoule,
- une **balance** représente le jugement final,
- la **cloche** peut symboliser l'heure de la mort ou bien l'apparition soudaine d'une idée,
- une **échelle** est porteuse d'aspiration spirituelle qui indique la montée vers des niveaux supérieurs de la connaissance,
- des **outils artisanaux** (marteau, scie, règle, pince, clous etc.) évoquent des métiers permettant la création,
- le **creuset** alchimique peut faire référence à la métaphore de la création,
- le **chien** symbolise la fidélité de l'artiste à son art ou bien l'épuisement créatif car il semble très fatigué,
- L'**arc en ciel** suggère un signe d'espoir dans un contexte sombre,
- la **comète** renvoie à la mélancolie,
- la **chauve-souris** et son phylactère soulignent le côté énigmatique de l'œuvre.

Quant aux **objets mathématiques** :

- le **polyèdre et la boule** font référence à l'attrait de Dürer pour la géométrie,
- le **carré magique** semble être la première apparition européenne de ce thème connu depuis longtemps des chinois.

Le mathématicien est d'emblée attiré par les objets mathématiques : le compas dont l'ouverture semble correspondre au rayon de la sphère, le carré magique et le polyèdre, objet de cet article.

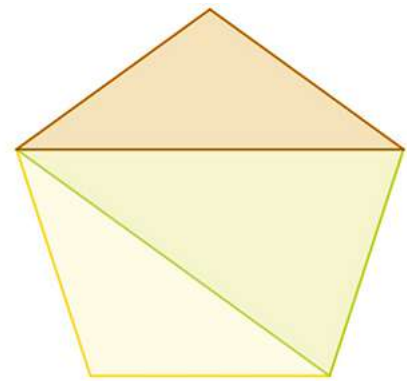
Étude du Polyèdre



Il est constitué de 6 pentagones et deux triangles équilatéraux.

Dürer ne précise pas sa construction mais dans un carnet conservé à Dresde, on trouve un dessin préparatoire.

En 1999, Schreiber remarqua que ce solide peut être obtenu à partir d'un cube, d'abord étiré pour produire six faces rhombiques ayant des angles de 72° , puis tronqué à son sommet et sa base pour donner les faces triangulaires dont les sommets sont sur la sphère inscrite sur les six sommets restants du cube³.



Les deux triangles d'or dans le pentagone.

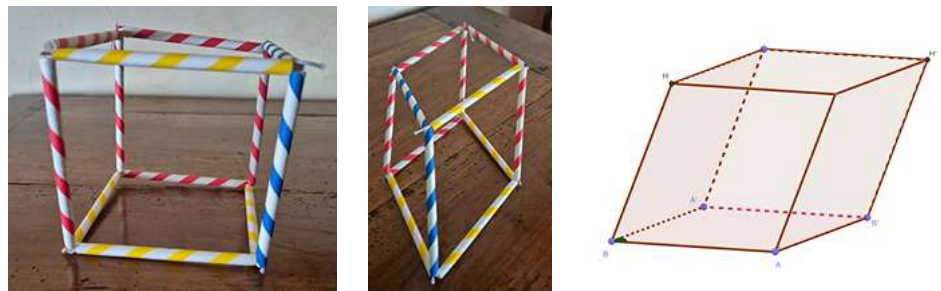
Étudions cette hypothèse.

C'est une troncature d'un hexaèdre rhombique (rhombos en grec signifie losange) dont les faces sont des *losanges dorés*⁴ c'est-à-dire constitués de deux triangles d'or accolés.

Il possède un centre de symétrie.

Pour le visualiser :

- on prend un cube déformable
- on l'étire suivant une grande diagonale de telle manière que chacune des faces devienne un losange doré.



Ce solide, comme beaucoup de solides considérés à l'époque, doit être inscriptible dans une sphère. On peut penser que Dürer a été influencé par les œuvres d'Euclide (acquises à Venise, grand centre d'imprimerie à l'époque) dont le dernier livre traite du calcul de l'arête de chaque solide de Platon en fonction du rayon de la sphère qui lui est circonscrite.

L'intersection de la sphère circonscrite et d'une face donne un cercle ce qui permet la construction d'une face pentagonale car on connaît les angles.

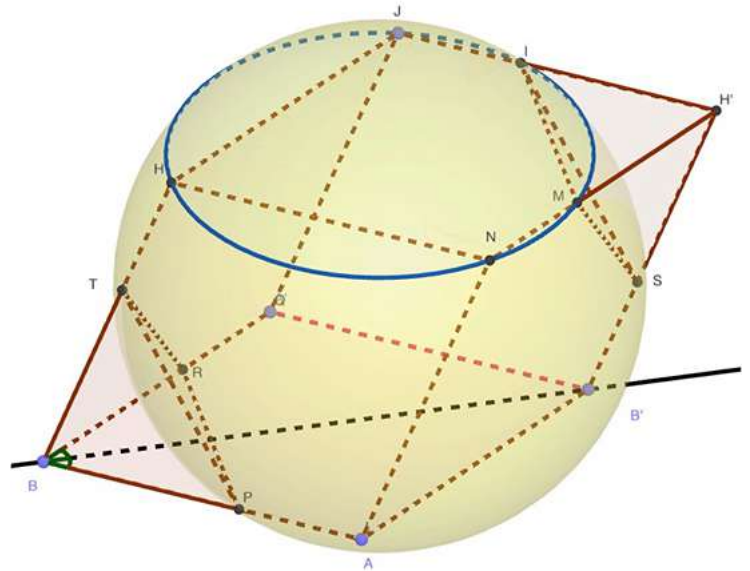
Le cercle circonscrit à NHJ coupe H4JM et NH' en I et M.

On place alors S et son symétrique T tel que $H'S = H'I$ pour obtenir les deux triangles équilatéraux.

³ https://fr.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I

⁴ Appellation pratique mais non standard

Construction du pentagone



On construit un losange doré $HJH'N$.
 Le pentagone cherché est $HJIMN$. NHJ mesure 72° .
 Les angles HNM et IJH valent $108^\circ = 72^\circ + 36^\circ$.
 L'angle HJN vaut la moitié de $180^\circ - 36^\circ$ soit 54° .
 Donc HJI vaut 108° .
 Donc $JIM = 126^\circ$ car les angles JIM et NJI sont
 supplémentaires. $INM = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$

On retrouve le nombre d'or dans ce pentagone.
 O désigne le centre du cercle.

$HN = HJ = a$; $IJ = MN = b$; $OM = ON = OH = r$;
 $IM = c$; $JN = e$.

Les triangles HON et ONM sont des triangles d'or
 car les angles à la base mesurent soit 36° soit

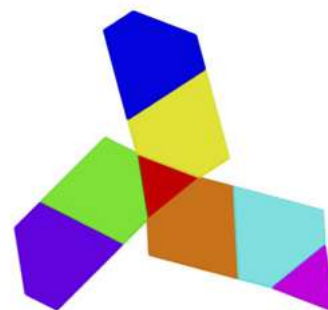
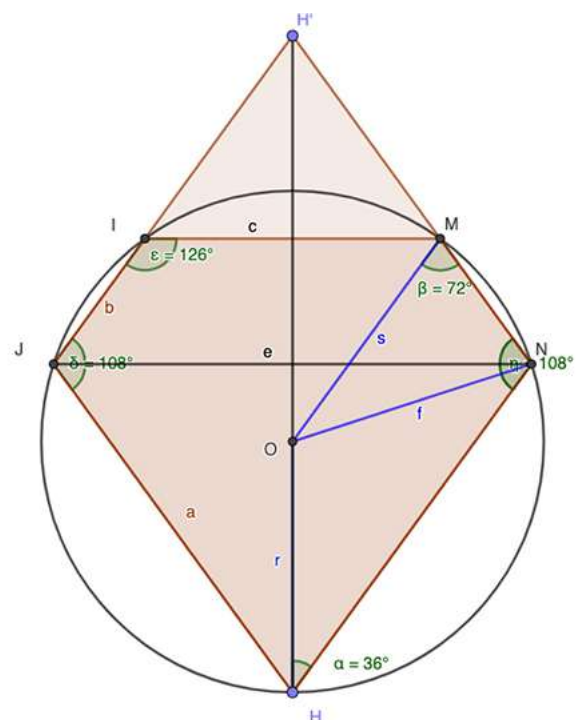
72° . Ainsi : $\frac{a}{r} = \frac{r}{b} = \varphi$.

Dans les triangles $H'JN$ et $H'IM$, $\frac{e}{c} = \frac{a}{a-b}$.

Or $a = r \varphi$ et $b = \frac{r}{\varphi}$ donc $\frac{a}{a-b} = \frac{\varphi \varphi}{\varphi \varphi - 1} = \varphi$.

Soit $e = c \varphi$.

Cela permet d'obtenir un développement⁵ :

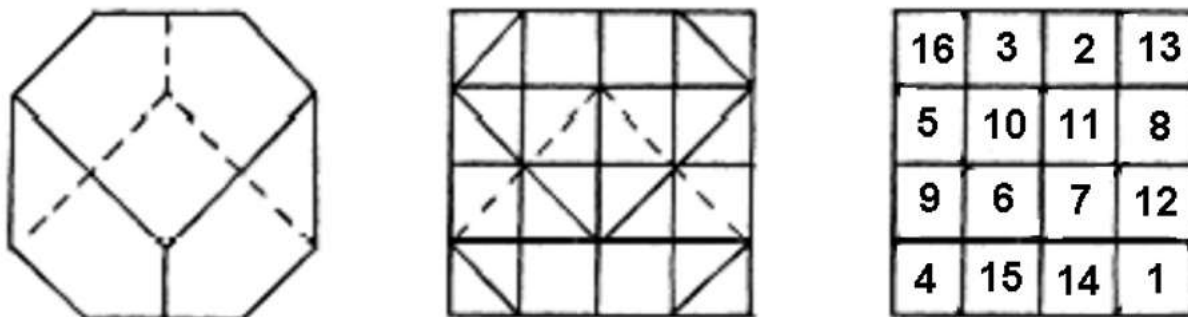


Il est facile de voir que ce solide est inscrit dans une sphère et que les triangles équilatéraux
 sont orthogonaux à l'axe de l'hexaèdre initial.

⁵ <https://www.geogebra.org/m/Eh369MAad>

Mais tous les historiens ne sont pas d'accord avec l'hypothèse de Schreiber et dans un ouvrage *Saturne et la mélancolie*, trois historiens de l'art dont Panofsky qui a passé une partie de sa vie à étudier Melancolia I penche pour une hypothèse de l'angle aigu du losange non pas de 72° mais de 80° . Dans un article, François Dusak et Maurice Bardot⁶ étudient cette hypothèse et comparent en les construisant les deux solides⁷ après une étude mathématique détaillée.

Notons que certains voient aussi un rapport entre ce solide et le carré magique : vu sous un certain angle, on peut retrouver le quadrillage du carré magique !



L'hypothèse de Schreiber semble plausible : les rapports entre Dürer, de Barbari, Luca Pacioli incitent à penser que la référence à la divine proportion soit voulue par Dürer mais rien n'est prouvé. On attend de futurs travaux sur cette œuvre qui ne manqueront pas d'être faits.

Bibliographie

La géométrie, Dürer traduit par Jeanne Peiffer, Seuil, 1995

Sitographie

https://fr.wikipedia.org/wiki/Poly%C3%A8dre_de_D%C3%BCrer

<https://artifexinopere.com/blog/interpr/peintres/durer/melencolia-i/4-la-question-du-polyedre/4-3-la-transformation-de-durer/>

https://fr.video.search.yahoo.com/yhs/search?fr=yhs-trp-007&ei=UTF-8&hsimp=yhs-007&hspart=trp&p=d%C3%BCrer++melancolia++video+fran%C3%A7ais&type=Y235_F163_2262_13_092724#id=2&vid=b527c5641b383cc79588e423ea3dbd43&action=click

https://fr.video.search.yahoo.com/yhs/search?fr=yhs-trp-007&ei=UTF-8&hsimp=yhs-007&hspart=trp&p=d%C3%BCrer++melancolia++video+fran%C3%A7ais&type=Y235_F163_2262_13_092724#id=17&vid=84510d65c901181b39e378a476d7f324&action=view

<https://www.polyhedra-world.nc/polyart1.htm>

https://fr.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I

⁶ https://poly-edre.blogspot.com/2012/05/le-polyedre-de-durer_19.html

⁷ Ils le font en bois ce qui nécessite les calculs des angles dièdres.

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Je vous propose une petite étude personnelle suite à ma rencontre avec une étonnante et très élégante famille de moyennes qui recouvre celles bien connues mais qui va bien au-delà.

Connaissez-vous les moyennes de Lehmer ?

1) Définition d'une moyenne

Il n'y a pas de définition unique de la notion de moyenne. Il y a quand même un accord assez général pour dégager certaines propriétés caractéristiques. Si l'on se restreint à la moyenne de deux nombres réels a et b strictement positifs (pour des raisons de simplicité de la présentation), on va la définir comme une application continue m de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ à valeurs dans \mathbf{R}_+^* , telle que l'on ait :

- symétrie, $m(a, b) = m(b, a)$,
- homogénéité, $m(ta, tb) = tm(a, b)$ pour tout réel t strictement positif,
- égalité, $m(a, a) = a$,
- internalité, $\min(a, b) \leq m(a, b) \leq \max(a, b)$.

2) Un point d'histoire

L'ancêtre de la notion de moyenne trouve son origine dans l'Antiquité avec les médiétés, médiétés qui étaient au nombre de onze. Elles se définissaient ainsi : ensemble de trois nombres tel que deux de leur différence sont entre elles dans le même rapport qu'un de ces nombres avec lui-même ou avec l'un des deux autres. En adoptant la numérotation donnée par le mathématicien du IV^e siècle, Pappus d'Alexandrie [1], on a la liste suivante.

La médiété première, appelée médiété arithmétique : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$ et l'on reconnaît

La moyenne arithmétique de a et c , $b = \frac{a+c}{2}$.

La médiété deuxième, appelée médiété géométrique : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ et l'on reconnaît la moyenne géométrique de a et c , $b = \sqrt{ac}$.

La médiété troisième, appelée médiété harmonique : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ et l'on reconnaît

la moyenne harmonique de a et c , $b = \frac{2ac}{a+c}$.

La médiété quatrième, appelée médiété sous-contraire à l'harmonique : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{c}{a}$

et l'on reconnaît la moyenne contre-harmonique de a et c , $b = \frac{a^2+c^2}{a+c}$.

La médiété cinquième, appelée médiété sous-contraire à la géométrique : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$.

La médiété sixième, appelée encore sous-contraire à la géométrique : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{b-c} = \frac{b}{a}$.

La médiété septième : $a > b > c > 0$ $\frac{a-c}{a-b} = \frac{b}{c}$.

La médiété huitième : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{a-c} = \frac{c}{a}$.

La médiété neuvième : $a > b > c > 0$ $\frac{a-b}{a-c} = \frac{b}{a}$.

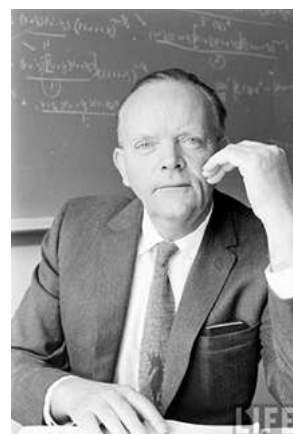
La médiété dixième : $a > b > c > 0$ $\frac{a-c}{b-c} = \frac{b}{c}$.

La médiété onzième (non présente chez Pappus mais présente chez Nicomaque) : $a > b > c > 0$ $\frac{a-c}{b-c} = \frac{a}{c}$.

Seules les quatre premières médiétés répondent à la définition d'une moyenne.

3) Et maintenant

Au fil du temps, d'autres types de moyennes ont été imaginées afin de répondre aux besoins de divers champs de la connaissance ou d'activités, la plupart incluant les quatre premières médiétés comme cas particuliers. En 1971, le mathématicien Derrick Lehmer [2], plus connu pour ses travaux en théorie des nombres, a proposé une nouvelle classe de moyennes. Pour deux nombres a et b strictement positifs, et pour p un nombre réel $L_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}$. On peut vérifier qu'il s'agit bien d'une moyenne au sens de la définition déjà donnée. Par ailleurs il n'est pas difficile de montrer que, pour a et b fixés, $L_p(a, b)$ croît avec p .



On retrouve la moyenne arithmétique avec L_1 , la moyenne géométrique avec $L_{1/2}$, la moyenne harmonique avec L_0 et la moyenne contre-harmonique avec L_2 . Ce type de moyenne a trouvé des applications dans le traitement numérique des images. Il faut cependant remarquer que l'importante moyenne quadratique n'est pas une moyenne de Lehmer.

4) Dans les pas de l'AGM

Il est courant, à la fin du chapitre sur les suites, d'étudier la moyenne arithmético-géométrique de deux nombres strictement positifs a et b à partir des deux suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et parfois de proposer en complément l'étude des suites $a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ afin de montrer qu'elles convergent vers la même limite \sqrt{ab} . Dans ce second cas on a donc, traduit en termes de moyennes de Lehmer, $a_{n+1} = L_0(a_n, b_n)$ et $b_{n+1} = L_1(a_n, b_n)$ convergeant vers $L_{1/2}(a, b)$.

En fait on a le résultat suivant, qui est peut-être original.

Propriété : Pour deux réels a et b avec $0 < a < b$ et deux réels p et q avec $p < q$, les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = L_p(a_n, b_n)$ et $b_{n+1} = L_q(a_n, b_n)$ convergent vers la même limite comprise entre a et b .

Cas particulier

Pour i pouvant valoir 0, 1/2 ou 1, pour tout x réel positif, on définit les deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ avec $0 < a < b$, $a_{n+1} = L_{i-x}(a_n, b_n)$ et $b_{n+1} = L_{i+x}(a_n, b_n)$. Ces deux suites convergent vers la même limite $L_i(a, b)$; cette dernière limite provenant de l'égalité $L_i(L_{i-x}(a, b), L_{i+x}(a, b)) = L_i(a, b)$.

Exemple

Pour $0 < a < b$, les suites $a_{n+1} = L_0(a_n, b_n)$ (moyenne harmonique) et $b_{n+1} = L_2(a_n, b_n)$ (moyenne contre-harmonique) convergent toutes deux vers $L_1(a, b)$ (moyenne arithmétique). Comme on peut s'en douter, le cas particulier ci-dessus ne recouvre pas le cas où $a_{n+1} = L_{1/2}(a_n, b_n)$ et $b_{n+1} = L_1(a_n, b_n)$ sinon $AGM(a, b)$ serait égale à $L_{3/4}(a, b)$, ce qui n'est pas le cas, mais n'en est quand même pas bien éloigné.

5) Deux questions

- Existe-t-il d'autres valeurs de i , autres que 0, 1/2 et 1, qui aboutissent à la même conclusion que le cas particulier précédent ?
- Existe-t-il des réels p , q et r , différents des triplets précédents tels que pour tous les réels strictement positifs a et b , $L_r(L_p(a, b), L_q(a, b)) = L_r(a, b)$?

Références :

[1] Michel Paul-Henri. Les médiétés. In : *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, tome 2, n°2, 1949. pp. 139-178.

[2] D.H. Lehmer, D.H. On the compounding of certain mean. *J. Math. Appl.* 1971, 36, 183-200.

Des problèmes

143-1 proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)

Dans un devoir maison rendu par une classe de mathématiques expertes, il était question d'établir qu'un certain ensemble muni d'une loi interne était un groupe commutatif. Je suis tombé sur une copie d'élève où tous les critères étaient bien vérifiés sauf l'associativité ; il y était affirmé que cette dernière propriété découlait nécessairement de toutes les précédentes. Il a fallu trouver un contre-exemple.

Qu'auriez-vous proposé à cet élève pour le convaincre que sa déduction était incorrecte ?

143-2 proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)

On attribue une couleur à chaque arête d'un graphe complet à n sommets K_n ($n \geq 3$). Combien de couleurs au minimum doit-on utiliser pour être assuré de l'existence d'un triangle dont les trois arêtes soient de couleurs différentes ?

143-3 proposé par Jacques Chayé (Poitiers)

Problème tiré de « *Problèmes mathématiques* » par Ernest Lebon - Armand Colin (1898)

Quel est le lieu des points tels que deux circonférences données soient vues de chacun d'eux sous des angles égaux ?



143-4 proposé par Laurent Signac (Poitiers)

Lors de la Journée de la Régionale qui s'est déroulée le 15 octobre dernier au lycée Charles Coulomb d'Angoulême, Laurent Signac a présenté une conférence riche et accessible sur l'IA. Pour illustrer son propos, voici le prompt qu'il a proposé à différentes IA et dont il a obtenu des réponses toutes différentes.



« Si on fait n tirages aléatoires des 26 lettres de l'alphabet, on obtient une séquence de n lettres. Quelles est la probabilité pour qu'il y ait une série de k lettres (avec $k < n$) successives ne contenant aucune lettre en double ? ».

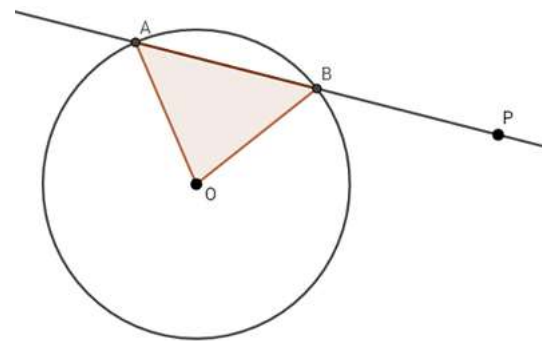
Avec votre intelligence naturelle, quelle réponse auriez-vous donnée ?

Des solutions

140-4 proposé par Jacques Chayé

On coupe une circonférence par une sécante rectiligne de position indéterminée, passant par un point fixe donné dans son plan ; déterminer la position de la sécante pour laquelle le triangle qui a pour sommets les traces de cette droite sur la circonférence et le centre de cette courbe a une aire maxima.

Bac sciences, Dijon 1875



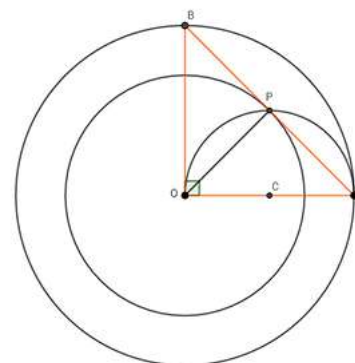
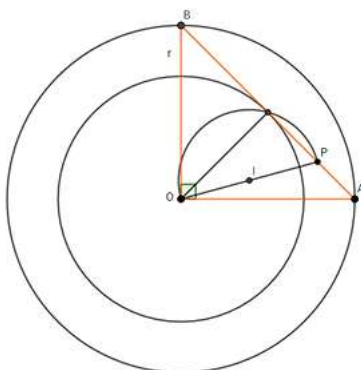
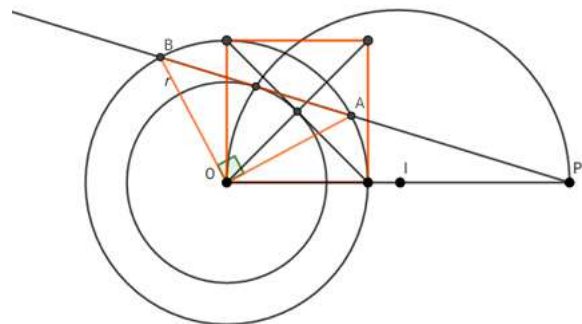
Solution de Frédéric de Ligt

On note r le rayon du cercle et α l'angle $A\hat{O}B$.

L'aire de AOB vaut $r^2 \sin(\alpha)/2$. Cette aire sera maximale quand $\sin(\alpha)$ sera le plus grand possible.

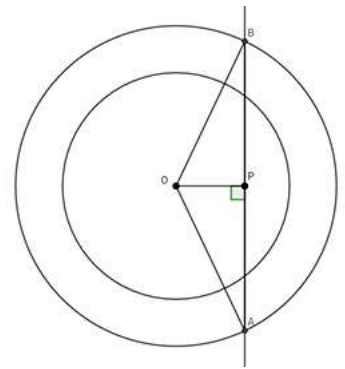
Premier cas

Le point P est en dehors du disque ouvert de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}r$. On trace une tangente à ce cercle qui rencontre le cercle de rayon r en A et B. Le triangle AOB est alors rectangle en O et l'aire de AOB est alors maximale et vaut $r^2/2$.



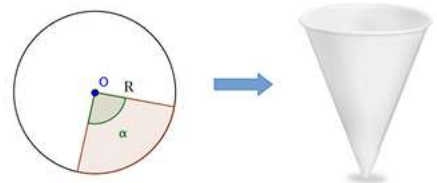
Second cas

Si le point P est intérieur au disque de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}r$, on ne peut plus construire de triangle AOB rectangle en O. L'angle α devant être obtus. Pour des raisons de symétrie on a une aire maximale pour AOB avec la construction ci-contre.



141-2 proposé par Frédéric de Ligt

On découpe un secteur angulaire d'angle α (en radian) dans un disque de rayon R . On obtient ainsi le patron d'un cône. Quelle valeur faut-il donner à l'angle α pour que le volume soit maximum ?



Solution de Fabien Aoustin

J'utilise souvent cette situation en première spécialité pour discuter des choix effectués dans le cadre de l'étude d'un problème. Si on choisit ici comme variable non pas l'angle ou le rayon r de la base mais la hauteur h du cône, on trouve $V(h) = \frac{\pi}{3} \times (R^2 h - h^3)$.

On tombe sur un polynôme de degré 3. Le signe de la dérivée peut même se faire sans discriminant.

Pour répondre à l'interrogation de Jean-Paul Mercier, il n'est pas possible de construire l'angle voulu à la règle et au compas. Pour le voir, on peut utiliser le théorème de Gelfond-Schneider qui affirme que a^b est transcendant dès que a est algébrique (différent de 0 ou de 1) et b

algébrique irrationnel. Ici on peut prendre $a = -1$ et $b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$. On a alors $a^b = (e^{i\pi})^b = e^{i\alpha}$

qui est transcendant. Or les nombres constructibles sont algébriques donc la construction est impossible. Cela dit, il y a peut-être plus simple que ce gros théorème et le fait que ce ne soit pas possible n'empêche pas de chercher une construction approchée efficace.

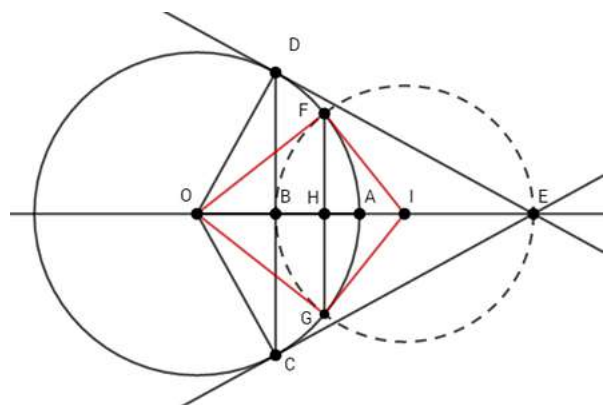
141-4 proposé par Jacques Chayé :

Un cercle de centre O et de rayon r étant donné, on prend sur un rayon [OA], entre O et A, un point B situé à une distance $OB = x$ de O, et par ce point on mène la corde [CD] perpendiculaire à [OA]. Les tangentes en C et D se rencontrent en un point E de [OA]. Sur [BE] comme diamètre on décrit une circonférence. Soit I le centre de cette dernière, et [FG] la corde commune à ces deux circonférences.

Démontrer que le quadrilatère OFIG est rectangle en F et en G.

Trouver la longueur de la corde commune [FG]. Où doit être pris le point B pour que l'aire du quadrilatère OFIG soit égale à celle du triangle CDE ?

Bac sciences, Grenoble 1884



Solution de Frédéric de Ligt

Dans le triangle OBD rectangle en B on a $BD^2 = r^2 - x^2$ et dans le triangle ODE rectangle en D on a $BD^2 = x \cdot BE$; on en tire donc $BE = (r^2 - x^2)/x$ et $BI = BE/2 = (r^2 - x^2)/2x$. Les points F et B sont sur le cercle de centre I, $IF = IB$.

On a d'une part $OF^2 + IF^2 = r^2 + IB^2 = r^2 + ((r^2 - x^2)/2x)^2$ et par ailleurs $OI^2 = (OB + BI)^2$, soit $OI^2 = (x + (r^2 - x^2)/2x)^2 = x^2 + ((r^2 - x^2)/2x)^2 + (r^2 - x^2)$.

On a bien $OI^2 = OF^2 + IF^2$. La réciproque du théorème de Pythagore permet de conclure : le triangle OIF est rectangle en F.

$OF \times FI = OI \times FH$, soit $rx \cdot (r^2 - x^2)/2x = FH \cdot (x + (r^2 - x^2)/2x)$, d'où $FH = rx(r^2 - x^2)/(r^2 + x^2)$

Enfin la corde commune $FG = 2rx(r^2 - x^2)/(r^2 + x^2)$.

Aire de OFIG = $OF \times FI = rx(r^2 - x^2)/2x$; aire de CDE = $DB \times BE = (r^2 - x^2)^{1/2} \cdot x(r^2 - x^2)/x$.

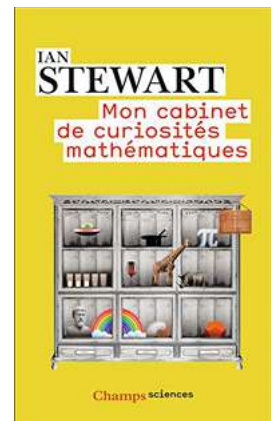
Ces deux aires sont égales quand $r/2 = (r^2 - x^2)^{1/2}$ ou encore $x = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

142-1 proposé par Frédéric de Ligt

Trouvé dans le recueil de petits problèmes ci-contre

On a la curieuse égalité : $\frac{1}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{18}{45}$. Les deux termes de l'addition sont des fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont compris entre 1 et 9 et par ailleurs leur produit est une fraction où le numérateur est strictement inférieur au dénominateur.

Il y a d'autres fractions qui vérifient le même genre d'égalité. Lesquelles ?



Solution de l'auteur

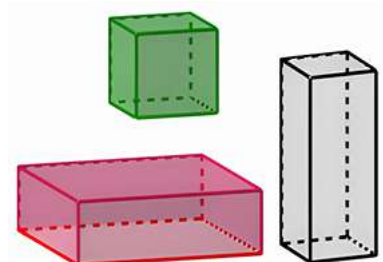
On va restreindre la recherche aux nombres à un seul chiffre pour les deux premières fractions. Par ailleurs on peut observer qu'en inversant chacune de ces deux fractions on obtient une égalité semblable : $\frac{4}{1} \times \frac{5}{8} = \frac{45}{18}$. On va donc se limiter au cas où le résultat est une fraction inférieure ou égale à 1.

La question se met sous la forme $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{10a + c}{10b + d}$ ou encore $ac(10b + d) = bd(10a + c)$.

Il y a déjà 81 solutions triviales avec $a = b$ et $c = d$. Voici les autres égalités possibles plus intéressantes : $\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{24}$, $\frac{1}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{18}{45}$, $\frac{1}{6} \times \frac{4}{3} = \frac{14}{63}$, $\frac{1}{6} \times \frac{6}{4} = \frac{16}{64}$, $\frac{1}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{19}{95}$, $\frac{2}{6} \times \frac{6}{5} = \frac{26}{65}$, et $\frac{4}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{49}{98}$.

142-3 proposé par Frédéric de Ligt

Un pavé droit est constitué de cubes unités de couleur claire. On le recouvre complètement d'une couche de cubes unités de couleur foncée de façon à obtenir extérieurement un pavé droit de couleur foncée. Il y a maintenant autant de cubes de couleur claire que de cubes de couleur foncée. Quelles peuvent être les dimensions finales de ce pavé droit ?



Solution de l'auteur

Sans perte de généralité on peut supposer que $1 \leq x \leq y \leq z$ ces trois nombres étant des entiers naturels qui désignent les trois dimensions du pavé droit constitué de cubes de couleur claire.

On a l'équation :

$$xyz = 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 8,$$

ou encore

$$(x - 2)(y - 2)(z - 2) = 8(x + y + z).$$

Il est clair maintenant que $x \geq 3$. On pose $X = x - 2$, $Y = y - 2$, $Z = z - 2$.

L'équation devient :

$$XYZ = 8(X + Y + Z) + 48 \text{ avec } 1 \leq X \leq Y \leq Z$$

Pour $X = 1$ l'équation se met sous la forme $(Y - 8)(Z - 8) = 120$. On trouve alors huit couples-solutions pour $(Y ; Z) : (9 ; 128), (10 ; 68), (11 ; 48), (12 ; 38), (13 ; 32), (14 ; 28), (16 ; 23), (18 ; 20)$.

Pour $X = 2$ l'équation se met sous la forme $(Y - 4)(Z - 4) = 48$. On trouve alors cinq couples-solutions pour $(Y ; Z) : (5 ; 52), (6 ; 28), (7 ; 20), (8 ; 16), (10 ; 12)$.

Pour $X = 3$ l'équation se met sous la forme $(3Y - 8)(3Z - 8) = 280$. On trouve alors quatre couples-solutions pour $(Y ; Z) : (3 ; 96), (4 ; 26), (5 ; 16), (6 ; 12)$.

Pour $X = 4$ l'équation se met sous la forme $(Y - 2)(Z - 2) = 24$. On trouve alors trois couples-solutions pour $(Y ; Z) : (4 ; 14), (5 ; 10), (6 ; 8)$.

Pour $X \geq 5$, il n'y a plus de couples-solutions pour $(Y ; Z)$.

En revenant au problème initial posé on a trouvé pour le pavé clair :

$3 \times 11 \times 130, 3 \times 12 \times 70, 3 \times 13 \times 50, 3 \times 14 \times 40, 3 \times 15 \times 34, 3 \times 16 \times 30, 3 \times 18 \times 25, 3 \times 20 \times 22, 4 \times 7 \times 54, 4 \times 8 \times 30, 4 \times 9 \times 22, 4 \times 10 \times 18, 4 \times 12 \times 14, 5 \times 5 \times 98, 5 \times 6 \times 28, 5 \times 7 \times 18, 5 \times 8 \times 14, 6 \times 6 \times 16, 6 \times 7 \times 12, 6 \times 8 \times 10$.

Les dimensions finales du pavé droit s'obtiennent alors en ajoutant 2 à chacune des dimensions précédentes.

Régionale APMEP de Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : <https://www.apmep.fr/La-Regionale-Poitou-Charentes>
Mél. regapmep16177986@gmail.com

Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

<i>Directeur de la publication</i>	Frédéric de Ligt	<i>Éditeur</i>	APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
<i>Comité de rédaction</i>	Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon	<i>Siège social</i>	Voir adresse ci-dessus
<i>Imprimerie</i>	IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)	<i>Dépôt légal</i>	Décembre 2025