∽ Concours contrôleur des douanes session 2021 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

23 février 2021   Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

Une école d'ingénieurs organise la sélection de ses futurs étudiants de la manière suivante :
Après examen de leur dossier scolaire, 15 % des candidats sont admis directement;
Tous les autres candidats passent une épreuve écrite dont le taux de réussite est estimé à 60 %;
Tous les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont convoqués pour passer une épreuve orale.
Ceux qui réussissent l'épreuve orale sont alors admis.
On estime que les candidats qui passent l'épreuve orale ont une chance sur trois de réussir.
On choisit un candidat au hasard.
On considère les évènements suivants :

- D : « Le candidat est admis sur dossier »
- E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite »
- O : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale »
- A : « Le candidat est admis »

1. Établir l'arbre pondéré décrivant les différentes étapes de la sélection.
2. Calculer les probabilités $P(E)$ et $P(O)$.
3. Justifier que la probabilité que le candidat soit admis est $P(A) = 0,32$.
4. Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de ceux qui ont été admis sur dossier (résultat donné sous forme de fraction) ?

Exercice 2

Le nombre de clients potentiels du marché sur lequel sont en concurrence les sociétés SFT et Vert Télécom est supposé stable et égal à 70 millions de clients.
Au premier janvier 2010, la société SFT possède 7 millions de clients, tandis que la société Vert Télécom en détient 63 millions.
Chaque année, 20 % de la clientèle de SFT change pour Vert Télécom et de même, 20 % de la clientèle de Vert Télécom change pour SFT.
Soit u_n le nombre de clients (en millions) de la société SFT au premier janvier de l'année $2010 + n$.
On a donc $u_0 = 7$.

1. Montrer que $u_1 = 18,2$.

2. Montrer que $u_{n+1} = 0,6u_n + 14$ pour tout naturel n.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout naturel n, par $v_n = u_n - 35$.
La suite (v_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?
onner sa raison et son premier terme.

4. Exprimer u_n en fonction de n pour tout naturel n.

5. Déterminer la limite de u_n en $+\infty$ et conclure.

Exercice 3

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \mathrm{e}^x \\ g(x) & = & 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \end{array}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2.$$

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.
En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

e. En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative des courbes $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 4

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fraction, sauf pour la question 4

On dispose de deux urnes et d'un dé tétraédrique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
L'urne U_1 contient deux boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient une boule rouge et deux boules noires.

Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire »

1. Établir l'arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.

2. Calculer la probabilité $P(B)$.

3. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.

4. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire.

Une personne joue quatre parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

Calculer la probabilité de gagner au moins une partie.

On notera que $\left(\dfrac{5}{12}\right)^4 \approx 0,03$.

Exercice 5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(1\,;0\,;2),\qquad \text{B}(1\,;1\,;4)\quad\text{et}\quad \text{C}(-1\,;\,1\,;\,1).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3\,;\,4\,;\,-2)$.

Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).