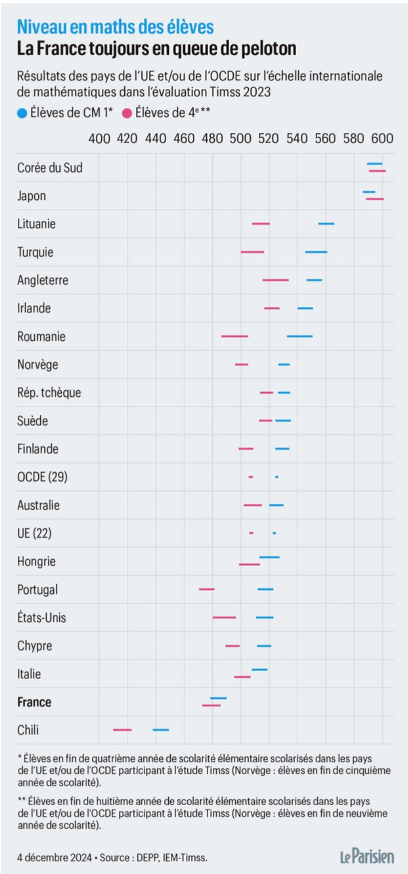
Régionale APMEP de Poitou - Charentes
APMEP

Corol'aire

Juin 2025 n° 141

La faute à qui ?

Frédéric de Ligt



Voici un tableau, paru en décembre 2024, qui donne le classement de nombreux pays suite à l'évaluation TIMSS 2023 en mathématiques. Cette évaluation cible les niveaux CM1 et Quatrième pour notre pays. On cherche tout d'abord la France en haut du classement, son nom ne s'y trouve pas ; puis le regard glisse inexorablement vers le bas du tableau et s'arrête juste avant d'en sortir. C'est là que l'on peut apercevoir la place infamante de notre pays. Avant-dernière du classement. Gasp !

Quoi ! Comment cela est-il possible dans le pays de Viète, de Descartes, de Cauchy, de Poincaré, de Bourbaki, de Villani et de tant d'autres ?
Il faut absolument trouver un coupable !
C'est la faute aux parents !
Non, c'est la faute aux médias !
Non, c'est la faute aux écrans !
Non, c'est la faute aux enseignants !
Non, c'est la faute à la réforme des maths modernes !
Non, c'est la faute aux méthodes pédagogiques !
Non, c'est la faute au COVID !
Non, c'est la faute aux modes d'évaluation de TIMSS !
Non, c'est la faute aux politiques !
Non, c'est la faute au MEN !
Non, c'est la faute à un système inégalitaire !
Non, c'est la faute à l'abandon des fondamentaux !
Non, c'est la faute à …
Chacun renvoyant la faute de cet échec sur l'autre.

Et si toutes les parties concernées, sans mauvaise foi, voulaient bien se mettre autour d'une table pour faire un état des lieux précis et tenter de dégager l'importance relative des différentes causes qui pourraient expliquer ce glissement plus qu'inquiétant du niveau des élèves français, ceci afin de trouver en commun les moyens d'y remédier.
Notre association peut y apporter sa contribution. Cela nous concerne tous et l'avenir du pays en dépend.

Sommaire

Comité de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Mercredi 4 juin 2025 en visio-conférence

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

64 classes ont participé cette année au Rallye avec un nombre conséquent de classes de seconde mais un nombre plus restreint de classes de quatrième et de troisième. Il n'y a pas de cérémonie de remise des prix cette année. Des lots sont attribués aux classes primées. Un diaporama des meilleurs travaux d'élèves est accessible sur le site de la Régionale.
Le groupe Rallye est encore en phase de réflexion pour faire à nouveau participer les niveaux sixième et cinquième tout en tenant compte de la contrainte liée à la nouvelle organisation en groupe de besoin. Une idée pourrait être de ne proposer pour ces classes qu'un travail au long cours, sur le thème commun de l'année, mais sans épreuve finale et les dossiers seraient envoyés pour examen au groupe Rallye qui établirait alors une liste des classes primées et récompensées par des lots. Reste à trouver un thème commun et motivant pour tous les niveaux, depuis l'école primaire jusqu'à la classe de seconde.

Journée de la Régionale

La Journée de la Régionale a été acceptée par l'EAFC (École Académique de la Formation Continue) ; 70 places de stagiaires sont ouvertes à l'inscription. Elle se déroulera le mercredi 15 octobre de 9 h 30 à 17 h, sans doute au lycée Charles Coulomb à Angoulême. La demande habituelle de 300 € de subvention à l'Espace Mendès France pour cette Journée, dans le cadre de la Fête de la Science, a été déposée et enregistrée. Une conférence sur l'impact de l'intelligence articielle sur l'enseignement est envisagée. Reste à trouver un conférencier. Quelques idées d'ateliers commencent à émerger. Céline Fauvinet pourrait animer un atelier sur les fractions en lien avec un article paru dans Au fil des maths, Nathalie Chevalarias et Jean-Paul Guichard pourraient animer un atelier sur l'introduction d'une perspective historique en mathématiques au niveau du cycle 3, Dominique Gaud pourrait, comme l'an passé, animer un atelier présentant l'exposition Maths&Images, un autre atelier ou un débat pourrait avoir pour thème les nouveaux programmes de cycle 3.
Pour obtenir la participation des professeurs des écoles à cette Journée, il faudra voir l'an prochain avec l'IEN du réseau ECLORE qui tourne sur Angoulême.
L'Assemblée Générale de l'Association ne se déroulera pas pendant cette Journée, une date sera proposée ultérieurement et prendra la forme d'une visioconférence de façon à toucher l'ensemble des adhérents.

Expositions

Le projet pour les différents pôles de la future exposition sera présenté à l'Espace Mendes France. La présentation au grand public devant avoir lieu en septembre 2026, il est temps de commencer à réfléchir aux ateliers et à la conférence qui seront proposés. La brochure de l'exposition est en cours d'écriture. La convention tripartite qui définit le rôle des trois entités ; Régionale APMEP, IREM&S de Poitiers et Espace Mendes France dans la réalisation des expositions n'est toujours pas signée. Cela permettrait de définir clairement la part dévolue à chacun dans les différents frais engendrés par ce travail.

Corol'aire

Les 136 premiers numéros du Corol'aire sont disponibles en ligne sur le site Publimath.fr, ainsi que des fiches individuelles pour chacun des articles qui ont paru dans ces bulletins. Frédéric de Ligt termine ce travail d'ici l'été pour atteindre ce numéro 141.

Séminaire

Cette année, le séminaire national ne pourra pas se dérouler en présentiel en raison des travaux ferroviaires qui rendent difficile la venue à Paris, mais seulement en visioconférence. Le Bureau national propose que les membres de l'APMEP puissent s'inscrire pour assister aux conférences du 14 et 15 juin. À charge aux présidents des Régionales de transmettre l'information.

En marge de l'ordre du jour

Thierry Bacle, qui est responsable de la commission collège APMEP au niveau national, a accompagné la présidente de l'APMEP pour deux entrevues à la DGESCO à Paris. L'APMEP était consultée dans le cadre de la mise au point de nouveaux programmes. Thierry nous a fait un rapide compte rendu de ses visites.

Date du prochain comité

Le prochain comité est fixé le mercredi 24 septembre à 15 h dans les locaux de l'IREM&S. Cette réunion sera l'occasion de fixer une date pour l'Assemblée Générale de l'Association.

Rallye 2025 : bilan et perspectives

Corinne Parcelier

Trophée

Un nouveau Rallye s'achève donc. Vous trouverez le palmarès, le bilan et le diaporama des morceaux choisis sur notre site à l'adresse : https://www.apmep.fr/Rallye-2025

Le constat est mitigé : les productions sont comme toujours de grande qualité mais la participation est en berne.

C'est pourquoi nous n'avons pas organisé de remise des prix. En revanche, grâce au soutien financier de nos sponsors, les classes primées se sont vues remettre des lots par la poste.

Cette année, nous avions choisi différents livres en lien avec le thème des pavages et un lot de superbes affiches de Raoul Raba représentant les dix-sept types de pavages pouvant exister selon les symétries et rotations intervenant dans le dessin.

Nous avons également fait fabriquer des trophées en bois, très réussis !

Mais il faut se rendre à l'évidence, sans les niveaux 6$^{\text{ème}}$ et 5$^{\text{ème}}$, nous perdons quasiment 2/3 de notre public.

Depuis que nous savons que la réforme du collège est reconduite pour l'an prochain, nous nous interrogeons sur la façon de nous adapter à cette organisation « en groupes de besoin ».

Et si sur ces niveaux on proposait un Rallye sans classement ? Un dossier sur un thème, comme d'habitude, qui comporterait des problèmes à résoudre mais où l'enseignant.e pourrait intervenir ?

Un Rallye qui ne mettrait pas les groupes en concurrence mais qui donnerait quand même lieu à un retour (correction et prix spéciaux) ?

C'est sur ces bases que nous envisageons le Rallye Mathématique de Poitou-Charentes 2026 pour les niveaux CM, 6$^{\text{ème}}$ et 5$^{\text{ème}}$.

Pour les autres niveaux, la formule resterait la même que cette année.

Et pour inaugurer cette nouvelle formule, quoi de plus alléchant que le thème :

« Maths et Pâtisserie » ?

On va se régaler !

Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Jean-Christophe Laugier nous a proposé une belle étude.
« *Je me suis posé le problème suivant : dénombrer les compositions d'un bi-entier $x(m, n) \in \mathbb{N}^2$ non nul, c'est-à-dire des suites finies $x_1, x_2, \ldots, x_k$ de bi-entiers non nuls telles que $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. J'ai mis en forme cette recherche qui pourrait intéresser les lecteurs de Corol'aire.* »

Son étude étant assez longue, la première partie a été présentée dans le précédent bulletin du Corol'aire. Voici la seconde partie.

Composition d'un entier, d'un multi-entier, dénombrement de chemins

Nous allons à présent déterminer X(n, p) en fonction de n et p. Divisons les 2 membres de (1) par 2^{n-1}.
Il vient $X(n,p)/2^{n-1} = X(n-1,p)/2^{n-2} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{X(n,i)}{2^{n-1}}$. Posons $Q_p(n) = X(n,p)/2^{n-1}$.

On obtient $Q_p(n) - Q_p(n-1) = \sum_{i=0}^{p-1} Q_i(n)$ (2), (n, p ≥1), avec $Q_0(n) = 1$ pour n ≥ 1. On peut à présent calculer de proche en proche $Q_1(n)$, $Q_2(n)$, … au moyen de (2).

$Q_1(u) - Q_1(u-1) = Q_0(u) = 1$ pour u ≥ 1 d'où $Q_1(n) - Q_1(0) = \sum_{u=1}^{n} 1 = n$ soit $Q_1(n) = 2 + n$.

De même $Q_2(u) - Q_2(u-1) = Q_0(u) + Q_1(u) = 1 + 2 + u = 3 + u$.

D'où $Q_2(n) - Q_2(0) = \sum_{u=1}^{n} (3+u) = 3n + n(n+1)/2$, soit $Q_2(n) = 4 + 3\binom{n}{1} + \binom{n+1}{2}$.

Nous allons à présent faire usage de la formule :
$\sum_{u=k}^{n} \binom{u}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, qui peut être démontrée de manière combinatoire en remarquant que le plus grand élément de tout k+1- bloc de {1, 2, …, n+1} est l'un des nombres k+1, k+2, …, n+1. Déterminons $Q_3(n)$:

$Q_3(u) - Q_3(u-1) = Q_0(u) + Q_1(u) + Q_2(u) = 1 + (2 + u) + (4 + 3u + u(u+1)/2) = 7 + 4\binom{u}{1} + 7\binom{u+1}{2}$.

$Q_3(n) - Q_3(0) = \sum_{u=1}^{n} \left(7 + 4\binom{u}{1} + \binom{u+1}{2}\right)$. Soit $Q_3(n) = 8 + 7\binom{n}{1} + \binom{n+2}{3}$.

Calculons $Q_4(n)$: $Q_4(u) - Q_4(u-1) = Q_0(u) + Q_1(u) + Q_2(u) + Q_3(u)$

$= 1 + (2 + 1u) + (4 + 3u + 1\binom{u+1}{2}) + (8 + 7u + 4\binom{u+1}{2} + \binom{u+2}{3})$

$= 15 + 11u + 5\binom{u+1}{2} + \binom{u+2}{3}$.

D'où $Q_4(n) = 16 + 15n + 11\binom{n+1}{2} + 5\binom{n+2}{3} + \binom{n+3}{4}$ et la règle de formation des Q_k apparaît.

Il vient $Q_5(n) = 32 + 31n + 26\binom{n+1}{2} + 16\binom{n+2}{3} + 6\binom{n+3}{4} + \binom{n+4}{5}$.

Dressons le tableau des coefficients de $Q_k(n)$:

$Q_0(n)$	1					
$Q_1(n)$	2	1				
$Q_2(n)$	4	3	1			
$Q_3(n)$	8	7	4	1		
$Q_4(n)$	16	15	11	5	1	
$Q_5(n)$	32	31	26	16	6	1

Ce tableau s'obtient de la même manière que le triangle de Pascal, la première colonne étant remplacée par les puissances de 2. Désignons par A(p, u) le terme du tableau figurant à la ligne p et la colonne u, p et u des entiers naturels. On vérifie en effet aisément par récurrence sur p que A(p, u) = A(p-1, u) + A(p-1, u-1).
D'autre part, on vérifie également qu'on obtient le vrai triangle de Pascal en remplaçant dans le tableau précédent chaque colonne par sa différence avec la suivante, c-à-d que A(p, u) – A(p, u+1) = $\binom{p}{u}$.

Nous allons pouvoir transformer l'expression de $Q_p(n) = \sum_{u=0}^{p} A(p,u)\binom{n+u-1}{u}$ par utilisation répétée de l'égalité :

$$A(p,\ u)\binom{n+u-1}{u} + A(p,\ u+1)\binom{n+u-1}{u+1} = \binom{p}{u}\binom{n+u-1}{u} + A(p,\ u+1)\binom{n+u}{u+1}.$$

D'une manière générale, on montre aisément que $Q_p(n) = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n+i}{i}$.

Puisque X(n, p) = $2^{p-1}Q_p(n)$, on obtient finalement X(n, p) = $2^{p-1}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\binom{n+i}{i}$. On recalcule rapidement au moyen de cette formule la valeur 23 776 pour X(4, 6) trouvée précédemment.
Nous allons, pour finir, déterminer X(n, p) de l'autre manière en introduisant L_k, nombre de compositions de (n, p) de longueur k. Il est clair que X(n, p) = $\sum_{k=1}^{n+p} L_k$.
Introduisons l_k, nombre d'écritures de (n, p) comme somme ordonnée de k bi-entiers, certains pouvant éventuellement être nuls. Alors $l_k = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}L_i$.
D'où, d'après la formule d'inversion de Pascal, $L_k = \sum_{i=1}^{k} l_i\binom{k}{i}(-1)^{k-i}$.
l_k est égal au nombre de suites (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_k, y_k) de bi-entiers (naturels) telles que :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

et

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = p,$$

soit au nombre de suites de bi-entiers (naturels non nuls) (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), ..., (x'_k, y'_k) telles que :

$$x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_k = n + k$$

et

$$y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_k = p + k,$$

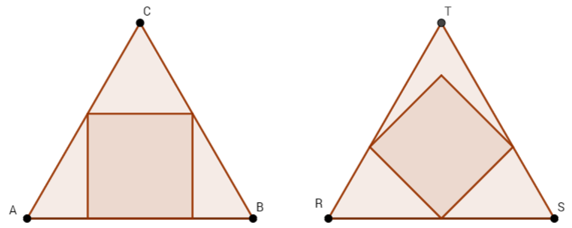
donc $\binom{p+k-1}{k-1}\binom{p+k-1}{k-1}$ d'après ce qui a été vu plus haut.
D'où X(n, p) = $\sum_{k=1}^{n+p}\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\binom{n+i-1}{i-1}\binom{p+i-1}{i-1}(-1^{k-i})\right)$.
Cette expression de x(n, p) est évidemment plus complexe que celle obtenue précédemment. On peut tenter de la simplifier en permutant les ordres de sommation.
Il vient X(n, p) = $\sum_{i=1}^{n+p}\left((-1)^i\binom{n+i-1}{i-1}\binom{p+i-1}{i-1}\sum_{k=i}^{n+p}\binom{k}{i}(-1)^k\right)$.

L'idéal serait de trouver une expression simple de $\sum_{k=i}^{n+p} \binom{k}{i} (-1)^k$. Nous en sommes restés là..

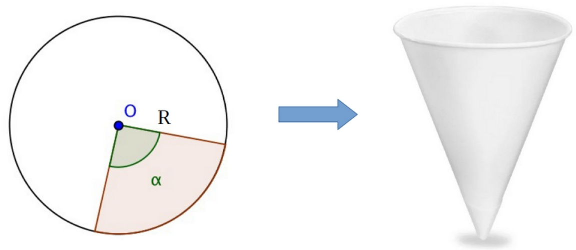
Des problèmes

141-1 *proposé par Walter Mesnier (Poitiers)*

Est-il possible de construire un carré à l'intérieur d'un triangle équilatéral, de sorte que l'aire du carré soit supérieure à la moitié de celle du triangle ?
Voici les solutions de deux élèves. Sont-elles valables ?
Sur la figure de droite, le sommet du carré est placé au milieu du côté [RS].



141-2 *proposé par Frédéric De Ligt (Montguyon)*



On découpe un secteur angulaire d'angle α (en radian) dans un disque de rayon R . On obtient ainsi le patron d'un cône. Quelle valeur faut-il donner à l'angle α pour que le volume soit maximum ?

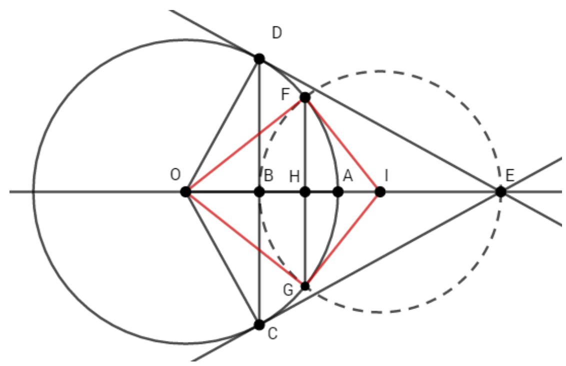
141-3 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)*

Soit (x_n) une suite de nombres réels vérifiant la relation de récurrence $x_{n+2} = |x_{n+1}| - x_n$ pour tout entier naturel. Montrer que la suite (x_n) est périodique.

141-4 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*

Un cercle de centre O et de rayon r étant donné, on prend sur un rayon [OA], entre O et A, un point B situé à une distance OB = x de O, et par ce point on mène la corde [CD] perpendiculaire à [OA]. Les tangentes en C et D se rencontrent en un point E de (OA). Sur [BE] comme diamètre on décrit une cercle.
Soit I le centre de ce dernier, et [FG] la corde commune à ces deux cercles. Démontrer que le quadrilatère OFIG est rectangle en F et en G. Trouver la longueur de la corde commune [FG]. Où doit être pris le point B pour que l'aire du quadrilatère OFIG soit égale à celle du triangle CDE ?

(Bac sciences, Grenoble 1884)



Des solutions

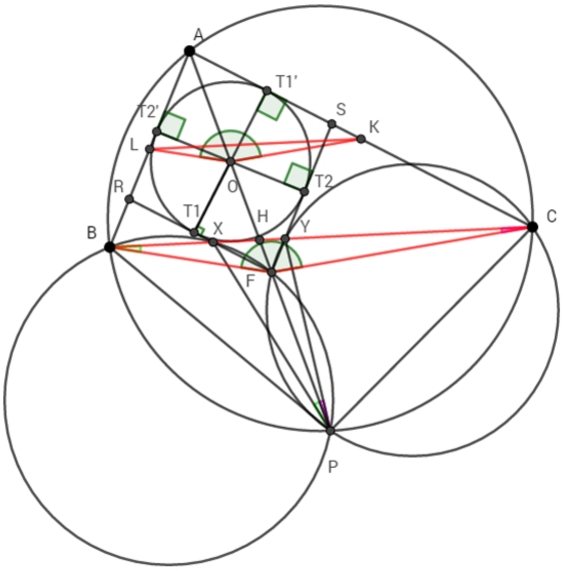
134-4 *proposé par Jean Cordier*

Soit ABC un triangle vérifiant AB < AC < BC. On note ω le cercle inscrit dans le triangle ABC, et O le centre de ω. Soit X le point de la droite (BC), distinct de C, tel que la parallèle à (AC) passant par X soit tangente à ω. Similairement, soit Y le point de la droite (BC), distinct de B, tel que la parallèle à (AB) passant par Y soit tangente à ω. La droite (AO) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en P (distinct de A). Soient K et L les milieux des segments [AC] et [AB] respectivement.

Démontrer que $\widehat{KOL} + \widehat{YPX} = 180°$.

Solution de l'auteur

Le point H est le pied de la bissectrice issue de A.
a) Soit F l'intersection des tangentes en T_1 et T_2.
Elles définissent un losange ARFS. Noter que F est sur (AP). D'autre part, L et K sont des milieux des côtés du triangle ABC.
L'homothétie de centre A et de rapport 2 transforme le triangle LOK en le triangle BFC et $\widehat{LOK} = \widehat{BFC}$.
b) On construit des cercles c_1 et c_2 circonscrits respectivement aux triangles PFC et PFB. On va justifier que Y est sur c_1 et X sur c_2. Pour le point Y, on démontre que $\widehat{YCP} + \widehat{YFP} = 180°$.
On a $\widehat{YCP} = \widehat{BAP}$ car ils interceptent l'arc (BP) du cercle c_3 circonscrit au triangle ABC. D'autre part, le losange donne $\widehat{BAP} = \widehat{AFY}$ donc $\widehat{YCP} = \widehat{AFY}$. Or $\widehat{AFY} + \widehat{YFP} = 180°$ donc $\widehat{YCP} + \widehat{YFP} = 180°$ donc Y est sur le cercle c_1. Et on a l'analogue pour X.



c) Soit le triangle BFC. On a $\widehat{FCB} + \widehat{FBC} + \widehat{BFC} = 180°$ (1).

En utilisant c_1 et c_2, on a respectivement $\widehat{FCB} = \widehat{FPY}$ et $\widehat{FBC} = \widehat{FPX}$ qui, portés dans (1), donnent $\widehat{FPY} + \widehat{FPX} + \widehat{BFC} = 180°$ (2).

Il suffit alors d'utiliser $\widehat{FPY} + \widehat{FPX} = \widehat{YPX}$ qui joint à (2) donne $\widehat{YPX} + \widehat{BFC} = 180°$ et donc $\widehat{YPX} + \widehat{LOK} = 180°$.

138-3 *proposé par Jacques Chayé*

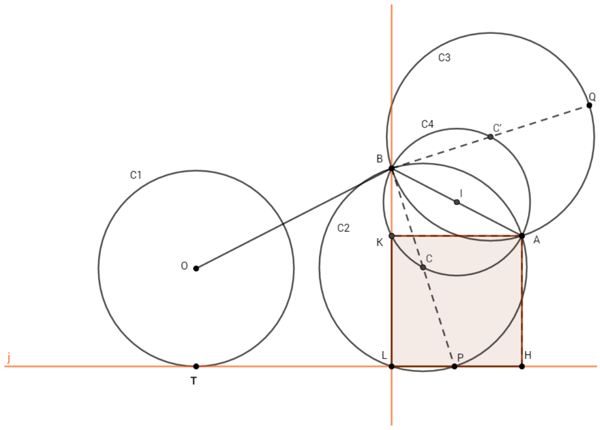
Soit C un cercle et A et B deux points de son plan.
Mener une tangente T au cercle C telle que le point A soit équidistant de cette tangente et de la perpendiculaire P abaissée sur elle du point B.

Solution de l'auteur

Supposons qu'il existe une solution. Puisque T et P sont perpendiculaires et que A est à égale distance de T et de P, il existe une rotation d'angle droit (direct ou indirect) qui transforme P en T. Cette rotation transforme B en un point B' de T.
Réciproquement : soit B' l'image de B par une des deux rotations d'angle droit et de centre A. Selon que B' est extérieur à C, sur C ou intérieur à C, on peut mener à C, à partir de B', deux tangentes, ou une seule ou aucune.
Dans le cas où il existe une tangente au moins, soit D son point de contact avec C. La perpendiculaire à (B'D) passant par B répond à la question.
Il peut y avoir de 0 à 4 solutions.

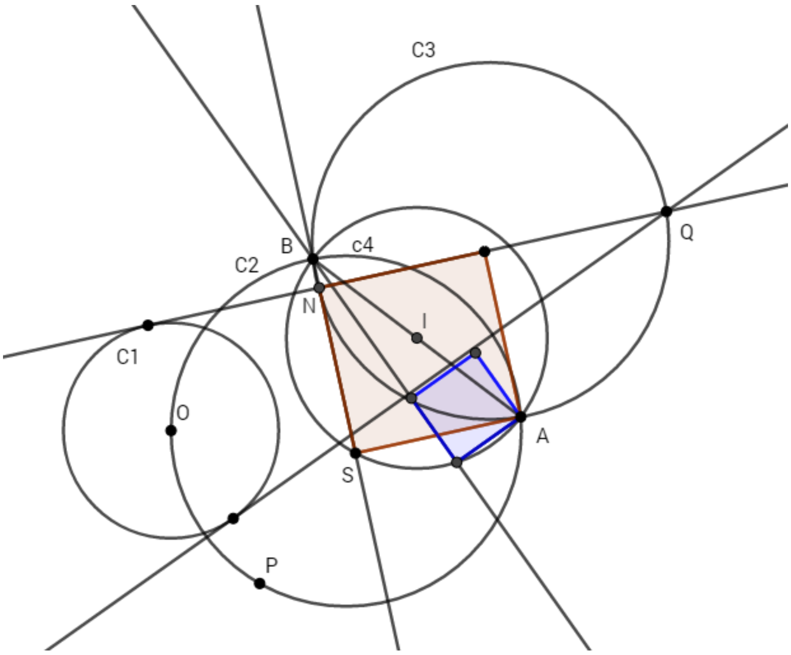
Solution de Jean Cordier

Construction à la règle et au compas.
Soit la figure de l'énoncé où figure une solution.
On note L la projection de B sur la tangente. Suivant la disposition du carré, on a en L un angle géométrique tel que $\widehat{ALB} = 45°$ ou $\widehat{ALB} = 135°$. Donc pour tout carré solution, L appartient à l'union des cercles c_2 et c_3, lieu des points M vérifiant $\widehat{AMB} = 45°$ ou $\widehat{AMB} = 135°$ et leurs centres C et C' vérifient $\widehat{BCA} = \widehat{BC'A} = 90°$.



Soit [BP] un diamètre de c_2 et [BQ] de c_3. L et H sont sur la tangente en T à c_1 et les points P, L, H sont alignés avec L' et H' les analogues de L et h. On a donc qu'une tangente solution passe par P ou par Q.

Existence et algorithme de construction des solutions éventuelles. On suppose P et Q hors du disque c_1. On construit les tangentes à c_1 issues de P et Q et on obtient au maximum quatre solutions. Une tangente étant donnée, le carré associé existe, éventuellement réduit à un point . Noter que la projection de A sur (BL) est sur le cercle c_4 de diamètre [AB] et peut servir à la construction.
Sur la seconde figure où la disposition de A, B et C est différente, on a tracé les solutions liées aux tangentes issues de Q. Pour le grand carré, on voit N sur c_3 et sur la tangente et S sur c_4.
Pour chaque solution, C, K, H ou C', K', H' sont alignés.
Une voie d'étude du problème ?



139-1 *proposé par Dominique Souder*

Un calculateur prodige ?

Le public a choisi dans une liste de nombres de 10 chiffres la valeur 4,774889059. Magic'Domino a vite dit : « C'est le logarithme décimal de 59 551. ». Vérification fut faite à l'ordinateur.
En partant de 4,497744931, ce magicien trouva de tête la partie entière de son exponentielle en base 10, soit 31 459 ; puis 20 224 et 57 314 à partir de 4,305867120 et 4,758260757.
Trouverez-vous le truc du magicien mentaliste ?
Donnez le couple : (le log à inscrire dans la liste si le magicien souhaite dire comme réponse 12 358 ; l'entier de 5 chiffres que le magicien doit trouver si on lui annonce son log qui est 4,193903415).

Solution de l'auteur

Les deux chiffres de fin du log sont les deux du début de la réponse. Par effet domino, l'entier se forme selon la suite de Fibonacci : tout nombre à partir du troisième est la somme des deux précédents. Si on atteint 10, on change par la somme des chiffres, de 1 à 9.

Dans 57 314, comme 5 + 7 = 12, on remplace par 1 + 2 = 3.

Au quatrième exemple log(57 314) afficherait une fin en 19, qu'on change en 57 pour respecter l'astuce. On vérifie : la puissance de 10 d'exposant 4,758260757 donne alors 57 314,00497 (la fonction log est croissante), mais la partie entière reste 57 314.

Parfois il faut modifier les trois derniers chiffres et non deux. Ainsi pour le troisième exemple, de résultat 20 224. Le log est 4,305867057 : pour une réponse de début 20, on change 057 en 120 et non 020 qui ferait baisser la partie entière.

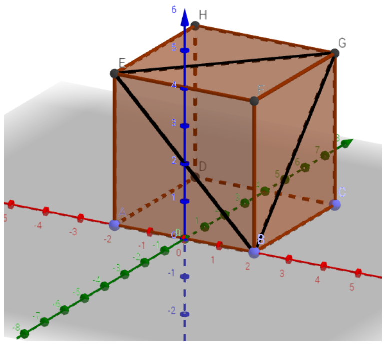
La solution est (4,091948212 ; 15 628). D'abord log(12 358) = 4,091948191. Pour une fin en 12 on remplace 191 par 212 d'où 4,091948212. Ensuite, avec 4,193903415 on calcule 1 + 5 = 6 puis 5 + 6 = 11 donc 1 + 1 = 2 et enfin 6 + 2 = 8 d'où 15 628.

139-3 *proposé par Frédéric de Ligt*

Il est connu que les sommets d'un triangle équilatéral, placé dans un repère orthonormé du plan, ne peuvent pas avoir tous des coordonnées entières. En revanche, cela peut se faire si on se place dans un repère orthonormé de l'espace (prendre par exemple trois sommets convenablement choisis d'un cube). Mais si on ajoute comme condition que les trois côtés du triangle équilatéral aient des longueurs entières, est-ce encore possible ?

Solution de l'auteur

Sans perte de généralité on peut supposer que l'un des sommets est placé à l'origine O du repère, cela va simplifier les écritures. On note B (x_1, y_1, z_1) et C(x_2, y_2, z_2) les deux autres sommets du triangle équilatéral où les coordonnées de ces deux points sont des entiers relatifs.
La longueur du côté de ce triangle est mesurée par un entier naturel non nul n. On considère le plus petit triangle équilatéral qui se plie aux contraintes imposées, donc avec une longueur n de côté la plus petite possible.



On a :

$$\underbrace{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}_{(1)} = \underbrace{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}_{(2)} = \underbrace{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}_{(3)} = n^2.$$

(1) + (2) − (3) donne $2x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2 = n^2$. On tire de cette égalité que n est pair, $n = 2n'$. Par conséquent :
$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 4n'^2$. En raisonnant modulo 4, on obtient que ces six coordonnées sont paires.
$x_1 = 2x_1'$, $y_1 = 2y_1'$, $z_1 = 2z_1'$, $x_2 = 2x_2'$, $y_2 = 2y_2'$, $z_2 = 2z_2'$. D'où la suite d'égalités :

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = x'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 = n'^2.$$

Mais cela contredit la taille minimale du triangle. Cet argument de descente infinie, permet de conclure à l'impossibilité de l'existence d'un tel triangle.

Régionale APMEP de Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : https://www.apmep.fr/La-Regionale-Poitou-Charentes
Mél. regapmep16177986@gmail.com
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication Frédéric de Ligt
Comité de rédaction Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon
Imprimerie IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Siège social Voir adresse ci-dessus
Dépôt légal Juin 2025