# ∽ Concours contrôleur des douanes session 2016 ∾

# Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

21 mars 2016    Durée : 3 heures

**OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques**

**Remarque préliminaire :**
**Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.**

## Exercice 1

1. Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

   **a.** Calculez $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
   On exprimera chacun de ces termes sous forme de fraction irréductible.

   **b.** Comparez les quatre premiers termes de la suite $(u_n)$ aux quatre premiers termes de la suite $(w_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$.

   **c.** À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrez que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = w_n$.

2. Soit $(v_n)$ la suite de terme général $v_n$ définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   **a.** Montrez que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   **b.** Soit $S_n$ la somme définie pour tout entier naturel non nul $n$ par : $S_n = \displaystyle\sum_1^n v_n$.

      i. Exprimez $S_n$ en fonction de $n$.
      ii. Déterminez la limite de $S_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Soit $(P)$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(D)$ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & -t+2 \end{array}\right. ,$$

où $t$ désigne un nombre réel.

1. **a.** Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(P)$ ? Justifiez votre réponse.

   **b.** Démontrez que la droite $(D)$ est incluse dans le plan $(P)$.

2. Soit $(Q)$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(D)$.

   **a.** Déterminez une équation cartésienne du plan $(Q)$.

**b.** Calculez les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(Q)$ et de la droite $(D)$.

**c.** Montrez que $\text{CI} = \sqrt{3}$.

## Exercice 3

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

et la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Étudiez les variations de $g$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   **b.** Déduisez-en le signe de $g$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Déterminez la limite en 0 de $f$.

   **b.** Déterminez la limite en $+\infty$ de $f$ puis montrez que la droite $(D)$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

   **c.** Soit $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.
   Calculez $f'(x)$ pour tout réel de $]0\,;\,+\infty[$.

   **d.** Déduisez-en le sens de variation de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$, puis vous dresserez le tableau de variations de la fonction $f$.

   **e.** Déterminez le point A de la courbe $(\mathscr{C})$ en lequel la tangente $(T)$ est parallèle à la droite $(D)$.

## Exercice 4

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

   **a.** Vérifiez que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.

   **b.** Calculez l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.

   **c.** Calculez la probabilité de l'évènement suivant :
   $A$ : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

2. On effectue deux tirages consécutifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   *Si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne,*
   *si elle est verte, on ne la remet pas.*

   **a.** En utilisant un arbre pondéré, calculez la probabilité des évènements suivants :
   $B$ : « seule la première boule tirée est verte » ;
   $C$ : « une seule des deux boules tirées est verte ».

   **b.** Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?