Régionale APMEP de Poitou - Charentes

Corol'aire

Mars 2025 n° 140

Connaissez-vous l'agentivité ?

Frédéric de Ligt

Voilà un nom à la sonorité bien laide, qui vient d'une traduction un peu facile du terme anglo-saxon *agency.* Le concept en revanche est intéressant. Suite aux annonces ministérielles sur la nécessité d'introduire un enseignement de l'IA auprès des élèves et de former en conséquence les enseignants sur son fonctionnement et son utilisation potentielle, je suis allé regarder divers documents produits pour accompagner les assises qui se tiennent en ce moment sur le sujet. Et je tombe sur ce mot dont la définition proposée, pour sa version enseignante, est la capacité de faire des choix, d'agir de manière autonome, de maîtriser l'enseignement et l'apprentissage en classe.

Divers experts mettent en garde sur l'utilisation mal réfléchie des IA génératives et adaptatives. Les IA génératives permettent d'obtenir des réponses plus ou moins pertinentes aux questions des enseignants, comme par exemple proposer des cours qui s'adaptent aux conditions préalables qui auront été posées, et pour les élèves d'obtenir les solutions à la plupart des problèmes de mathématique qui peuvent leur être soumis. Les IA adaptatives, quant à elles, pourront, à terme, permettre un parcours individualisé de progression, en s'adaptant aux difficultés de chaque élève.

Cela me renvoie à l'introduction des calculatrices au collège et au lycée il y a déjà quelques années. Afin de suivre le mouvement de la modernité, l'usage de la calculatrice a été généralisé à tous les niveaux d'enseignement. Il s'agissait pour l'élève de passer par dessus les laborieux calculs pour se concentrer sur le sens des problèmes posés. Que constate-t-on après quelques années ? Un effondrement global des capacités autonomes de calcul des élèves. Devant ce constat, que les autorités ont bien du mal à reconnaître, les injonctions qui ont suivi pour la pratique systématique de séance de calcul mental n'ont pas vraiment modifié la situation.

(Suite page 3)

Sommaire

Comité de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Mercredi 12 mars 2025 à l'IREM&S

Rallye

La passation de l'épreuve est programmée le mardi 18 mars.

La participation est en baisse cette année, ce qui peut s'expliquer en partie par l'absence des niveaux sixième et cinquième.

22 établissements se sont inscrits qui se décomposent en 11 collèges, 9 lycées, 1 lycée professionnel et 1 école pour un total de 62 classes parmi lesquelles 36 classes de seconde et 21 classes de collège. Cela représente au total 1721 élèves. Pour ce qui concerne le règlement des inscriptions, un tiers des établissements inscrits n'a pas acquitté les droits. Il est décidé qu'après relance si un établissement n'a toujours pas versé le montant de son inscription au jour de la correction, ses dossiers ne seront pas corrigés.

Les corrections débuteront fin mars. Il n'est pas prévu de cérémonie de remise des prix à l'issue du classement.

La Régionale dispose d'un budget d'environ 500 € pour les lots mais il n'a pas encore été décidé de leur choix. Il serait bien que les classes lauréates puissent se voir attribuer un trophée. Le stock des trophées en métal qui étaient distribués jusqu'à présent est désormais épuisé et non renouvelable. Une piste pour la réalisation est évoquée avec François Célérier (https://www.jeux-efce.com/).

Le nombre de lauréats par niveau sera décidé en fonction des productions reçues.

Il a ensuite été abordé le devenir du Rallye suite à la réforme de l'organisation des enseignements de mathématiques au collège. Un groupe de réflexion, constitué de Corinne Parcelier, Frédéric de Ligt, Céline Fauvinet et Thierry Bacle, va travailler à imaginer de nouvelles propositions de déroulement de l'épreuve du Rallye, de façon à pouvoir associer les niveaux sixième et cinquième sans perdre l'esprit du Rallye. Plusieurs pistes ont déjà été évoquées. Pour ne pas alourdir la tâche de ce groupe, les réunions se feront en visioconférence. Il est envisagé d'associer à ce groupe des enseignants habitués du Rallye qui seraient volontaires pour donner leurs avis et leurs idées.

Journée de la Régionale

Le lycée de Barbezieux a donné son accord pour recevoir la future Journée de la Régionale. Pour inciter les stagiaires à venir malgré la position excentrée de l'établissement dans l'académie, il peut être envisagé d'offrir des hébergements aux personnes les plus éloignées.

Le conférencier pourrait être à chercher parmi les membres de l'INRIA de Bordeaux qui n'est pas loin de Barbezieux.

Quant à la date de la Journée, ce pourrait être comme d'habitude avant les vacances d'automne ou bien fin novembre. Il faudra que l'EAFC accepte le lieu de la Journée.

Exposition

L'exposition sur les solides de l'espace est prévue pour septembre 2026. Dominique Gaud souhaiterait que davantage de personnes travaillent sur les différents pôles, et en particulier des personnes qui maîtriseraient l'impression 3D car l'Espace Mendes France va perdre deux techniciens ; un autre besoin : la préparation des défis.

Le directeur de l'IREM&S, Benoît Loisel a été contacté par un professeur d'IUT qui aimerait proposer ses créations 3D lors de l'exposition à l'EMF. Il propose aussi de vendre des solides de Platon pour 60 €. Se pose aussi la question des ateliers à proposer lors de l'exposition.

Corol'aire
Frédéric de Ligt a presque fini de déposer sur le site Publimath les articles du Corol'aire depuis le numéro 0 jusqu'au numéro 136. Ainsi tous les bulletins Corol'aire seront-ils consultables par tous et les différents articles publiés seront accessibles par mots-clés.

Lien avec le National
Thierry Bacle et Frédéric de Ligt seront présents au comité National de l'APMEP des 15 et 16 mars.

Serge Parpay a souhaité quitter le Comité de la Régionale. Tous les membres du Comité le remercient pour ces nombreuses années où il a tant donné pour transmettre sa passion.

Le prochain Comité de la Régionale se tiendra le mercredi 4 juin à 14 h 30 en visio-conférence.

(Suite de l'édito)

Le recours systématique à la calculatrice pour le moindre calcul a rendu les élèves dépendants de cet outil au point de ne plus avoir de familiarité avec les opérations élémentaires et finalement avec les nombres. Pourtant la calculatrice est si utile ! Mais son utilisation systématique en a fait un instrument qui se retourne contre ses jeunes usagers.

Je crains que ce qui se dessine avec l'introduction de l'IA prenne le même chemin. Je vois nombre de zélateurs de l'IA commencer à nous vanter ses vertus dans tous les compartiments de l'enseignement. Il y a bien sûr à intégrer cette nouveauté dans nos pratiques, mais avec une certaine prudence quand même. Je lis que l'IA adaptative va permettre une évolution du métier, en proposant par exemple des modules d'apprentissage individualisés et progressifs à l'élève, l'enseignant passant dans les rangs pour contrôler que tout se déroule bien et se concentrant sur le relationnel. D'accord pour les exercices techniques, mais guère au-delà. Il ne faudrait pas que l'IA se substitue aux tâches courantes de l'enseignant, entraînant ainsi une perte de compétences, d'expertise et d'autonomie d'action.

Pourquoi apprendre à maîtriser les opérations puisque les calculatrices le font très bien ? Pourquoi apprendre à résoudre des problèmes puisqu'un simple scan sur photomath vous donne aussitôt la solution avec toutes les étapes ? Pourquoi apprendre à écrire puisqu'il y a des traitements de texte ?

Pour paraphraser Rabelais : *technologie sans conscience n'est que ruine de l'âme*.

Assemblée Générale de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Mercredi 15 janvier 2025 au lycée de la Venise Verte à Niort

Rapport moral de l'année 2024

Adhérents

La Régionale compte 108 adhérents à jour de leur cotisation, soit une baisse de 25 adhérents par rapport à l'année 2023.

Le bureau était ainsi composé en 2024

Président :	Frédéric de Ligt.
Vice-président :	Philippe Rogeon.
Trésorier :	Jean-Marie Parnaudeau.
Trésorier adjoint :	Jacques Germain.
Secrétaire :	Thierry Bacle.

Sources de financement

Les ressources de l'association sont venues de quatre directions en 2024 :

- la partie des adhésions que nous reverse le National,
- la location des expositions,
- la vente des brochures,
- les dons et subventions.

Expositions

La Régionale dispose désormais de cinq expositions itinérantes « Comment tu comptes ? », « Courbes », « Maths et puzzles », « Maths et mesure » et « Maths et images » réalisées en partenariat avec l'Espace Mendès France de Poitiers, l'IREM&S de Poitiers et pour « Maths et puzzle » avec l'AGEE[1] Association Générale des Enseignants des Écoles et classes de Maternelles en plus. Ces expositions sont disponibles à la location pour les établissements scolaires de l'académie pour un tarif de 90 € par semaine, avec une dégressivité pour des durées supérieures. Cette année le nombre de locations a baissé, suite très certainement à la baisse des budgets des établissements. L'exposition « Maths et images » qui a fermé ses portes à l'Espace Mendes France début juillet 2024 a accueilli 4500 visiteurs, ce qui est très convenable. La version itinérante pour les établissements scolaires est disponible depuis septembre 2024. L'équipe qui réunit des membres de la Régionale, des membres de l'IREM&S de Poitiers et des universitaires, menée par Dominique Gaud et Joséphine Aubin, travaille maintenant à la future exposition sur le thème « Maths et géométrie dans l'espace ».

Journée de la Régionale

Suite aux difficultés liées à l'inscription au PAF de la Journée de la Régionale cette année, l'appui des IPR a permis quand même d'obtenir cette inscription mais en repoussant la date au 15 janvier. Elle s'est déroulée au lycée de la Venise Verte à Niort. Une partie de l'atelier débat a été l'occasion de présenter les demandes de l'association aux collègues présents. Une subvention pour financer les frais de l'association a été obtenue dans le cadre de la fête de la science.

Rallye Mathématiques de Poitou-Charentes

L'édition du Rallye s'est déroulée en mars 2024, sur le thème « Maths et sport » et a concerné les classes de CM aux classes de seconde. Walter Mesnier a présenté notre travail lors de la journée départementale de formation de la Vienne « Cultiver la curiosité

[1] Association Générale des Enseignants des Écoles et classes de Maternelles

mathématique » fin août 2024. Toutes les écoles de ce département ont reçu à la suite les informations sur le Rallye. La participation pour cette année a été en baisse. Le bilan des inscriptions : 8 classes de CM pour 185 élèves, 120 classes de collège pour 2909 élèves, 21 classes de lycée pour 632 élèves et 1 classe de lycée d'enseignement professionnel pour 22 élèves ; soit 150 classes pour 3748 élèves. La remise des prix s'est déroulée le 5 juin dans les locaux de l'université de Poitiers. Le quiz proposé en rapport avec l'exposition « Pourquoi est-on penché dans les virages ? » a été bien reçu par les élèves présents.

Corol'aire

Il continue à paraître régulièrement, à raison de quatre numéros par an. Il est envoyé en version électronique aux adhérents.

Site de la Régionale

Son responsable est Jacques Germain qui le tient régulièrement à jour. Toutes les actions de l'association y sont présentées. Le site a migré vers le site du National.

Lien avec le National

Thierry Bacle est le représentant de la Régionale au Comité National de l'APMEP et Frédéric de Ligt est membre du Comité National, suite à une candidature individuelle. Plusieurs membres du Comité de la Régionale travaillent avec le National tels Nathalie Chevalarias, Céline Fauvinet, Thierry Bacle, Frédéric de Ligt et Jean Fromentin.

Partenariats avec l'IREM&S de Poitiers

La collaboration est étroite, puisque notre siège est hébergé dans ses locaux, au département de mathématiques de l'Université de Poitiers et que la conception des expositions est l'œuvre conjointe des deux organismes.

Relations avec le Rectorat

Avec les IPR les relations sont cordiales. Ainsi nos annonces sont-elles diffusées sur le site académique et sur la liste de diffusion académique des enseignants de mathématiques. Le Rectorat nous aide dans la transmission aux établissements des documents du Rallye et les IPR ont appuyé notre demande d'insérer au PAF la Journée de la Régionale à Niort.

Perspectives 2025

Nos différentes actions en faveur du primaire peuvent être un moyen de sensibiliser les PE et les RMC[2] à notre association. Il faut aussi se présenter aux stagiaires pour leur faire connaître notre existence et leur faire découvrir nos actions.

Rallye Mathématique : il se déroulera le mardi 18 mars 2025. Le thème retenu est « Maths et pavages». Il ne concernera pas les niveaux sixième et cinquième suite à la réforme de l'organisation des classes sur ces niveaux qui est en contradiction avec l'esprit de notre Rallye.

Exposition : une convention tripartite entre l'EMF, l'IREM&S et la Régionale va peut-être enfin être signée pour cadrer le rôle de chaque partie lors de la réalisation de la prochaine exposition. Par ailleurs, une version itinérante de l'exposition « Maths et images » est désormais proposée à la location depuis septembre 2024. Le dossier pour avoir l'agrément pass-culture, qui n'a pas été accepté, va être retravaillé afin de déposer une nouvelle demande.

Le rapport financier est présenté par le trésorier de l'association, Jean-Marie Parnaudeau.
Le rapport d'activité et le bilan financier sont adoptés à l'unanimité des adhérents présents.
Le bureau est reconduit pour l'année à venir avec l'ajout de Céline Fauvinet en tant que deuxième vice-présidente de l'association.

Le président de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes,

Frédéric de Ligt

[2] Référents Mathématiques de Circonscription

Journée de la Régionale APMEP – *15/01/2025*

Une Journée particulière

Frédéric de Ligt

Après bien des rebondissements, la Journée de la Régionale a pu se dérouler au lycée de la Venise Verte à Niort, avec trois mois de retard, le 15 janvier dernier. Je ne reviens pas sur les raisons de ce retard qui a fait l'objet du dernier édito. La journée a débuté par l'assemblée générale de notre association. Il y avait trop peu de personnes présentes en raison de l'heure matinale de son déroulement. Il a été suggéré, pour la prochaine assemblée générale, de préférer une visio-conférence à laquelle tous les adhérents pourraient participer et déconnectée de la Journée de la Régionale, afin de faire participer un plus large public.

La quarantaine de stagiaires inscrits étant arrivée, la Journée a été ouverte avec un mot d'accueil du président de la Régionale et de M. Dupeyrat, IPR de mathématiques.

Mickaël Ribardière a ensuite présenté une conférence sur la création des mondes virtuels grâce à l'informatique graphique, suivie des applications possibles dans différents domaines. Le public a bien apprécié les nombreuses animations et la clarté des explications.

Le public s'est alors scindé en deux groupes. L'un, concerné par les problématiques du collège (les groupes en sixième et cinquième) et l'autre par celles du lycée (avantages et inconvénients de l'IA en cours de mathématiques).

Céline Fauvinet et Walter Mesnier ont respectivement animé ces deux ateliers-débats. Il était ensuite temps de se restaurer au self.
À la suite de quoi, les collègues se sont répartis dans les différents ateliers proposés. Il y avait une belle palette de thèmes proposés.

Pour le collège :
Les mathématiques à travers les grandeurs (Jérôme Coillot), Faire communiquer les ordinateurs entre eux au collège (Thierry Bacle), Fabjeux ou la fabrique à Jeux (Céline Fauvinet).

Pour le lycée : Qu'est-ce qu'un polyèdre (Dominique Gaud), Visite commentée de l'exposition « Maths et images » (Dominique Gaud) et MathCityMap, maths hors les murs (Corinne Parcelier).

Chacun a pu ainsi participer à deux ateliers dans l'après-midi, entrecoupés d'une pause qui laissait le loisir de découvrir les publications de l'APMEP et de l'IREM&S de Poitiers.
Après cette Journée bien remplie, chacun est reparti avec quelques idées supplémentaires pour enrichir son enseignement.
Espérons que, malgré un contexte difficile, cette Journée puisse perdurer dans son format actuel.

Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Quel avenir pour notre Rallye ?

Corinne Parcelier

Suite à la réforme du collège et à la mise en place des « groupes de besoin » en sixième et cinquième, nous n'avons pas proposé d'épreuve sur ces deux niveaux dans l'édition 2025.
Force est de constater que la participation a chuté et que cette situation n'a pas permis de créer un lien avec les classes de CM.

L'élaboration du Rallye est un travail conséquent qui a du sens s'il bénéficie à un public suffisamment large.

L'organisation du collège sera maintenue l'an prochain, c'est pourquoi nous devons réfléchir à ce que nous pourrions proposer qui pourrait s'y intégrer sans léser les élèves et en permettant aux collègues de s'investir pleinement avec leurs groupes.

À cette fin, nous souhaiterions mener une réflexion la plus large possible, avec notamment des personnes qui ont déjà expérimenté le Rallye et qui pourraient nous apporter leurs idées.

Nous allons donc organiser une réunion en visio avec les collègues volontaires afin d'échanger sur la forme que pourrait avoir un Rallye mathématique qui s'adresse à tous les élèves des niveaux $6^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ tout en respectant nos convictions.

Pour les autres niveaux ($4^{\text{ème}}$ – $3^{\text{ème}}$ – 2^{nde} professionnelle et 2^{nde} générale), nous laisserons le Rallye dans son format actuel pour l'an prochain.

Vive le Rallye !

Réception des dossiers

L'équipe du Rallye s'est réunie le mercredi 26 mars pour faire le point sur la réception des dossiers et les répartir entre les correcteurs. Deux collèges n'ont pas transmis leurs dossiers ou, du moins, leurs dossiers ne sont pas arrivés.

Il est rappelé que les dossiers des établissements qui n'auront pas réglé les droits de participation ne seront pas corrigés. Dans ce cas, un rappel sera envoyé. Le portail Chrorus Pro par lequel passent les règlements n'indique pas le nom de l'établissement sur les documents. Il faut donc contrôler d'où viennent les règlements enregistrés.

Le palmarès sera établi le mercredi 16 avril. Il sera envoyé par la suite dans les établissements ainsi que les diplômes et les flocons comme les années précédentes. Vu le nombre de classes participantes en $3^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$ et 2^{nde}, il y aura de une à trois classes lauréates par niveau en fonction de la qualité des dossiers. Les lots seront attribués en conséquence.

Rappelons qu'il n'y aura pas de remise des prix cette année, mais le bilan du Rallye sera envoyé aux coordonnateurs et le diaporama des morceaux choisis sera sur le site de notre Régionale APMEP.

Le matheux, le chien…
…chacun son jouet !!!

Dominique Gaud



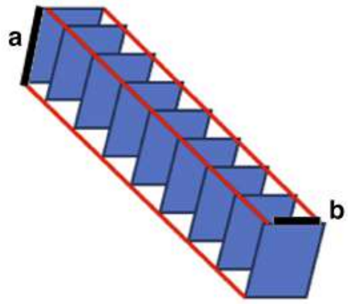

Quel est le jouet préféré du matheux ? Quel est celui préféré du chien… non nécessairement matheux[3] ?

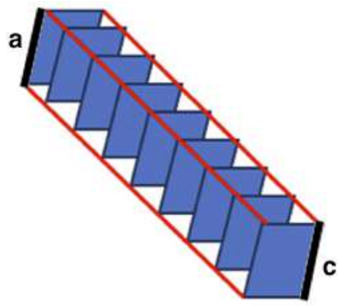
Pas de doute, le bicolore[4], attrayant et d'une texture adaptée, est celui préféré du chien. Et qu'il s'apparente (de loin) à une bande de Möbius 3D lui est complétement indifférent.

Pour le mordu des maths (pas par le chien !!) l'objet blanc est beaucoup plus intrigant. C'est un monoèdre[5], c'est-à-dire, comme son nom l'indique, un objet à une seule face. Mais le plus troublant c'est qu'il n'a qu'une arête. Pourtant n'enseigne-t-on pas qu'une arête est l'intersection de deux faces ? Le jouet canin, lui, a deux faces et deux arêtes.

La construction de ces deux objets est similaire. Prenons, en nombre, des carrés en bois de faible épaisseur que nous empilons et relions les sommets par des élastiques.

Tordons « régulièrement » le premier pour amener le côté noir **a** sur le côté noir **b**. Nous obtenons un monoèdre.
Et si on effectue la même opération en emmenant **a** sur **c**, nous obtenons le jouet canin.





Ce que je sais
c'est que je ne sais rien !

Quels objets obtiendrions-nous si nous remplaçons les carrés par des triangles équilatéraux ou par des polygones réguliers tout en effectuant les mêmes opérations de torsions ?
Socrate ne pourra pas visiter la future exposition qui ouvrira en 2026 : dommage, il aurait pu en savoir davantage !


Socrate


Un monoèdre en tickets de métro

[3] Dessin de mon copain Serge Cecconni.
[4] En vente dans les animaleries !!
[5] Logo de l'entreprise autosphère :
autosphere

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Jean-Christophe Laugier nous propose une belle étude. Voici son courrier.
« *Je me suis posé le problème suivant : dénombrer les compositions d'un bi-entier x(m, n)* $\in \mathbb{N}^2$ *non nul, c'est-à-dire des suites finies* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *de bi-entiers non nuls telles que* $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$*. J'ai mis en forme cette recherche qui pourrait intéresser les lecteurs de Corol'aire.* »

Son étude est assez longue, aussi sera-t-elle présentée dans deux bulletins du Corol'aire : celui-ci et le prochain.

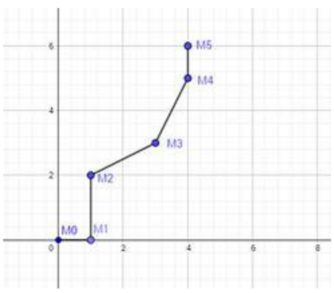
Composition d'un entier, d'un multi-entier, dénombrement de chemins

Appelons composition d'un entier naturel non nul n (à distinguer d'une partition dans laquelle l'ordre des termes n'intervient pas) toute suite finie d'entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k \geq 1$ telle que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.
De même, une composition du p-entier non nul $X \in \mathbb{N}^p$ est une suite $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de p-entiers non nuls telle que $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.
Les quatre compositions de 3 sont : $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.
Quelques compositions de 5 : $1 + 1 + 3 = 1 + 3 + 1 = 4 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.
Quelques compositions de (3, 4) : $(1, 1) + (1, 0) + (1, 3) = (1, 1) + (1, 3) + (1, 0) = (2, 0) + (1, 4)$.
Désignons par p_n le nombre de compositions de n. Il vient $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 4$. Étant donné une composition de n, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, le dernier terme n_k est l'un des nombres $1, 2, \ldots, n$.
D'où la relation $p_n = p_{n-1} + \ldots + p_1 + p_0$ en posant $p_0 = 1$. On montre alors aisément par récurrence que $p_n = 2^{n-1}$.
Pour déterminer p_n, on peut également déterminer d'abord $p_{n,k}$, nombre de compositions de n de longueur fixée k ($1 \leq k \leq n$).
Associons à une telle composition $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ le sous-ensemble $\{n_1, n_1 + n_2, \ldots, n_1 + \ldots + n_{k-1}\}$ à k-1 éléments de $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Cette correspondance est bijective.

D'où $p_{n,k} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Donc $p_n = \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} = 2^{n-1}$.

Nous allons à présent, et de deux manières différentes comme pour les compositions d'un entier, déterminer le nombre de compositions d'un p-entier X. Nous nous limiterons au cas p = 2. Soit donc $X = (n, p) \in \mathbb{N}^2$ un bi-entier non nul. On peut visualiser une composition de X.
En effet, ordonnons $\mathbb{N}^2$ par la relation d'ordre partiel $\leq$ définie par $(a, b) \leq (c, d)$ ssi $a \leq c$ et $b \leq d$ et appelons chemin à pas horizontaux, verticaux ou obliques (ou tout simplement chemin) en k étapes joignant l'origine (0, 0) au point M(n, p) toute suite de points $M_0, M_1, \ldots, M_k$ de $\mathbb{N}^2$ telle que $M_0 = (0, 0)$, $M_k = M$ avec $M_0 < \ldots < M_k$. Toute composition de $X = (n, p)$ est associée de manière bijective à un chemin joignant l'origine au point M.

Voici par exemple le chemin associé à la composition
$(4, 6) = (1, 0) + (0, 2) + (2, 1) + (1, 2) + (0, 1)$.



Désignons par X $(n,\ p)$ le nombre de compositions de $(n,\ p)$ qui est donc égal au nombre de chemins joignant l'origine (0, 0) au point $(n,\ p)$. Évidemment $X(n,\ p) = X(p,\ n)$ et $X(n,\ 0) = X(0,\ n) = 2^{n-1}$ $(n\ \geq 1)$, d'après ce qui a été établi plus haut.

D'autre part, en posant $X(0,\ 0) = 1$,

$$X(n,\ p) = \sum_{(0,0)\leq(k,i)<(n,p)} X(k,\ i) = X(n-1,p) + \sum_{(k,i)<(n-1,p)} X(k,\ i) + X(n,\ i)\ (n, p \geq 1),$$

soit $X(n,\ p) = 2X(n-1,\ p) + \sum_{i=0}^{p-1} X(n,\ i)$. (1) Posons $S(n,\ p) = \sum_{i=0}^{p} X(n,i)$.

Alors $X(n,\ p) = 2X(n-1,\ p) + S(n,\ p-1)$ et $S(n,\ p) = S(n,\ p-1) + X(n,\ p)$.

Ce système permet de dresser de proche en proche une table des $X(n, p)$. Voici par exemple la table de calcul des $X(n, p)$ pour $(n, p) \leq (4, 6)$.

6	32	256	1376	6080	23776	$X(n, p)$
	32	448	2240	9408	35392	$S(n, p)$
5	16	112	544	2208	8016	
	16	192	864	3328	11616	
4	8	48	208	768	2568	
	8	80	320	1120	3600	
3	4	20	76	252	768	
	4	32	112	352	1032	
2	2	8	26	76	208	
	2	12	36	100	264	
1	1	3	8	20	48	
	1	4	10	24	56	
0	1	1	2	4	8	
	1	1	2	4	8	
p \ *n*	0	1	2	3	4	

Suite de l'étude dans le prochain numéro …

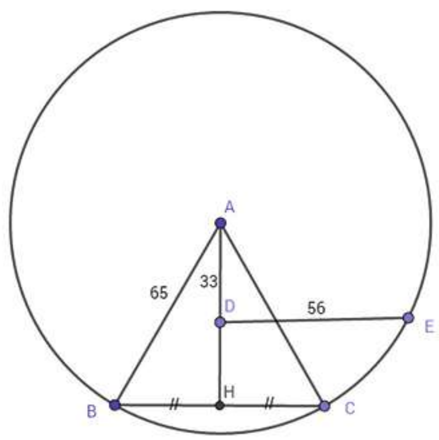
Des problèmes

140-1 *proposé par Dominique Souder (La Rochelle)*

L'animatrice du club Jeux-Maths est adepte d'une secte pythagoricienne !

Le schéma ci-contre sert à visualiser l'énigme posée par celle-ci, de caractère très entier, ce qui influence ses questions ! Le cercle de centre A, de rayon 65 mm, doit passer par les points B, C et E. De plus AD = 33 mm, DE = 56 mm et (AD) doit couper [BC] en son milieu H, avec AD < AH.

Cherchez où placer [BC] sachant qu'elle exige pour AH, et pour la distance entre deux points quelconques parmi {A, B, C, D, E} **un nombre entier** de millimètres.



140-2 *proposé par Jean-Christophe Laugier (Rochefort)*

Une erreur de ChatGPT

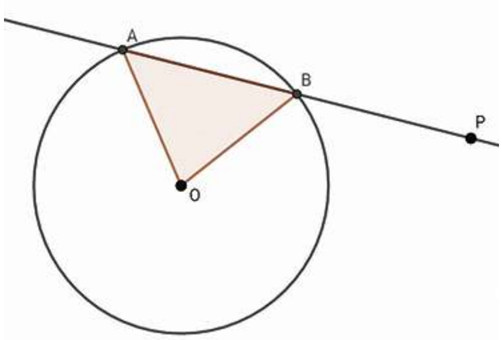
J'ai posé à chatGPT le problème suivant : Trois enfants se rendent chaque jour chez un confiseur ; celui-ci offre alors à l'un des trois enfants choisi au hasard un bonbon. Quelle est la probabilité pour qu'au bout de huit jours chaque enfant ait reçu au moins deux bonbons ?
Si le début de la solution est exposé très correctement par ChatGPT, une erreur de raisonnement est commise à la fin puisqu'il annonce que la probabilité cherchée est égale à $6/3^8$. Quelle est cette erreur ?

140-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Voici une curiosité numérique découverte par Pierre de Fermat.
Les deux équations simultanées en nombres entiers :
$2p^2 - 1 = r$ et $2q^2 - 1 = r^2$ n'admettent qu'une unique solution non triviale (i.e. différente de $r = p = q = 1$), à savoir : $r = 7$, $p = 2$, $q = 5$.

Portrait de Pierre de Fermat

140-4 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*



On coupe une circonférence par une sécante rectiligne de position indéterminée, passant par un point fixe donné dans son plan. Déterminer la position de la sécante pour laquelle le triangle qui a pour sommets les traces de cette droite sur la circonférence et le centre de cette courbe a une aire maxima.

(Bac.sciences-Dijon, 1875).

Des solutions

134-4 *proposé par Jean-Christophe Laugier*

Soit S l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ d'entiers naturels. On dit que les suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ et $y = (y_n)_{n\geq 0}$ de S sont complétement différentes si $x_n \neq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $F : S \to \mathbb{N}$ une fonction telle que $F(x) \neq F(y)$ si x et y sont des suites complétement différentes.
On suppose également que pour toute suite constante $(k, k, k, \ldots)$, on a $F((k, k, k, \ldots)) = k$.
Prouver qu'il existe un entier i tel que $F(x) = x_i$ pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in S$.

Solution de l'auteur

Vérifions d'abord que pour tout $s \in S$, F(s) est un terme de s. Sinon s et la suite constante (F(s), F(s), ...), complétement différentes, auraient la même image par F, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur F.
Démontrons à présent le lemme suivant qui permettra de conclure :
Soit s et t deux éléments de S, s étant injective et ne prenant pas la valeur $F(t)$.
Soit i l'unique indice tel que $F(s) = s_i$; alors $F(t) = t_i$.
Preuve : Supposons $F(t) \neq t_i$. Soit u la suite définie de la manière suivante : $u_i = F(t)$.
Si $k \neq i$, alors $u_k = F(s)$ si $t_k \neq F(s)$ et $u_k = F(t)$ si $t_k = F(s)$.
Par construction, la suite u ne prend que les valeurs $F(s)$ et $F(t)$ et est complétement différente de s et t. $F(u)$ doit donc être égal à $F(s)$ ou $F(t)$ d'une part, et différent de $F(s)$ et $F(t)$ d'autre part, ce qui est contradictoire.
Soit maintenant n la suite des entiers naturels : $n = (0, 1, 2, 3, \ldots)$. Posons $F(n) = i = n_i$. Soit à présent x un élément quelconque de S ; montrons que $F(x) = x_i$, ce qui achèvera la démonstration.

Considérons $u = (k, k + 1, k + 2, \ldots)$, suite des entiers à partir de k avec $k > \mathrm{Max}(\mathrm{F}(n), \mathrm{F}(x))$. u est injective, ne prend pas la valeur $\mathrm{F}(n)$, donc d'après le lemme, $\mathrm{F}(u) = u_i$. De même u ne prend pas la valeur $\mathrm{F}(x)$ donc $\mathrm{F}(x) = x_i$.

135-2 *proposé par Daniel Perrin*

Le chocolat

À Saint-Tricotin-sur Pelote (Marne-et-Garonne), le gibier se faisant de plus en plus rare, les chasseurs se distraient comme ils peuvent. Ainsi, un jour, revenant bredouille de la chasse, Vincent Glier dit à Marc Hassin en arrivant en ville :
Le produit des âges de mes trois filles est 36, leur somme est le numéro de cette maison. Quels sont les âges de mes filles ?
- Je vois que vous avez des jumelles, mais cela ne me suffit pas pour répondre.
- C'est juste, j'ajoute que ma fille aînée aime le chocolat.
- Alors je peux répondre.
Quels sont les âges des filles ?

Solution de Frédéric de Ligt

On note x, y et z les âges respectifs des trois filles. On a d'abord que $xyz = 36$. Il est dit qu'il y a deux sœurs jumelles. On réécrit le produit sous la forme $xy^2 = 36$. Comme il s'agit de trouver des nombres entiers, il y a trois décompositions possibles : $1\times6^2 = 4\times3^2 = 9\times2^2$.
Les sommes $x + 2y$ donnent $1 + 2\times6 = 9 + 2\times2 = 13$ et $4 + 2\times3 = 10$. Marc ne peut pas encore découvrir les âges des trois filles, c'est donc que cela correspond aux deux sommes identiques. Il s'agit maintenant de discriminer entre les deux triplets (1, 6, 6) et (9, 2, 2). La précision qu'il y a une aînée et donc que les deux sœurs jumelles sont plus jeunes donne la solution à Marc : l'aînée a 9 ans et les deux jumelles ont 2 ans.

138-1 *proposé aux olympiades britanniques*

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n l'expression $n2^n + 1$ donne le carré d'un entier ?

Solution de Frédéric de Ligt

Pour $n = 0$ on a $0\times2^0 + 1 = 1^2$,
pour $n = 1$ on a $1\times2^1 + 1 = 3$ qui n'est pas un nombre carré,
pour $n = 2$ on a $2\times2^2 + 1 = 3^2$,
Pour $n = 3$ on a $3\times2^3 + 1 = 5^{2,}$
Pour $n = 4$ on a $4\times2^4 + 1 = 65$ qui n'est pas un nombre carré.
On peut maintenant étudier les solutions éventuelles pour $n > 4$.

On remarque d'abord que ce carré d'entier est nécessairement un nombre impair, et donc que cet entier est lui-même impair et peut s'écrire sous la forme $2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$.
L'équation prend donc la forme $n2^n + 1 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$; ou encore $n2^{n-2} = m(m + 1)$.
Si m est impair, alors $m + 1$ est pair et donc 2^{n-2} ne peut que diviser $m + 1$, il existe alors un entier K non nul tel que $m + 1 = \mathrm{K}2^{n-2}$. L'équation s'écrit maintenant $n = \mathrm{K}m = \mathrm{K}(\mathrm{K}2^{n-2} - 1)$.
On l'inégalité $\mathrm{K}(\mathrm{K}2^{n-2} - 1) \geq 2^{n-2} - 1$. Mais $2^{n-2} - 1 > n$ pour $n > 4$, ce qui se prouve facilement par récurrence. L'entier m ne peut être impair.
Si m est pair, 2^{n-2} divise m, il existe alors un entier non nul K tel que $m = \mathrm{K}2^{n-2}$.
L'équation s'écrit $n = \mathrm{K}(m + 1) = \mathrm{K}(\mathrm{K}2^{n-2} + 1)$. On a l'inégalité $\mathrm{K}(\mathrm{K}2^{n-2} + 1) \geq 2^{n-2} + 1$.
Mais $2^{n-2} + 1 > 2^{n-2} - 1 > n$ pour $n > 4$. L'entier m ne peut pas non plus être pair.
Les seules valeurs de n pour lesquelles l'équation donne un nombre carré sont 0, 2 et 3.

139-2 *proposé par Frédéric de Ligt*

Est-ce que, pour tout entier naturel non nul, l'équation en nombres entiers naturels non nuls
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 = x_{n+1}^2$ admet toujours une solution ?

Solution de Jean-Christophe Berthonnaud

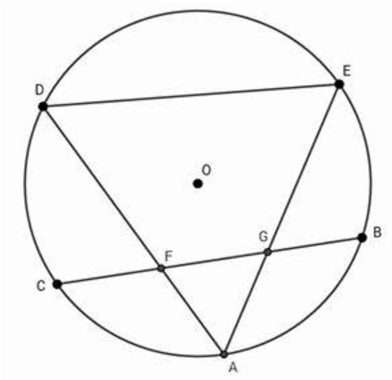
On reformule la question sous la forme suivante : Pour tout entier naturel non nul n il existe n entiers naturels non nuls x_1, x_2, ..., x_n et un entier impair y_n tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{n-1}^2 + x_n^2 = y_n^2$.
Si tel est bien le cas, il est évident qu'en doublant tous les nombres qui interviennent dans l'équation on obtiendra encore une égalité. On peut donc restreindre l'étude aux y_n impairs.
On a l'identité $y_n^2 = [(y_n^2 + 1)/2]^2 - [(y_n^2 - 1)/2]^2$. On termine avec un raisonnement par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 1$, on peut écrire $x_1^2 = 3^2 = y_1^2$.
Hérédité : Soit $n \geq 1$, on suppose qu'il existe n entiers naturels non nuls x_1, x_2, ..., x_n et un entier impair $y_n \geq 3$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{n-1}^2 + x_n^2 = y_n^2$.
On a d'une part que $(y_n^2 + 1)/2$ est un nombre impair ≥ 3 car si on écrit $y_n = 2m + 1$ avec $m \geq 1$, alors $(y_n^2 + 1)/2 = (4m^2 + 4m + 2)/2 = 2m(m + 1) + 1$.
On a d'autre part $(y_n^2 - 1)/2 \geq 1$. On pose maintenant $y_{n+1} = (y_n^2 + 1)/2$ et $x_{n+1} = (y_n^2 - 1)/2$.
Comme on a $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{n-1}^2 + x_n^2 = y_n^2 = [(y_n^2 + 1)/2]^2 - [(y_n^2 - 1)/2]^2$, on a finalement :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{n-1}^2 + x_n^2 + x_{n+1} = y_{n+1}^2$$

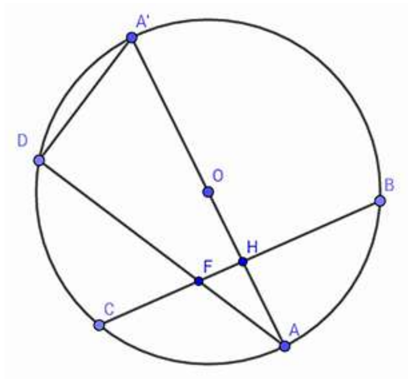
139-4 *proposé par Jacques Chayé*

Étant donné un arc BC sur une circonférence dont le centre est O, du milieu A de cet arc, on mène les deux cordes [AD] et [AE] coupant [BC] en F et G. Démontrer que l'on a FE.DG = DF.EG + FG.DE.

Solution de l'auteur



Dans un quadrilatère convexe inscriptible, la formule de Ptolémée, qui peut se démontrer à partir de la formule d'Al-Kashi, s'écrit $mn = ac + bd$, m, n, a, b, c et d représentant les longueurs des diagonales et les côtés du quadrilatère.
Pour établir la relation de l'énoncé, il nous suffit donc de démontrer que le quadrilatère FDEG, manifestement convexe, est inscriptible.
Or, l'inversion de centre A, qui transforme le cercle en la droite, nous permet d'écrire : AD × AF = AE × AG. Ce qui prouve que les quatre points sont cocycliques.



Remarque

On peut se dispenser de la notion d'inversion. Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle, et soit H l'intersection de [BC] et [AA']. Les triangles rectangles ADA' et AHF étant semblables, on a : AF/AA' = AH/AD.
Donc AD × AF = AH × AA'.
On aurait de même AE × AG = AH × AA', d'où AD × AF = AE × AG

Régionale APMEP de Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : https://www.apmep.fr/La-Regionale-Poitou-Charentes
Mél. regapmep16177986@gmail.com
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication Frédéric de Ligt
Éditeur APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon
Siège social Voir adresse ci-dessus
Imprimerie IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)
Dépôt légal Mars 2025