



L'émergence du calcul différentiel et intégral

12 Octobre 2011

André BONNET

A.P.M.E.P.

Université de Provence

La dérivée dans le programme de première S

L'acquisition du concept de dérivée est un point fondamental du programme de première.

Dérivation

Nombre dérivé d'une fonction en un point.

Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand

h tend vers 0.

On ne donne pas de définition formelle de la limite.

L'intégrale dans le programme de terminale S

Intégration

Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)dx$ comme *aire sous la courbe*.

On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement.

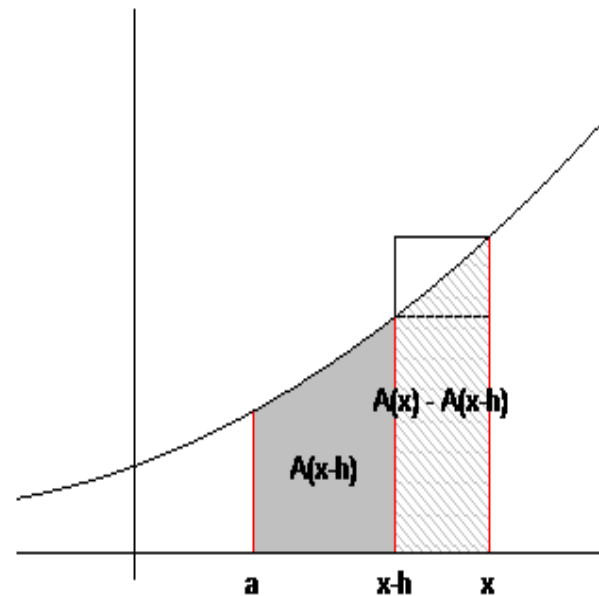
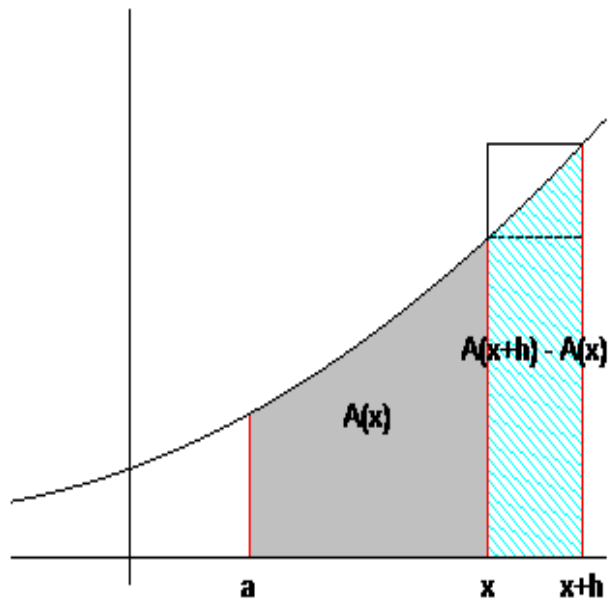
Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.

Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.

Lien entre l'aire sous la courbe $y = f(x)$ et la dérivée de f

si f est croissante et continue, à l'aide des deux figures ci-dessous (où $h > 0$), on peut montrer que :

$A(x)$ est dérivable et que $A'(x) = f(x)$.



*Démonstration de la dérivabilité de A
(pour f croissante et continue)*

De $h > 0$ et f croissante, on tire :

$$h f(x) \leq A(x+h) - A(x) \leq h f(x+h)$$

puis :

$$f(x) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x+h)$$

et grâce à la continuité de f on a :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \left(\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \right) = f(x)$$

Conclusion : A est dérivable à droite et la valeur de la dérivée à droite de A au point x est $f(x)$.

Pour la dérivabilité à gauche :

de $h > 0$ et f croissante, on tire :

$$h f(x - h) \leq A(x) - A(x - h) \leq h f(x)$$

puis :

$$f(x - h) \leq \frac{A(x) - A(x - h)}{h} \leq f(x)$$

et enfin :

$$f(x - h) \leq \frac{A(x - h) - A(x)}{-h} \leq f(x)$$

et grâce à la continuité de f on a :

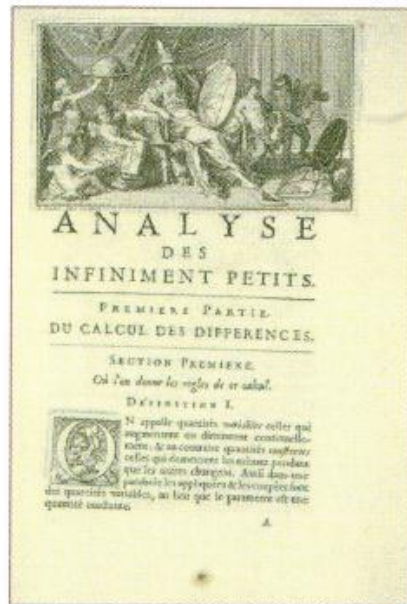
$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \left(\frac{A(x - h) - A(x)}{-h} \right) = f(x)$$

Conclusion : A est dérivable à gauche et la valeur de la dérivée à gauche

de A au point x est $f(x)$.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

1700



1682 Dans un assez court article de la revue savante, *Acta Eruditorum* publiée à Leipzig, **Wilhelm Gottfried Leibniz** donne les règles du calcul différentiel, comme la différentielle d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions. Suivent dans la même revue et sur plusieurs années différents articles de Leibniz, qui lient le calcul différentiel et le calcul intégral, considéré comme le calcul inverse des tangentes. Il utilisait la notation omn en 1675, et la remplace par l'écriture $\int$, un grand S pour la première lettre de *summa*, « somme » en latin.

Le marquis **Guillaume de l'Hospital** publie à Paris, et sous les auspices de l'Académie des sciences, *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. C'est le premier traité didactique sur le calcul différentiel.

1650

1660-1670 Dans ses *Lectiones geometricæ*, publiées en 1670, **Isaac Barrow**, relie l'aire sous une courbe algébrique à la primitive de la fonction, comme **James Gregory** dans sa *Geometriae pars universalis* publiée à Venise en 1667. Mais dans des manuscrits remontant à 1666, **Isaac Newton** se débarrasse du caractère algébrique de la courbe. *La Méthode des fluxions et des séries infinies* ne verra le jour en librairie dans une version anglaise qu'en 1736, et en traduction française, effectuée par le naturaliste Buffon seulement quatre ans plus tard.



Newton

1659 **Blaise Pascal**, dans son *Traité des sinus du quart du cercle*, donnant aux indivisibles la forme dite des sommes de Riemann, obtient ce que l'on interprète comme la formule d'intégration par parties.

dite des sommes de Riemann, obtient ce que l'on interprète comme la formule d'intégration par parties.

1600

1647 Publication à Anvdans de l'*Opus geometricum* du jésuite **Grégoire de Saint-Vincent**, qui obtient par la méthode d'exhaustion le logarithme comme primitive de la fonction $\frac{1}{x}$.

1637 René Descartes, dans sa *Géométrie* publiée avec le *Discours de la méthode à Leyde*, sans infiniment petits, fournit un moyen pour trouver la tangente à toute courbe exprimée par une équation algébrique. **Pierre de Fermat** donne une méthode utilisant des minima et des maxima. Elle sera publiée à Toulouse, après sa mort, par son fils en 1679.

1635 Dans une *Géométrie des indivisibles* publiée en latin à Bologne, le jésuite **Cavalieri** propose une manière d'additionner des familles de droites, « toutes les ordonnées » sous une courbe, afin d'en obtenir l'aire, et fournit douze ans plus tard l'intégrale définie des fonctions puissances entières.

1000



XVI^e siècle Dans une *Statique* publiée en 1586 à Leyde, **Simon Stevin** reprend la méthode d'exhaustion pour le calcul des centres de gravité, comme le fait aussi **Luca Valerio** dans son *De Centro gravitatis* publié à Rome en 1604.

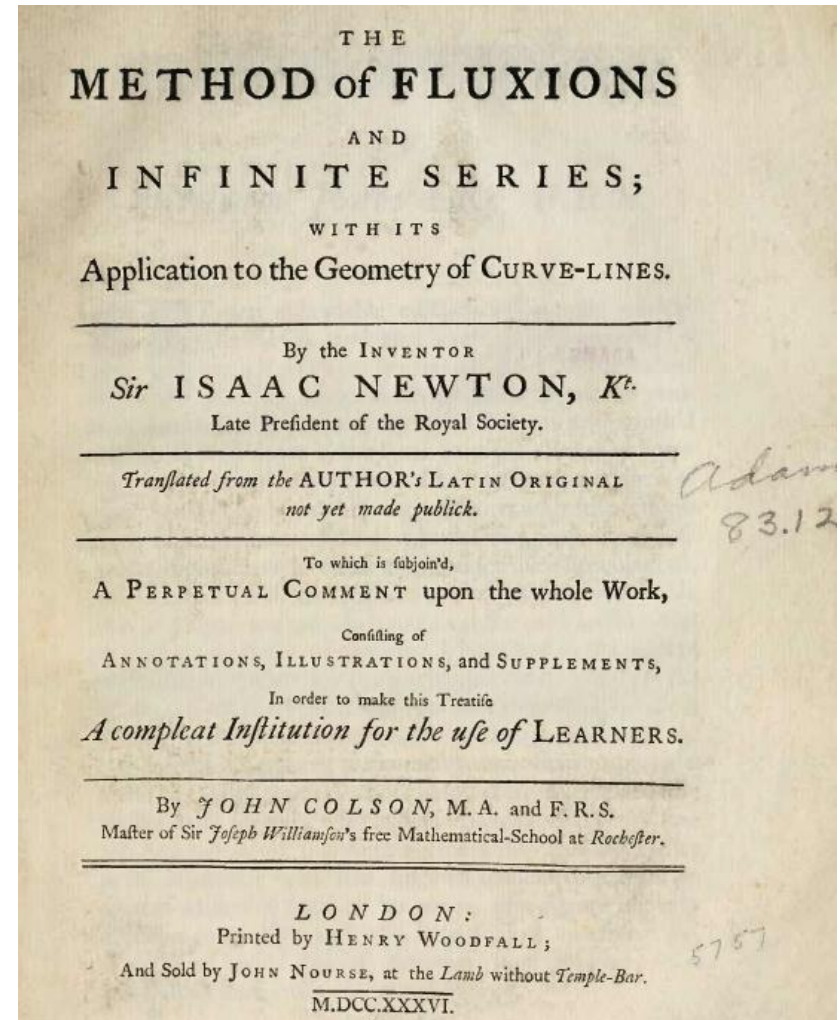
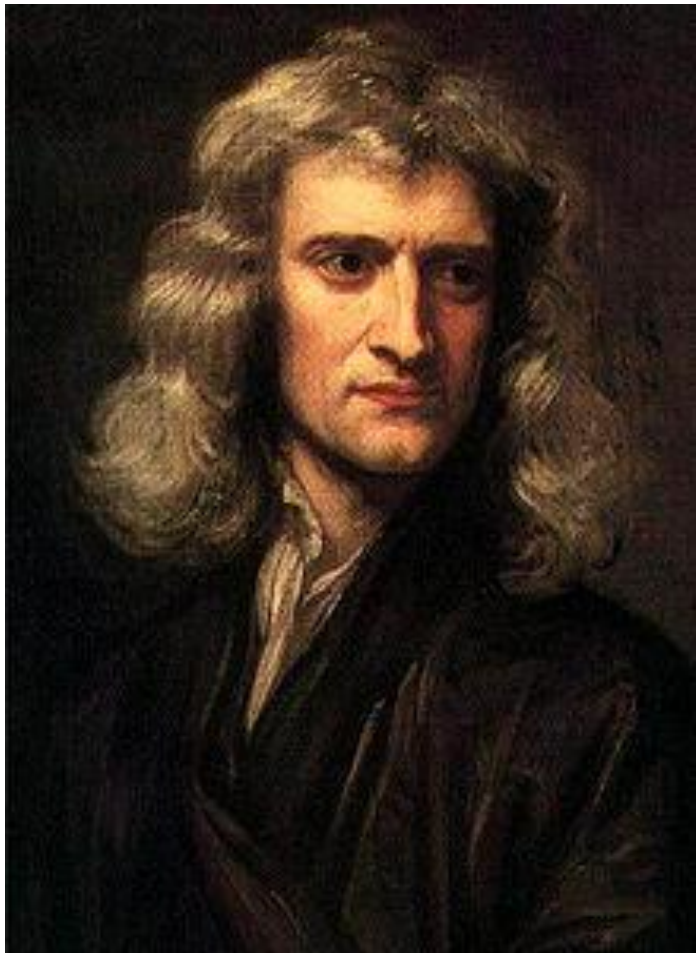
X^e et XI^e siècles Les mathématiciens arabes al-Karajī et al-Samaw'al étendent les calculs d'Archimède sur les suites pour obtenir des intégrales.

Vers 300 avant J.-C. Au livre XII des *Éléments* d'Euclide est expliquée la méthode d'exhaustion. Elle permet de calculer l'aire d'un cercle et le volume délimité par une sphère. Dans des textes comme la *Mesure du cercle*, ou la *Quadrature de la parabole*, **Archimède** montre comment la méthode d'exhaustion peut faire usage des suites. C'est le premier lien rigoureusement établi entre des calculs numériques par récurrence et le calcul intégral en formation.

-500

e

Newton (1643 – 1727) – La méthode des fluxions et des suites infinies - 1736



Traduction en français par M. de Buffon,
intendant du jardin du Roy, parue en 1740



LA
METHODE
DES
FLUXIONS.
ET DES SUITES INFINIES.

Par M. le Chevalier NEWTON.

*Traduit en françois par m^r de Buffon intendant du jardin
du Roy.*

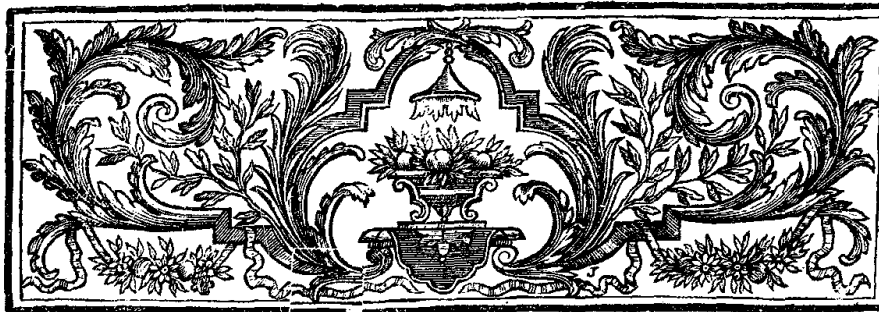


A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint
Paul.

5.

M. DCC XL.

Portrait de Buffon par [François-Hubert Drouais](#)



P R E F A C E.



L'OUVRAGE dont on donne ici la Traduction, a été commencé en 1664. & achevé en 1671 : * Newton encore peu connu dans ce tems vouloit le faire imprimer à la suite d'une introduction à l'Algebre d'un certain Kinckhuyfen, qu'il avoit corrigée & augmentée ; on ne voit pas pourquoi ce Livre ne fut pas imprimé : on voit seulement que dans la même année Newton changea d'avis, & prit le dessein de le publier avec son Optique dont il avoit déjà composé la plus grande partie : mais les objections & les chicanes qu'on lui fit sur ses principes & sur ses expériences d'Optique, le chagrinèrent & l'empêcherent de donner au Pu-

* Voyez le Com. Epistolicum. pag. 101, 102, &c. Newtoni Princip. 3^a. Ed. pag. 246.

blic ces deux Ouvrages. Voici ce qu'il en dit lui-même : *Et suborta statim (per diversorum Epistolas objectionibus refertas) crebra interpellationes me prorsus à concilio deterruerunt & effecerunt ut me arguerem imprudentia quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam rem prorsus substantialem.* Il semble même qu'il ait entièrement oublié son Ouvrage jusqu'en 1704. qu'il en a tiré son Traité des Quadratures. Plusieurs années après M. Pemberton * obtint son consentement pour faire imprimer l'Ouvrage entier, on ne sçait encore pourquoi cela a manqué ; enfin l'Auteur est mort avant que le Livre ait paru, & encore il n'a paru que traduit. Newton la composé en latin, M. Colson entre les mains de qui le Manuscrit a été remis, n'a pas voulu le donner en original ; il l'a traduit, & en 1736. il l'a fait imprimer en Anglois, afin, dit-il, que les Anglois ses compatriotes pussent jouir des travaux du Grand Newton avant les autres Nations. Il ajoute une raison qui me paroît meilleure & plus naturelle ; c'est qu'il avoit envie de joindre un Commentaire & des Notes de sa main, ces Notes sont en Anglois, & apparemment il a voulu éviter la peine de les mettre en Latin.

Quoiqu'il en soit, c'est sur cette version Angloise que j'ai fait ma traduction ; elle n'en sera pas plus mauvaise pour cela ; car j'ai suivi en tout l'esprit de l'Auteur, encore plus que le sens littéral ; dans des

* Voyez A View of Sir Isaac Newton's Philosophy.

Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences, du 23. Décembre 1738.

MESSIEURS de Maupertuis & Clairaut qui avoient été nommés pour examiner la Traduction d'un Traité Anglois de M. Newton sur *la Méthode des Fluxions*, par M. DE BUFFON, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet excellent Ouvrage méritoit un Traducteur aussi intelligent; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris ce 21. Mai 1740.

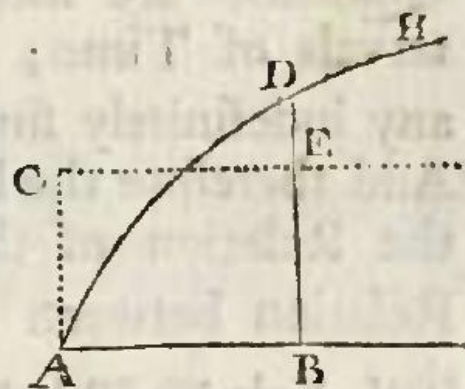
FONTENELLE, Sec. perp. de l'Ac. Roy. des Sc.

P R I V I L E G E D U R O Y.

LOUIS par la grace de Dieu Roi de France & de Navarre: A nos amez & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand'Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers, qu'il appartiendra, SALUT. Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il Nous a plu lui donner par un Règlement nouveau de nouvelles marques de notre affection, Elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences, qui font l'objet de ses exercices; en sorte qu'outre les Ouvrages qu'Elle a déjà donné au Public, Elle se

Preparation for EXAMPLE 5.

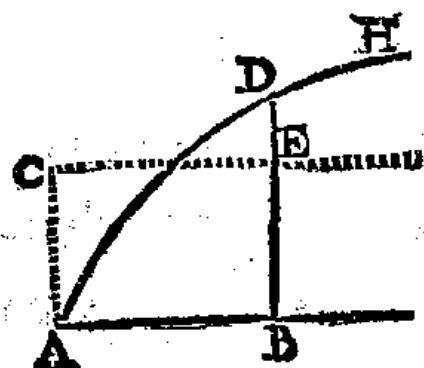
10. Suppose BD to be an Ordinate at right Angles to AB , and that ADH be any Curve, which is defined by the Relation between AB and BD exhibited by an Equation. Let AB be called x , and the Area of the Curve ADB , apply'd to Unity, be call'd z . Then erect the Perpendicular AC equal to Unity, and thro' C draw CE parallel to AB , and meeting BD in E . Then conceiving these two Superficies ADB and $ACEB$ to be generated by the Motion of the right Line BED ; it is manifest that their Fluxions, (that is, the Fluxions of the Quantities $1 \times z$, and $1 \times x$, or of the Quantities z and x ,) are to each other as the generating Lines BD and BE . Therefore $\dot{z} : \dot{x} :: BD : BE$ or 1 , and therefore $\dot{z} = \dot{x} \times BD$.



11. And hence it is, that z may be involved in any Equation, expressing the Relation between x and any other flowing Quantity y ; and yet the Relation of the Fluxions $\dot{x}$ and $\dot{y}$ may however be discover'd,

Préparation pour l'Exemple V.

X. Je suppose que BD soit une Ordonnée élevée à Angles droits sur AB, & que ADH soit une Courbe quelconque déterminée par la Relation de AB à BD exprimée par une Equation. Appellons x la Ligne AB, & z l'Aire de la Courbe ADB multipliée par l'unité. Ensuite élevons la Perpendiculaire AC égale à l'unité, & par le point C tirons CE parallèle à AB, & qui rencontre BD en E; enfin concevons que ces deux Surfaces ADB & ACEB sont produites par le mouvement de la Ligne droite BED, il est évident que leurs Fluxions (c'est-à-dire les Fluxions des Quantités $1 \times z$, & $1 \times x$, ou des Quantités z & x) sont entre elles comme les Lignes AD, BE, qui les ont produites. Ainsi $z : x :: BD : BE = 1$, donc $z = x \cdot BD$.



XI. z Peut donc se trouver dans une Equation quelconque, qui exprime la Relation entre x & une autre Quantité Fluente quelconque y , & cependant on ne laissera pas de trouver la Relation des Fluxions x & y .

XII. Ex.

La notion de fluentes et de fluxions chez Newton

Pour Newton les grandeurs évoluent avec le temps;
ce sont les fluentes, il les notes $x, y, z, \dots$
et les vitesses des fluentes sont les fluxions,
elles sont notées $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots$

Problèmes :

"étant donné les quantités fluentes, retrouver la relation entre leurs fluxions".

Par exemple : si les fluentes sont liées par la relation : $y = x^n$

La méthode des fluxions appliquée à $y = x^n$

Soit τ un intervalle de temps infiniment petit,

$\dot{x} \cdot \tau$ et $\dot{y} \cdot \tau$ sont les accroissements infiniment petits de x et y .

En remplaçant x et y par $x + \dot{x} \cdot \tau$ et $y + \dot{y} \cdot \tau$ dans $y = x^n$ on a :

$$y + \dot{y} \cdot \tau = (x + \dot{x} \cdot \tau)^n$$

puis en développant par la formule du binôme (qu'il a lui-même démontrée)

$$y + \dot{y} \cdot \tau = x^n + n\tau \cdot x^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}\tau^2\dot{x}^2x^{n-2} + \dots$$

en retranchant $y = x^n$ et en divisant par τ

$$\dot{y} = n x^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}\tau\dot{x}^2x^{n-2} + \dots$$

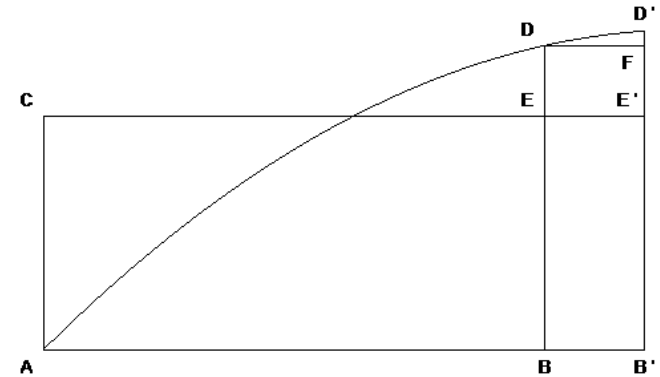
Enfin en négligeant les termes contenant τ on a :

$$\dot{y} = n x^{n-1}\dot{x}$$

La méthode des fluxions appliquée à l'aire sous la courbe

Soit τ un intervalle de temps infiniment petit,
 $\dot{x} \cdot \tau$ et $\dot{z} \cdot \tau$ accroissements infiniment petits de x et z ,
 $x = AB$ et z est l'aire sous la courbe ABD .

On peut donc écrire : $z + \dot{z} \tau = z + BD \dot{x} \tau + DFD'$



en désignant par DFD' l'aire du triangle curviligne de sommet D , D' (point de la courbe infiniment près de D) et F (point d'intersection de la parallèle à AB passant par D et de la parallèle à BD passant par D').

En désignant par y la fluente BD (ce que Newton ne fait pas dans ce passage mais utilise ailleurs, notamment dans l'exemple 5) puis en négligeant le terme DFD' qui est, évidemment, majoré par $\dot{x}\tau \times \dot{y}\tau$ on obtient le résultat cherché : $\dot{z} = BD \dot{x}$.

Les courbes dans l'antiquité et au 17^{ème} siècle

- Les textes géométriques anciens comportent l'étude de certaines courbes, comme le cercle par Euclide, les coniques par Apollonius, la spirale par Archimède. Il s'agit d'étudier les propriétés des tangentes ou d'obtenir la quadrature d'une portion de ces courbes...
- Au 17^{ème} siècle apparaissent l'étude de la cycloïde par Roberval et la détermination de la chaînette par Leibniz.
- On passe progressivement à une théorie générale des courbes exprimables par une équation, comme le propose Descartes dans « La Géométrie » en 1637.
- Toutefois, Descartes exclut de son étude les courbes qui sont obtenues par des mouvements, courbes qu'il nomme "courbes mécaniques" et qui lui font horreur.

Descartes : « Quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en géométrie » dans La Géométrie 1637

LIVRE SECOND.

315

L A
G E O M E T R I E.
LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

LES anciens ont fort bien remarqué , qu'entre les Problèmes de Geometrie, les vns sont plans , les autres solides, & les autres lineaires, c'est a dire, que les vns peuvent estre construits , en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuvent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique ; ni enfin les autres , qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'estonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué diuers degres entre ces lignes plus composées , & ie ne sçauois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plustost que Geometriques. Car de dire que ç'ait

Quelles
sont les
lignes
courbes
qu'on
peut re-
cevoir en
Geome-
trie.

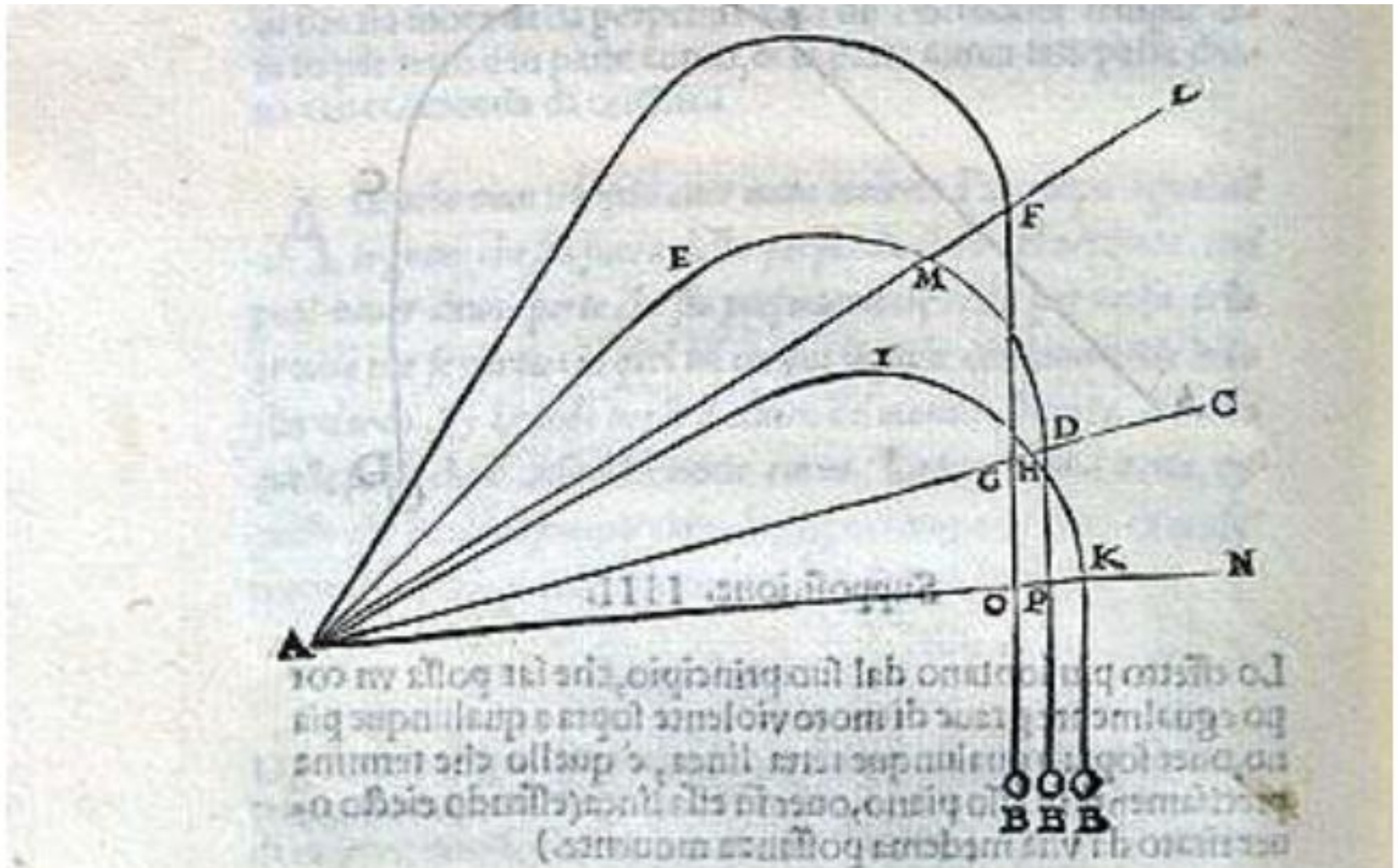
Descartes : "Quelles sont les lignes courbes qu'on peut recevoir en géométrie", dans La Géométrie 1637

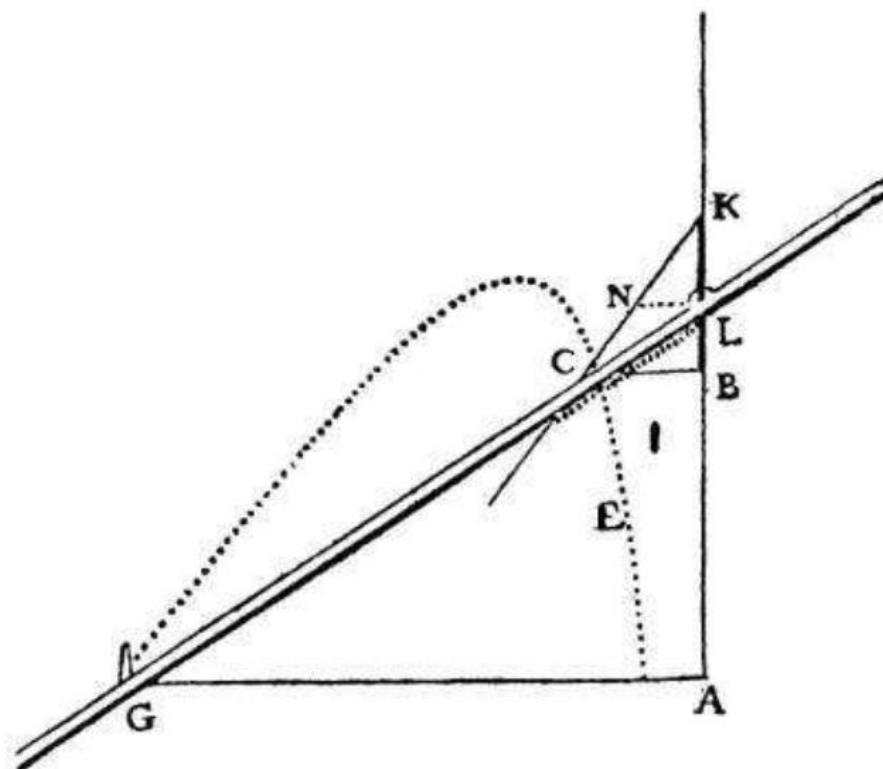
Les Anciens ont fort bien remarqués qu'entre les problèmes de géométrie, les uns sont plans, les autres solides et les autres linéaires, c'est-à-dire que les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles ; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique ; ni enfin les autres, qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée.

Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurais comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques.

Car de dire que ç'ait été à cause qu'il est besoin de se servir de quelque machine pour les décrire, il faudrait rejeter par même raison les cercles et les lignes droites, vu qu'on ne les décrit sur le papier qu'avec un compas et une règle, qu'on peut aussi nommer des machines.

La trajectoire d'un projectile selon Tartaglia (1499 - 1557)
dans une édition de 1606





reigle GL , & du plan rectiligne $C N K L$, dont le costé KN est indefiniement prolongé vers C , & qui estant meu sur le plan de dessous en ligne droite, c'est a dire en

multipliant la seconde par la troisieme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$,
 qui est esgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui se produit en multi-
 pliant la premiere par la derniere. & ainsi l'equation qu'il
 falloit trouver est .

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoist que la ligne EC est du premier
 genre , comme en effect elle n'est autre qu'une Hy-
 perbole.

Descartes conclut que la courbe est une hyperbole
 d'équation :

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

Le logarithme et le sinus au XVII^e siècle

The definition of a logarithm is very different from that now so familiar.
In the first place Napier speaks always of the logarithm of a sine, not of a number.

It is to be remembered that in his day, and for long after, the sine was a line, not a ratio, and the whole sine meant the radius of the circle whose half-chords were the sine.

In the second place he makes use of two moving points to define a logarithm.

Les tables de logarithmes de Neper

Gr.							
min	Sinus	Logarithmi	Differentia	Logarithmi	Sinus		
0	0	Infinitum	Infinitum	0	100000000	60	
1	2909	81425681	81425680	1	100000000	59	
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58	
3	8727	70439560	70439560	4	9999998	57	
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56	
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55	
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54	
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53	
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52	

Deux définitions données par Neper
dans "Mirifici logarithmorum canonis descriptio"
(extrait de la traduction anglaise de 1616)

Def. 5. & postulate.

*When some motion can be given that is either slower or faster,
by necessity it follows that for any motion, some other motion can be given at the
same speed (that we define to be neither slower nor faster).*

Def. 6.

*Hence the Logarithm of any sine is the number that very nearly defines the line that
has increased equally, in the same time that the line for the sine of the whole has
decreased proportionally into that sine, and with both motions understood to be
synchronous, and starting with the same speeds.*

Neper et les nombres décimaux

(extrait de la traduction anglaise de "Mirifici logarithmorum canonis descriptio" de 1616)

In numbers distinguished thus by a period in their midst, whatever is written after the period is a fraction, the denominator of which is unity with as many cyphers after it as there are figures after the period.

Thus 10000000.04 is the same as $10000000 \frac{4}{100}$;

also 25.803 is the same as $25 \frac{803}{1000}$

Leibniz (1646 – 1716) - Acta Eruditorum - 1691



ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXI
publicata,
ac
POTENTISSIMO SERENISSIMO-
QUE PRINCIPI AC DOMINO
DN. JOHANNI
GEORGIO IV
S. R. IMPERII ARCHIMARE-
SCALLO & ELECTORI
&c. &c. &c.
DICATA.
*Cum S. Caesarea Majestatis Et Potentissimi Ele-
ctoris Saxoniae Privilegio,*
LIPSIÆ,
Prostant apud J. GROSSII HEREDES & J. F. GLEDITSCHUM,
Excudit typis CHRISTOPHORI GUNTHERI.
Anno M DC XCII.

Leibniz et la notation différentielle

Leibniz est avant tout un philosophe, qui ne découvre les dernières avancées en mathématiques qu'en 1672, lors d'un séjour à Paris, où il rencontre Huygens .

Il lit, avec avidité, les œuvres de Descartes, Pascal, Wallis et bien d'autres.

Il fait le lien entre le problème des tangentes et celui des quadratures, en remarquant que la tangente dépend du rapport des différences des ordonnées et des abscisses , tandis que la quadrature est la somme des ordonnées.

Il émet l'hypothèse philosophique que l'univers est constitué d'infiniment petits dont nous ne percevons que la somme.

Il invente la notation dx , dy et, utilisant un symbole de sommation ayant la forme d'un "S" étiré, conclut : $\int dy = y$.

Il développera une algèbre des infiniment petits en calculant :

$$d(x + y), \quad d(x \cdot y), \quad d(x^n), \quad d\left(\frac{x}{y}\right)$$

Leibniz et le calcul de la dérivée de x^2

Faisant l'analogie avec la géométrie, Leibniz explique que le dx est à x ce que le point est à la droite.

Les valeurs différentielles ne sont pas de vraies valeurs, mais par contre leur rapport a un sens.

Par exemple, dans la recherche de la tangente à la courbe d'équation $y = x^2$, il procède ainsi :

$$dy = (x + dx)^2 - x^2 = 2 x dx + (dx)^2$$

il s'autorise la division par dx pour obtenir :

$$\frac{dy}{dx} = 2 x + dx$$

et, en négligeant dx trouve :

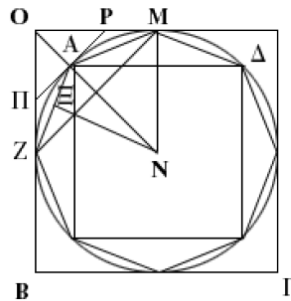
$$\frac{dy}{dx} = 2 x$$

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Que le cercle $AB\Gamma\Delta$ soit tel qu'on le suppose par rapport au triangle E ; je dis qu'il lui est équivalent.

En effet, que le cercle soit plus grand, s'il se peut. Inscrivons-lui le carré AT , divisons les arcs en deux parties égales, et que les segments soient finalement moindres que l'excédent du cercle sur le triangle. Dès lors, la figure rectiligne est plus grande encore que le triangle. Prenons le centre N et menons la perpendiculaire $N\theta$; dès lors, $N\theta$ est plus petit que le côté du triangle. Or, le périmètre de la figure rectiligne est aussi plus petit que le côté restant, puisqu'il est plus petit que la circonférence du cercle; par conséquent, la figure rectiligne est plus petite que le triangle; ce qui est absurde.

D'autre part, que le cercle soit, s'il se peut, plus petit que le triangle E ; circonscrivons-lui un carré, divisons les arcs en deux parties égales et menons les tangentes aux points. Dès lors, l'angle sous OA , AP est droit; par conséquent, OP est plus grand que MP ; car MP est égal à PA , et le triangle POI est donc aussi plus grand que la moitié de la figure $OZAM$. Il reste un ensemble de segments, pareils au segments IZA , qui est moindre que l'excédent du triangle E sur le cercle $AB\Gamma\Delta$.



En conséquence, la figure rectiligne circonscrite est plus petite encore que le triangle E ; ce qui est absurde, car elle est plus grande, parce que NA est égal à la hauteur du triangle. Dès lors, le cercle équivaut au triangle E .

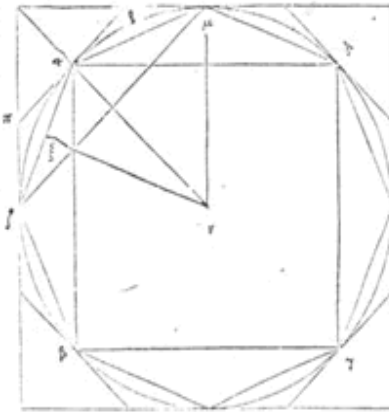
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

Archimède : de la mesure du cercle.

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥ
ΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.



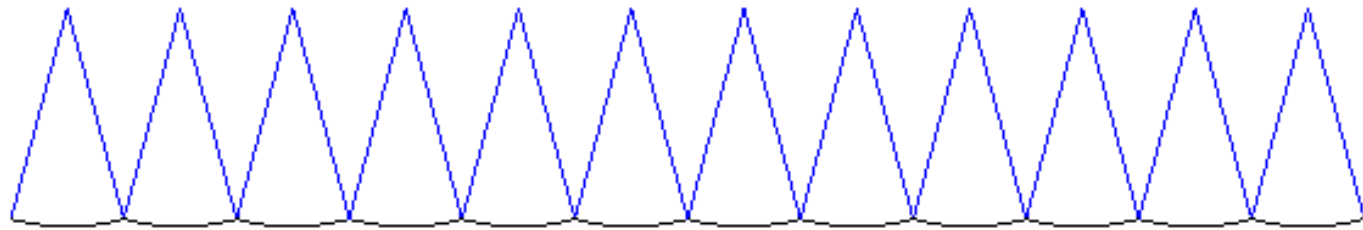
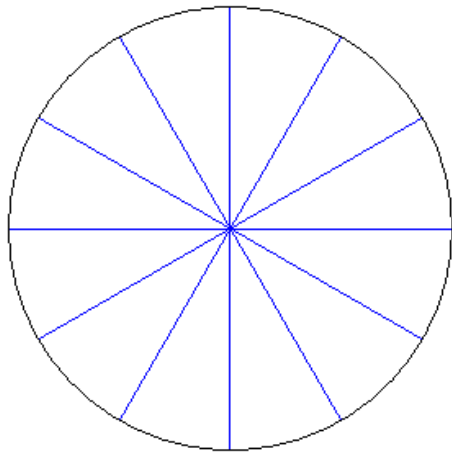
Ας κύκλ' ισ' θ' δὲ τριγώνω ὀρθογωνίῳ, ὃ ἢ μὲν ἐκ ἑλίου
 τρου ἰσημία τ' ποδὶ τῶν ὀρθῶν, ἢ δὲ περιμέτρ' τῇ βάσει.
 ἔχεται ὁ α β γ δ κύκλ', ὡς ὑποκατ' ἄλγος ὅτι ἴσος δὲ τῷ
 τριγώνῳ τῷ ε. αἱ γὰρ διωκταὶ, ἴσω μέζων ὁ κύκλ', καὶ
 γιγνῶσθω τὸ α γ περὶ τριγώνου, καὶ πετμῶδωσαν αἱ
 ποδαφοῖσαι διχα. καὶ ἴσω τὰ τεμνύματα ἢ δὲ ἑλαιοσυνα τ'
 ὑποροχῆς, ἢ ὑπὲρ τοῦ κύκλ' τ' τριγώνου. τὸ δὲ ὑνύγραμμον ἀρεῖ π' τ' τριγώ-
 νου δὲ μέζων. εὐλαφῶς ἐν τριγώνῳ τῷ ε, καὶ λαβήτος ἢ ν β. ἑλαιοσυν ἀρεῖ ἢ ν β ρ
 τ' τριγώνου πλὴν ὅς. ἴσι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τ' δὲ ὑνύγραμμος ρ λ λυμπῆς ἑλαιοτ-
 τωρ. ἐπ' α' ρ λ τ' κύκλου ποδαμείτρος. ἑλατῆον ἀρεῖ τὸ δὲ ὑνύγραμμον τ' τ' τριγώνου,
 ὅπερ ἄρπον. ἴσω δὲ ὁ κύκλ', αἱ διωκταὶ, ἑλατῆον τ' τ' τριγώνου. καὶ ποδα-
 γιγνῶσθω τὸ περὶ τριγώνου, καὶ πετμῶδωσαν αἱ ποδαφοῖσαι διχα. καὶ ἔχ-
 θω ταμ' ἐφαπτήμεναι ὅς τ' ἦν σημείων, ὀρθὴν ἀρεῖ ἢ ὑπὸ ὁ α ρ. ἢ ὁ ρ ἀρεῖ ρ λ μ ρ δὲ
 μέζων. ἢ γν ρ μ τῇ ρ α ἴσι δὲ. καὶ τὸ ρ π τριγώνου ἀρεῖ τὸ ρ α μ ἡμῶν
 μέζων δὲ τῷ ἢ τὸ ἡμισυν. λε-
 λείφθησαν οἱ τῷ π ρ α
 τομῆς ὅμοιοι ἑλαιοσυν
 ρ λ ὑποροχῆς, ἢ ὑπορ-
 τὸ ε τριγώνου τ' α β γ δ
 κύκλου. δὲ τῷ ἀρεῖ τὸ ποδα
 γιγνῶσθω δὲ ὑνύγραμ-
 μος π' τ' ἑλαιοσυν, ὅ-
 περ ἄρπον. ἴσι γὰρ μέ-
 ζων, ὅτι ἡ μὲν ἦν ἰση δὲ
 τῇ λαβήτῳ τ' τριγώνου.
 ἢ γὰρ περίμετρος μέζων δὲ
 ρ λ βάσεως τ' τριγώνου.
 ἴσ' ἀρεῖ ὁ κύκλ' τ' τῷ
 τριγώνου.



Β. Ο κύκλος πρὸ τοῦ
ἀπὸ τοῦ διαμέτρου πτωγώνου, λόγου ἔχει, ὅτι πρὸς τὸν κύκλον, ὃς διὰ μέτρον
α. β.

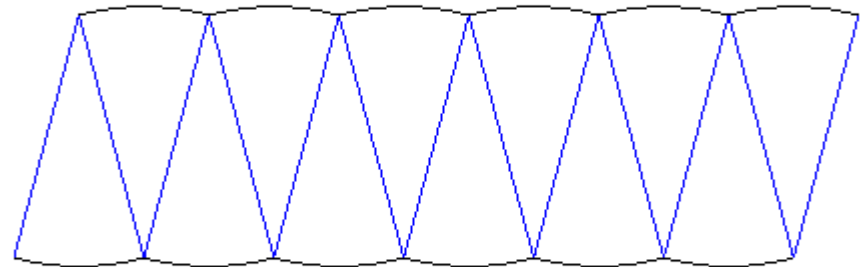
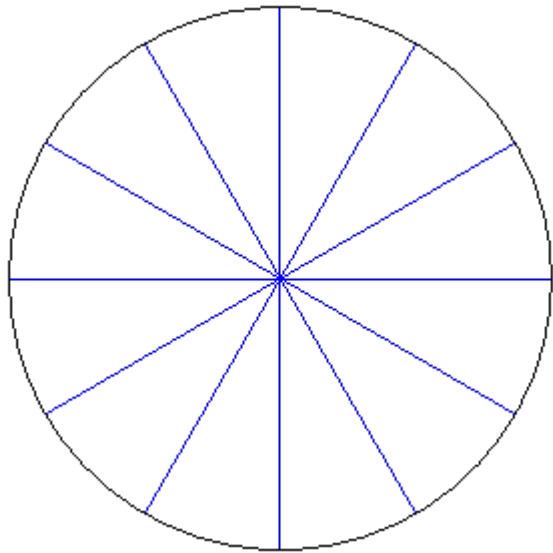
Le mirliton d'Archimède (-287 ; -212) :

« Pour un cercle de rayon quelconque, l'aire du disque, le carré construit sur son rayon, la longueur de la circonférence et son diamètre sont d'égales proportions »

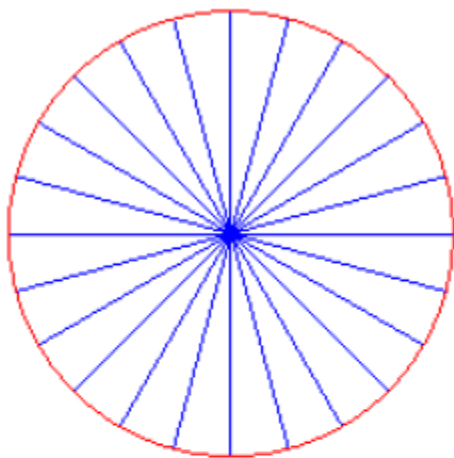


Le mirliton d'Archimède (-287;-212) :

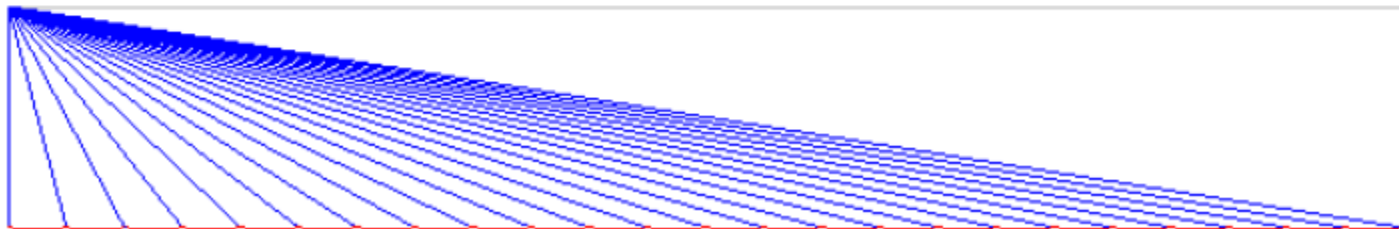
*« Pour un cercle de rayon quelconque,
l'aire du disque, le carré construit sur son rayon,
la longueur de la circonférence et son diamètre
sont d'égales proportions »*



π selon Archimède

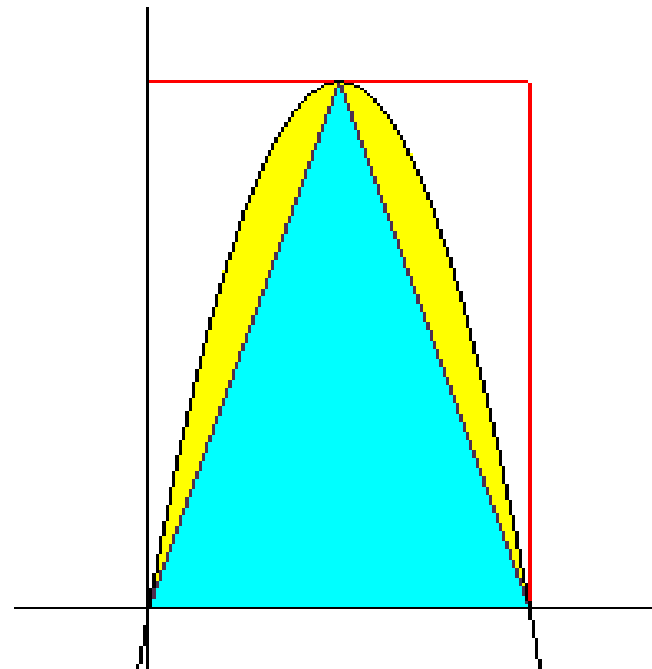
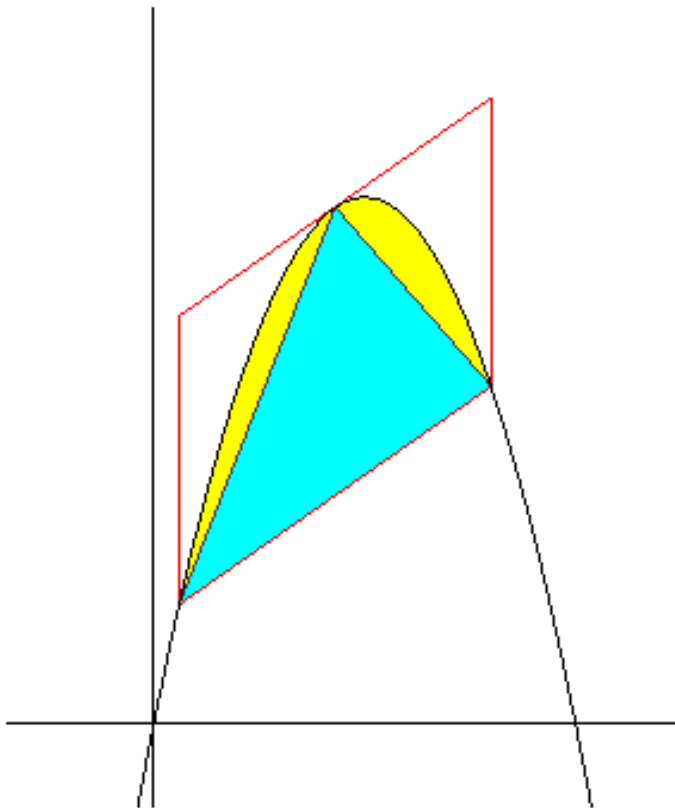


$$n = 24$$



Un autre résultat établi par Archimède :

*L'aire du segment de la parabole est égale
aux quatre tiers de l'aire du triangle inscrit*



Cavalieri (1598-1647) la théorie des indivisibles



Le principe de la méthode, pour le calcul des volumes, est illustré ci-contre :

le volume occupé par les pièces est le même, que celles-ci soient rangées en un cylindre ou décalées.

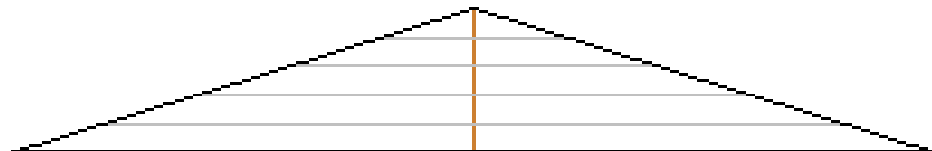
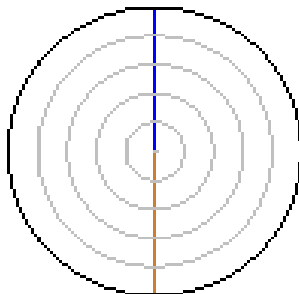
Il s'applique aussi aux aires.

L'aire d'un disque par la méthode des indivisibles

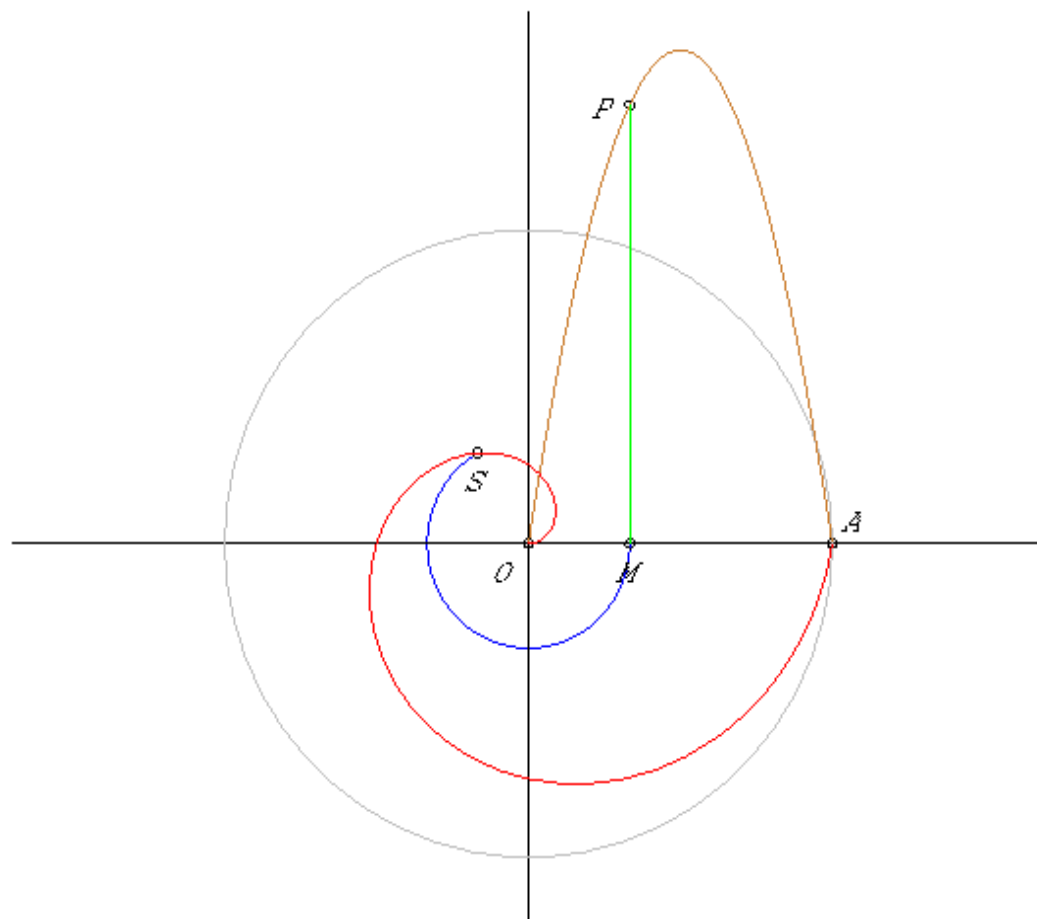
Le disque est constitué de cercles concentriques (les indivisibles). Si on les sectionne suivant un rayon et qu'on les étale à plat, on forme un triangle de même aire que le disque.

On obtient ainsi le résultat d'Archimède :

$$\frac{\text{Aire du disque}}{\text{Aire du carré de côté le rayon}} = \frac{\text{Longueur de la circonférence}}{\text{Diamètre}}.$$



La théorie des indivisibles appliquée à la spirale d'Archimède



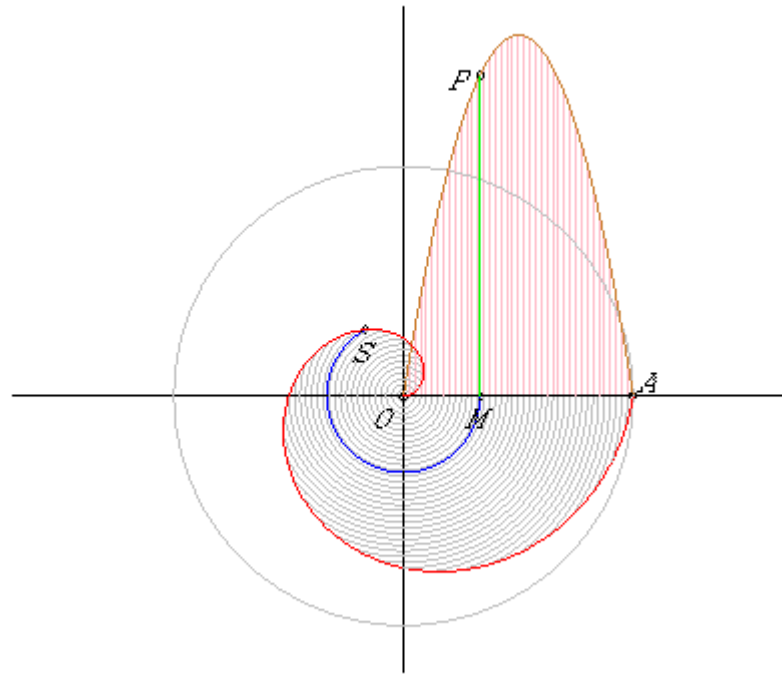
La théorie des indivisibles appliquée à la spirale d'Archimède

L'aire de la spirale est la même que l'aire du segment de parabole.

Si $OA = a$, le sommet de la parabole a pour ordonnée $\frac{\pi a}{2}$

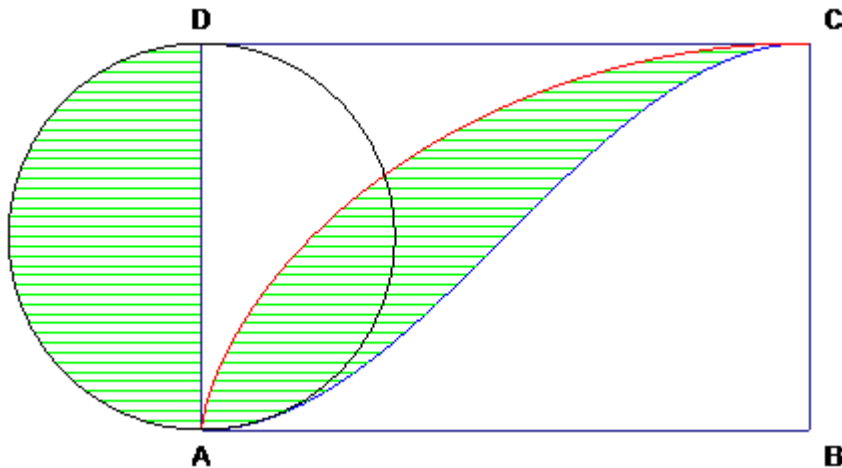
l'aire du triangle inscrit est $\frac{\pi a^2}{4}$ et donc l'aire de la spirale est $\frac{\pi a^2}{3}$.

Ce résultat était déjà connu par Archimède mais obtenu très péniblement.

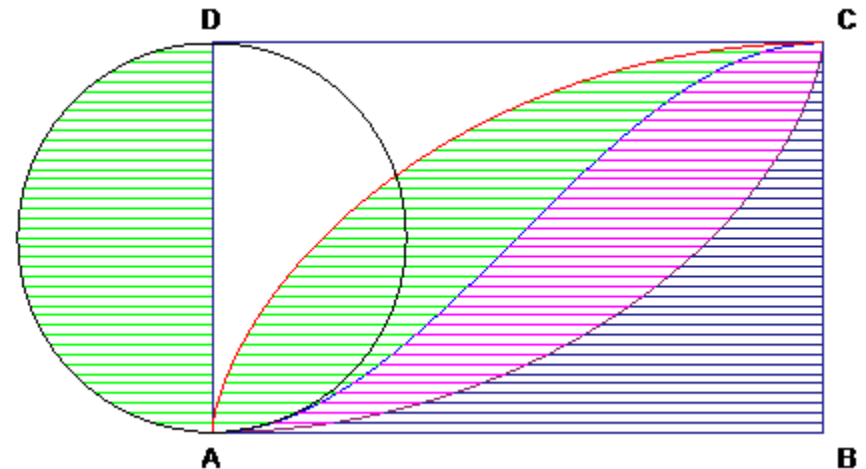


1628 - Roberval : calcul de l'aire de la cycloïde par par la méthode des indivisibles

La courbe bleue, appelée compagne de la cycloïde par Roberval, est en réalité une sinusoïde. Elle partage le rectangle $ABCD$ en deux parties égales.



Par une symétrie, Roberval constate que l'aire sous la demi-cycloïde est égale à l'aire sous la compagne, plus l'aire entre la demi-cycloïde et la compagne, ce qui donne $3\pi r^2$ pour l'aire de la cycloïde.



Le paradoxe de la théorie des indivisibles



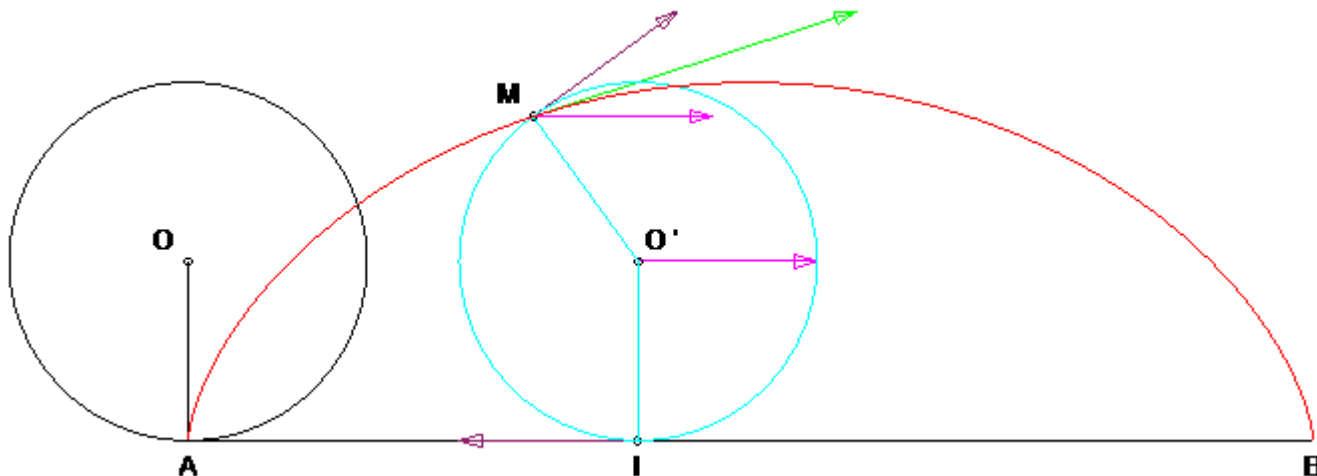
Soit un rectangle divisé en deux par une de ses diagonales.

En considérant, pour l'un des triangles des indivisibles horizontaux, et pour l'autre des indivisibles verticaux, on arrive à la conclusion que ces deux triangles (égaux) ont des aires dans la même proportion que les côtés du rectangle.

1628 - Roberval, la construction de la tangente à la cycloïde

En considérant que le mouvement du point M est composé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation "de même vitesse", Roberval en déduit que la tangente à la cycloïde est la bissectrice de l'angle dont les cotés sont :

- la tangente au cercle au point M et
- la parallèle à AB passant par M .



l'ont pas trouvée , & même on ne voit pas qu'ils aient fait d'autre usage de cette theorie des Suites Infinies que celui de quarrer l'Hyperbole ; mais il est vrai que Newton ne leur en donna pas le tems : au mois de Juin 1669. toutes ces Méthodes furent envoyées à Barrow comme des nouveautés brillantes , il les communiqua à Newton pour qui elles n'eurent pas le même mérite ; car il remit entre les mains de Barrow des papiers qui contenoient 1°. la Methode générale des Suites qu'il avoit trouvée quelques années auparavant , Methode par laquelle il fait sur toutes les Courbes ce que les Autres n'avoient fait que sur l'Hyperbole. 2°. La résolution Numérique & littérale des Equations affectées. 3°. La Methode des Fluxions. 4°. La Methode Inverse des Tangentes , la Quadrature , la Rectification des Courbes , & un mot sur la mesure des Solides , sur l'invention des Centres de gravité , &c. sçavoir que comme ces Mesures se réduisent à celles des Surfaces , il n'est pas nécessaire qu'il avertisse que sa Methode donne tout cela ; ainsi dès 1669. Newton avoit trouvé les Suites Infinies , le Calcul Différentiel & le Calcul intégral ; tout cela fut envoyé par Barrow à Collins qui en tira copie & le communiqua à Brownker & à Oldembourg , celui-ci l'envoya à Slusius : de plus Collins l'avoit encore envoyé par Lettres à Jacques Gregori , à Bertet , à Borelli , à Vernon , à Strode , & à plusieurs autres Géometres ; ces Lettres sont imprimées dans le *Commercium Episto-*

licum , & c'est dans ces Lettres qu'on voit que Newton avoit trouvé toutes ces choses , même avant que Brownker eût quarré l'Hyperbole , c'est-à-dire , dès l'année 1664. ou 1665. c'est dans ces Lettres que l'on voit aussi que Newton vouloit faire imprimer dès l'année 1671. l'Ouvrage dont nous donnons ici la traduction.

De plus en 1672. Nevvton dans une Lettre écrite à Collins , lui envoie un exemple de sa Methode des Tangentes , comme un Corollaire , dit-il , d'une Methode générale , qu'aucune complication de Calcul n'arrête , & qui s'étend non-seulement aux Courbes Géometriques , mais même aux Courbes Mécaniques , & qui outre la solution complete de la question des Tangentes , donne encore celle de plusieurs Problèmes beaucoup plus difficiles comme des Courbures des Courbes , de leurs Aires , de leurs longueurs , de leurs Centres de gravité : *J'ai* , dit-il , *joint cette Methode à une autre qui donne la résolution des Equations par des suites Infinies , &c.* On voit bien que ces deux Méthodes sont la Methode directe & inverse des Fluxions , & celle des Suites Infinies telles qu'elles sont dans ce Traité fait en 1671. Tschirnhaus au mois de Mai 1675. Leibnitz au mois de Juin 1676. & Slusius dès le 29. Janvier 1673. avoient reçu des copies de cette Lettre ; c'étoit même à l'occasion de la Methode des Tangentes de Slusius que Newton l'avoit écrite , il louë beaucoup l'invention de Slusius , qui en effet avoit trouvé la

La correspondance entre Newton et Leibniz, 1676

xviii

P R E F A C E.

Lettre du 12. Mai 1676. Il paroît encore par une Lettre de Newton datée du 13. Juin 1676. que dans ce tems il a communiqué directement à Leibnitz son Binome avec plusieurs exemples d'extractions de Racines , plusieurs Suites Infinies pour le Cercle, l'Ellipse, l'Hyperbole, la Quadratrice, &c. Et par une autre Lettre de Newton du 24. Octobre 1676. il paroît qu'il a communiqué à Leibnitz 1°. tout le procédé des Suites, & la façon dont il est arrivé à cette découverte. 2°. Une manière de faire des Logarithmes par les Aires Hyperboliques. 3°. La Quadrature des Courbes en entier, avec plusieurs Exemples. 4°. Son Parallelogramme, autrement l'artifice dont il se sert pour la résolution des Equations affectées. 5°. Le retour des Suites. Jusque-là Leibnitz avoit toujours reçu & n'avoit rendu que les mêmes Suites qu'on lui avoit envoiées, il paroît même qu'il ignoroit jusqu'alors le Calcul infinitésimal par ce qu'il dit dans une Lettre du 27. Août 1676. que les Problèmes de la Méthode inverse des Tangentes, ne dépendent ni des Equations, ni des Quadratures. Enfin en 1677. dans une Lettre à Oldembourg, il donne une Méthode pour les Tangentes par le Calcul Différentiel; cette Méthode est la même que celle de Barrow publiée en 1670. & le Calcul est le même à la notation près que celui de Newton communiqué par Collins en 1669. Oldembourg mourut à la fin de l'année 1677. & sa mort termina ce commerce de Lettres. Collins mourut en 1682. & la même

P R E F A C E.

xix

année Leibnitz publia dans les Actes de Leipfick la Quadrature du Cercle & de l'Hyperbole; & en 1684. les Elements du Calcul Différentiel; & enfin Newton en 1686. publia son Livre des Principes.

Voilà en raccourci l'Histoire de ce Calcul; c'est au Lecteur à juger de la part à cette découverte qu'on doit accorder à Leibnitz.

Cependant Newton loin de se plaindre sembloit convenir que Leibnitz avoit trouvé une Méthode de Calcul semblable à la sienne, bien des années s'écoulerent sans qu'il se souciât de détromper le public; tout le Monde sçavant à l'exception de l'Angleterre, regardoit Leibnitz comme l'Inventeur; à peine le Livre des Principes de Newton étoit-il connu, toutes les vûes, tous les travaux des Géometres se tournerent du côté du Calcul Différentiel, tous les éloges furent pour l'Auteur prétendu de ce Calcul; enfin Leibnitz étoit en possession, & en possession non contestée de tout ce que la Géométrie avoit produit de plus brillant depuis vingt siècles; mais cet éclat de gloire n'a pas duré, des Partisans trop zelés & des Disciples ébloüis, en voulant élever leur Maître, ont été cause de l'abaissement de sa réputation. En 1695. les Ouvrages de Wallis parurent en deux gros volumes, les Journalistes de Leipfick se plaignirent assez mal-à-propos de ce que ce Géometre n'avoit pas parlé de Leibnitz, & de sa grande découverte autant qu'il auroit dû le faire; sur cela Wallis écrivit à Leibnitz qu'il étoit bien fâché de n'avoir pû parler de lui, mais qu'il n'avoit au-

La table des matières de l'édition anglaise

THE CONTENTS.

<i>THE Introduction, or the Method of resolving complex Quantities into infinite Series of simple Terms.</i>	—	pag. 1
Prob. 1. <i>From the given Fluents to find the Fluxions.</i>	—	p. 21
Prob. 2. <i>From the given Fluxions to find the Fluents.</i>	—	p. 25
Prob. 3. <i>To determine the Maxima and Minima of Quantities.</i>		p. 44
Prob. 4. <i>To draw Tangents to Curves.</i>	—	p. 46
Prob. 5. <i>To find the Quantity of Curvature in any Curve.</i>		p. 59
Prob. 6. <i>To find the Quality of Curvature in any Curve.</i>		p. 75
Prob. 7. <i>To find any number of Quadrable Curves.</i>		p. 80
Prob. 8. <i>To find Curves whose Areas may be compared to those of the Conic Sections.</i>	—	p. 81
Prob. 9. <i>To find the Quadrature of any Curve assign'd.</i>		p. 86
Prob. 10. <i>To find any number of rectifiable Curves.</i>		p. 124
Prob. 11. <i>To find Curves whose Lines may be compared with any Curve-lines assign'd.</i>	—	p. 129
Prob. 12. <i>To rectify any Curve-lines assign'd.</i>	—	p. 134

12. Also the Order of the Terms may be inverted in this manner $xx + aa$, in which case the Root will be found to be $x + \frac{ax}{2x} - \frac{a^2}{8x^3} + \frac{a^3}{10ax^5} - \frac{5a^4}{128x^7}$, &c.

13. Thus the Root of $aa - xx$ is $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$, &c.

14. The Root of $x - xx$ is $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

15. Of $aa + bx - xx$ is $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}$, &c.

16. And $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$ is $\frac{1+\frac{1}{2}axx-\frac{1}{8}a^2x^2+\frac{1}{16}a^3x^3-\frac{1}{128}a^4x^4}{1-\frac{1}{2}bxx+\frac{1}{8}b^2x^2-\frac{1}{16}b^3x^3+\frac{1}{128}b^4x^4}$, &c. and moreover by actually dividing, it becomes

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{8}b^2x^4 + \frac{1}{16}b^3x^6, &\text{ &c.} \\ + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{8}ab^2 & \\ - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{16}a^2b & \\ + \frac{1}{128}a^3 & \end{aligned}$$

17. But these Operations, by due preparation, may very often be abbreviated; as in the foregoing Example to find $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, if the Form of the Numerator and Denominator had not been the same, I might have multiply'd each by $\sqrt{1-bxx}$, which would have produced $\frac{\sqrt{1+axx-baxx}}{1-bxx}$, and the rest of the work might have been performed by extracting the Root of the Numerator only, and then dividing by the Denominator.

18. From hence I imagine it will sufficiently appear, by what means any other Roots may be extracted, and how any compound Quantities, however entangled with Radicals or Denominators, (such as $x^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt{axx+x^2}} - \frac{\sqrt{x^2+2x-1}}{\sqrt{x+xx-\sqrt{2x-x^2}}}$) may be reduced to infinite Series consisting of simple Terms.

Of the Reduction of affected Equations.

19. As to affected Equations, we must be something more particular in explaining how their Roots are to be reduced to such Series as these; because their Doctrine in Numbers, as hitherto deliver'd by Mathematicians, is very perplexed, and incumber'd with superfluous Operations, so as not to afford proper Specimens for performing the Work in Species. I shall therefore first shew how the

Resolu-

Resolution of affected Equations may be compendiously perform'd in Numbers, and then I shall apply the same to Species.

20. Let this Equation $y^4 - 2y - 5 = 0$ be proposed to be resolved, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make $2 + p = y$, and substitute $2 + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^4 + 6p^3 + 10p - 1 = 0$, whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^4 + 6p^3$ because of its smallness, the remaining Equation $10p - 1 = 0$, or $p = 0,1$, will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose $0,1 + q = p$, and substitute this fictitious Value of p as before, which produces $q^4 + 6,3q^3 + 11,23q + 0,061 = 0$. And since $11,23q + 0,061 = 0$ is near the truth, or $q = -0,0054$ nearly, (that is, dividing 0,061 by 11,23, till so many Figures arise as there are places between the first Figures of this, and of the principal Quote exclusively, as here there are two places between 2 and 0,005) I write $-0,0054$ in the lower part of the Quote, as being negative; and supposing $-0,0054 + r = q$, I substitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I please, in the manner of the following Diagram:

$y^4 - 2y - 5 = 0$	$+ 2,10000000$ $- 0,00144892$ $+ 2,09855108, \text{ &c.} = y$
$2 + p = y.$	$+ y^4$ $- 2y$ $- 5$
The Sum	$- 1 + 10p + 6p^3 + p^4$
$0,1 + q = p.$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+ 0,06 + 1,2 + 6,$ $+ 1, + 10,$ $- 1,$
The Sum	$0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$- 0,0054 + r = q.$	$- 0,000000157464 + 0,000000748r - 0,0000000001r^2 + r^3$ $+ 6,3q^3$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$
The Sum	$+ 0,0005416 + 11,162r$
$- 0,00001852 + s = r.$	

La méthode de Newton exposée sur un exemple :
l'équation $y^3 - 2y - 5 = 0$

6

The Method of FLUXIONS,

Resolution of affected Equations may be compendiously perform'd in Numbers, and then I shall apply the same to Species.

20. Let this Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ be proposed to be resolved, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make $2 + p = y$, and substitute $2 + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^3 + 6p^2$ because of its smallness, the remaining Equation $10p - 1 = 0$, or $p = 0,1$, will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose $0,1 + q = p$, and substitute this fictitious Value of p as before, which produces $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$. And since $11,23q + 0,061 = 0$ is near the truth, or $q = -0,0054$ nearly, (that is, dividing 0,061 by 11,23, till so many Figures arise as there are places between the first Figures of this, and of the principal Quote exclusively, as here there are two places between 2 and 0,005) I write $-0,0054$ in the lower part of the Quote, as being negative; and supposing $-0,0054 + r = q$, I substitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I please, in the manner of the following Diagram :

La méthode de Newton exposée sur un exemple :
l'équation $y^3 - 2y - 5 = 0$
(dans la traduction de Buffon)

D E S F L U X I O N S.

7

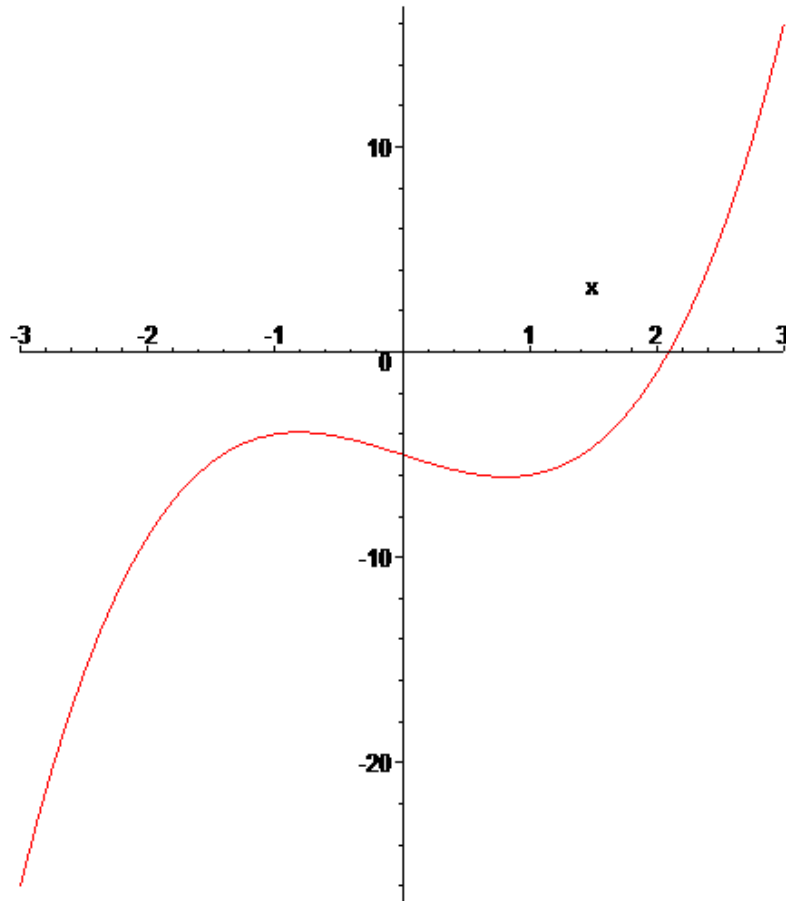
sur les Equations en Nombres, est extrêmement embarrassé, & chargé d'Opérations superflues; de sorte qu'on ne peut prendre sur cela un bon Modele pour faire les mêmes Opérations en Especies. Je ferai donc voir d'abord comment se doit faire en Nombres la Reduction des Equations Affectées, & ensuite j'appliquerai la Methode aux Especies.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en suite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ses dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajouter au Quotient; rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0,1$, ce qui est très-près de la vraie valeur de p ; c'est pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0,1 + q = p$, & substituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reste $11,23q + 0,061 = 0$, ou $q = -0,0054$ à peu près (& cela en divisant 0,061 par 11,23 jusqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient exclusivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0,0054$ dans le Quotient, mais au-dessous parce que ce Terme est Négatif; & supposant $-0,0054 + r = q$, je substitue comme auparavant, & je continue ainsi l'Opération aussi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-dessous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+ 2,10000000$ $- 0,00544852$ $+ 2,09455148, \&c. = y$
$2 + p = y.$ $+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
The Sum	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p.$ $+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+ 0,06 + 1,2 + 6,$ $+ 1, + 10,$ $- 1,$
The Sum	$0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$- 0,0054 + r = q.$ q^3 $+ 6,3q^2$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	$- 0,000000157464 + 0,00008748r - 0,01021^2 + r^3$ $+ 0,000183708 - 0,06804 + 0,3$ $- 0,060642 + 11,23$ $+ 0,061$
The Sum	$+ 0,0005416 + 11,162r$
$- 0,00004852 + s = r.$	

Les calculs de Newton avec Maple

La fonction $f(t) = t^3 - 2t - 5$.



Les calculs de Newton

- $y = 2 + p$, report dans $f(t)$ puis suppression des termes d'ordre 2 dans le développement de $f(2 + p) = -1 + 10p + 6p^2 + p^3$.
- valeur approchée de $p : \frac{1}{10}$
- $p = 0.1 + q$, report dans $f(t)$ puis suppression des termes d'ordre 2 dans le développement de $f(2 + 0.1 + q) = q^3 + 6.3q^2 + \dots$

```
> f:=x->x^3-2*x-5;
collect(f(2+p),p);
collect(f(2+0.1+q),q);
f(2+0.1-.061/11.23+r);collect(%,r);

f:=x -> x^3 - 2x - 5
p^3 + 6p^2 + 10p - 1
q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + .061
(2.094568121 + r)^3 - 9.189136242 - 2r
r^3 + 6.283704363r^2 + 11.16164684r + .000185723
> 2+0.1-.061/11.23-.000185723/11.16164684;
2.094551482
```

21. But the Work may be much abbreviated towards the end by this Method, especially in Equations of many Dimensions. Having first determin'd how far you intend to extract the Root, count so many places after the first Figure of the Coefficient of the last Term but one, of the Equations that result on the right side of the Diagram, as there remain places to be fill'd up in the Quote, and reject the Decimals that follow. But in the last Term the Decimals may be neglected, after so many more places as are the decimal places that are fill'd up in the Quote. And in the antepenultimate Term reject all that are after so many fewer places. And so on, by proceeding Arithmetically, according to that Interval of places: Or, which is the same thing, you may cut off every where so many Figures as in the penultimate Term, so that their lowest places may be in Arithmetical Progression, according to the Series of the Terms, or are to be suppos'd to be supply'd with Cyphers, when it happens otherwise. Thus in the present Example, if I desired to continue the Quote no farther than to the eighth place of Decimals, when I substituted $0,0054 + r$ for q , where four decimal places are compleated in the Quote, and as many remain to be compleated, I might have omitted the Figures in the five inferior places, which therefore I have mark'd or cancell'd by little Lines drawn through them; and indeed I might also have omitted the first Term r^3 , although its Coefficient be $0,99999$. Those Figures therefore being expunged, for the following Operation there arises the Sum $0,0005416 + 11,162r$, which by Division, continued as far as the Term prescribed, gives $-0,00004852$ for r , which compleats the Quote to the Period required. Then subtracting the negative part of the Quote from the affirmative part, there arises $2,09455148$ for the Root of the proposed Equation.

Le développement en série, donné par Newton,
dans la théorie des fluxions et des suites infinies

IV. La Fraction $\frac{a a}{b + x}$ étant proposée, Divises $a a$ par $b + x$ de la manière qui suit.

$$b + x \overline{) a a} = \left(\frac{a a}{b} - \frac{a a x}{b^2} + \frac{a a x^2}{b^3} - \frac{a a x^3}{b^4} + \frac{a a x^4}{b^5}, \&c. \right)$$

$$\begin{array}{r} a a + a a x \\ \hline \frac{a a x}{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - a a x + 0 \\ \hline \frac{a a x}{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - a a x \\ \hline \frac{a a x^2}{b^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + \frac{a^2 x^2}{b^2} + 0 \\ \hline \frac{a^2 x^2}{b^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + \frac{a^2 x^2}{b^2} + \frac{a^2 x^3}{b^3} \\ \hline \frac{a^2 x^3}{b^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 - \frac{a^2 x^3}{b^3} + 0 \\ \hline \frac{a^2 x^3}{b^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{a^2 x^3}{b^3} - \frac{a^2 x^4}{b^4} \\ \hline \phantom{\frac{a^2 x^3}{b^3}} \frac{a^2 x^4}{b^4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 + \frac{a^2 x^4}{b^4}, \&c. \end{array}$$

Le Quotient est donc $\frac{a a}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} + \frac{a^2 x^4}{b^5}, \&c.$

21. But the Work may be much abbreviated towards the end by this Method, especially in Equations of many Dimensions. Having first determin'd how far you intend to extract the Root, count so many places after the first Figure of the Coefficient of the last Term but one, of the Equations that result on the right side of the Diagram, as there remain places to be fill'd up in the Quote, and reject the Decimals that follow. But in the last Term the Decimals may be neglected, after so many more places as are the decimal places that are fill'd up in the Quote. And in the antepenultimate Term reject all that are after so many fewer places. And so on, by proceeding Arithmetically, according to that Interval of places: Or, which is the same thing, you may cut off every where so many Figures as in the penultimate Term, so that their lowest places may be in Arithmetical Progression, according to the Series of the Terms, or are to be suppos'd to be supply'd with Cyphers, when it happens otherwise. Thus in the present Example, if I desired to continue the Quote no farther than to the eighth place of Decimals, when I substituted $0,0054 + r$ for q , where four decimal places are compleated in the Quote, and as many remain to be compleated, I might have omitted the Figures in the five inferior places, which therefore I have mark'd or cancell'd by little Lines drawn through them; and indeed I might also have omitted the first Term r^3 , although its Coefficient be $0,99999$. Those Figures therefore being expunged, for the following Operation there arises the Sum $0,0005416 + 11,162r$, which by Division, continued as far as the Term prescribed, gives $-0,00004852$ for r , which compleats the Quote to the Period required. Then subtracting the negative part of the Quote from the affirmative part, there arises $2,09455148$ for the Root of the proposed Equation.

La définition de la dérivée, selon Newton, dans Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687)

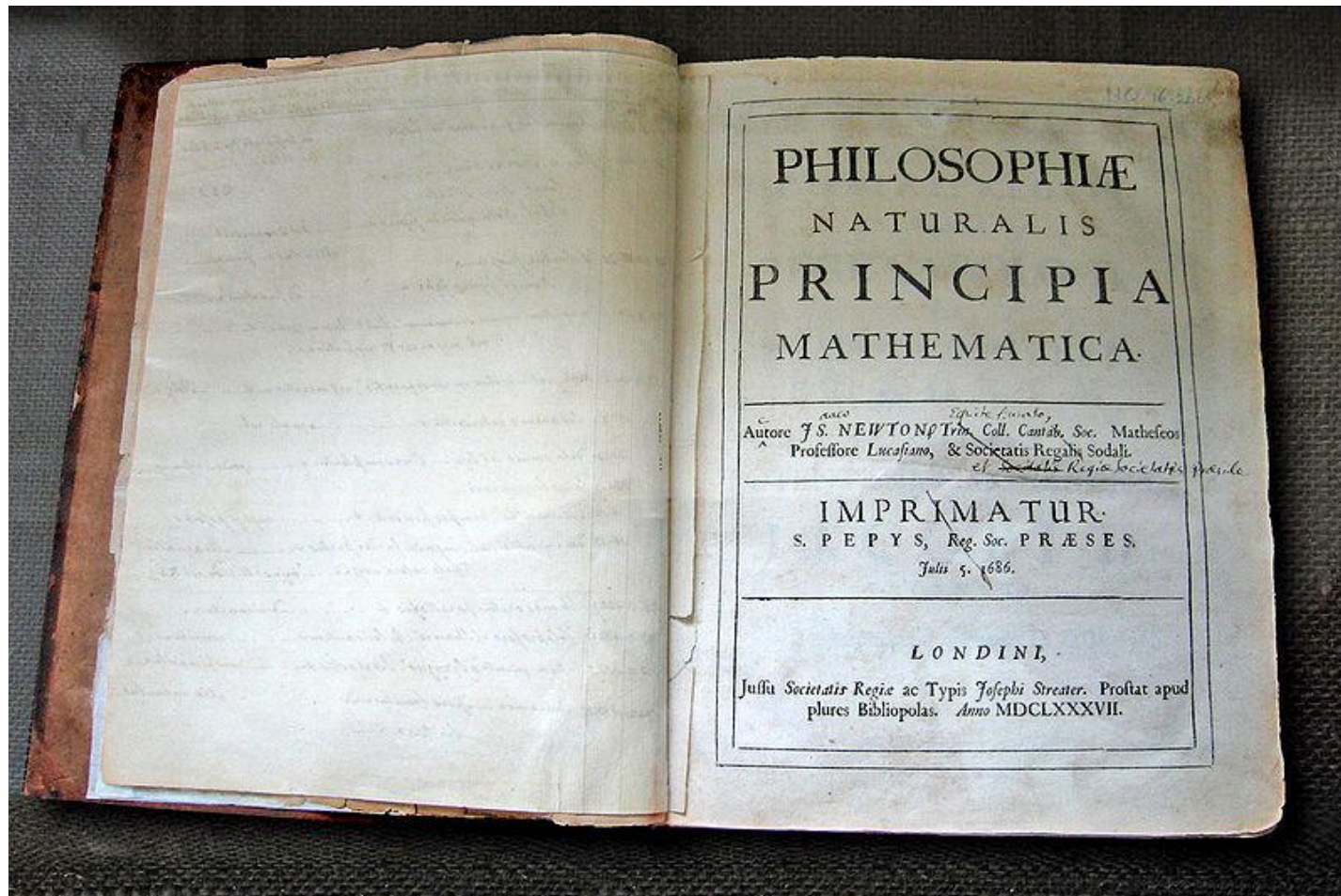
Les rapports ultimes dans lesquelles les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut.

Cette vision de Newton est relativement proche de notre définition moderne de la limite et de la dérivée.

Toutefois, Newton ne généralisera pas cette "définition" de la limite qu'il réservera aux rapports de fluxions.

L'insatisfaction de Newton sur la notion de quantités infinitésimales, que certains nomment "fantôme de quantités disparues", est sans doute à l'origine de la parution tardive de **La méthode des fluxions et des suites infinies**, (commencée en 1664, achevée en 1671 et publiée en 1736).

L'exemplaire personnel de Newton
annoté par lui-même (édition de 1687)

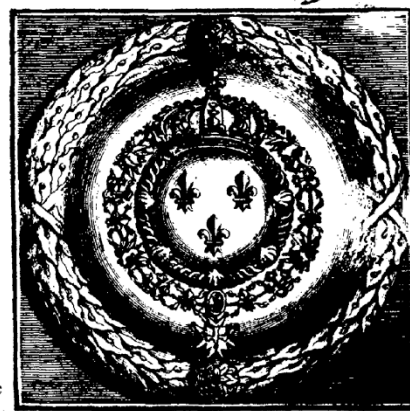


Sommaire de l'Analyse des infiniment petits du marquis Guillaume de l'Hospital - 1696

- SECTION. I. *Où l'on donne les Regles du calcul des Différences,* pag. 1.
- SECT. II. *Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes,* II.
- SECT. III. *Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis,* 41.
- SECT. IV. *Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement,* 55.
- SECT. V. *Usage du calcul des différences pour trouver les Développées,* 71.
- SECT. VI. *Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réflexion,* 104.
- SECT. VII. *Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfraction,* 120.
- SECT. VIII. *Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes,* 131.
- SECT. IX. *Solution de quelques Problèmes qui dépendent des Méthodes précédentes,* 145.

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS,

Pour l'intelligence des lignes courbes.



989. A P A R I S,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DC. XCVI.

- SECT. X. *Nouvelle manière de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de M^r Descartes & Hudde,* 164.

277

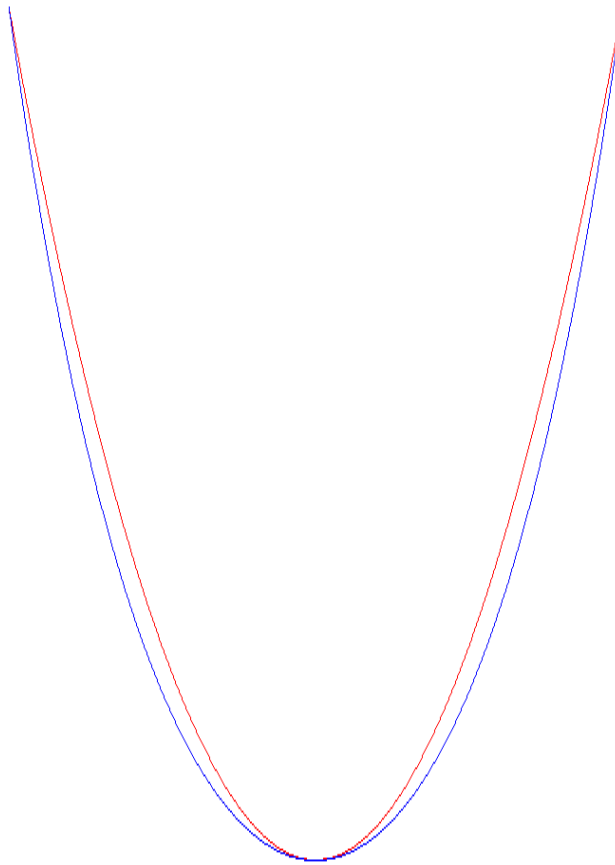
MENSIS JUNII A. M DC XCI.
*DE LINEA IN QUAM FLEXILE SE
 pondere proprio curvat, ejusque usu insigni ad in-
 veniendas quotcunque medias proportionales &
 Logarithmos. Autore G. G. L.*

Problema *Lineæ Catenariae vel Funiculariæ* duplicem usum habet; unum, ut augeatur ars inveniendi seu Analysis, quæ hactenus ad talia non satis pertingebat, alterum ut praxis construendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utilissimam effectui esse, nec ulli Transcendentium secundam. Nam suspensionis fili vel potius *catenula* (quæ extensionem non mutat) nullo negotio parari & describi potest, *physico* quodam *constructionis* genere. Et ope ejus ubi semel descripta est, exhiberi possunt quotcunq; mediæ proportionales, & Logarithmi, & Quadratura Hyperbolæ. Primus *Galileus* de ea cogitavit, sed naturam ejus assecutus non est: neq; enim Parabola est, ut ipse erat suspicatus. *Joachimus Jungius*, eximius nostri seculi Philosophus & Mathematicus, qui multa ante *Cartesii* præclara cogitata habue-

1691 – Leibniz : Etude de la chaînette

Le Problème de la *Courbe Funiculaire* ou *Chaînette* présente un double intérêt, premièrement celui d'étendre l'art d'inventer, autrement dit l'Analyse ²⁰, jusqu'à présent incapable d'aborder convenablement de telles questions, deuxièmement celui de faire progresser la technique des constructions. Je me suis aperçu en effet que la fécondité de cette courbe n'a d'égale que la facilité de sa réalisation, ce qui la met en tête de toutes les Transcendantes. De fait, nous pouvons l'obtenir et la tracer à peu de frais, par une *construction de type physique*, en laissant pendre un fil ou mieux une *chaînette* (de longueur invariable). Et dès que nous disposons, grâce à elle, de son tracé, nous pouvons faire apparaître toutes les moyennes proportionnelles et tous les Logarithmes que nous pouvons souhaiter, ainsi que la Quadrature de l'Hyperbole. *Galilée* fut le premier à y réfléchir, mais sans parvenir à en découvrir la nature : contrairement à ses conjectures, il ne s'agit pas en effet de la *Parabole*. *Joachim Jung*, éminent Philosophe et Mathématicien de ce siècle qui, bien avant *Descartes* avait eu de nombreuses et lumineuses idées pour la réforme des sciences, se lança dans les calculs, fit des expériences, et disqualifia la parabole, mais sans lui substituer la véritable courbe ²¹. Depuis lors

Illustration de la mauvaise conjecture de Galilée sur la chaînette :
en bleu la chaînette, en rouge une parabole



1691 – Leibniz : Construction de la logarithmique et de la chaînette

TAB. VII. ad A. 1691. pag. 278. 1699.

Fig. 1.

G. G. L. De Linea Catenaria

OB+AC seu OR+AR ut Numeri. BC ut Logarithmi
AC=AR OR=AR=N² OR=AR=N²(f)
Rectang OAR=spat. AONCA V=O(C)
G.T.E. contr. gra. CA(C).AC.AONCA
OQ=OB=OC=quater OQ
At=GP=QR Tang. sin. OAR, CBT

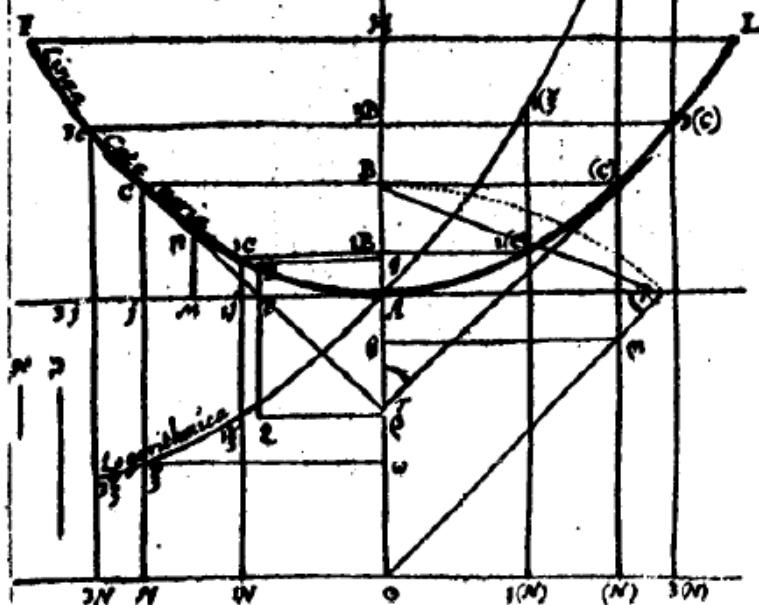
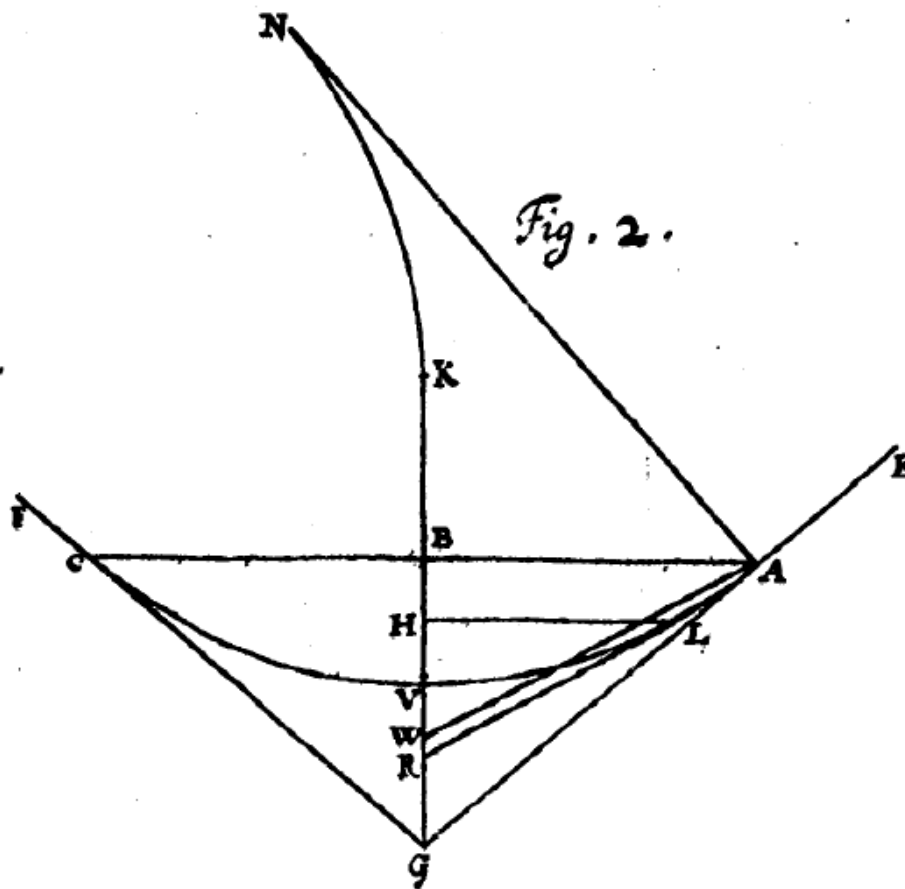


Fig. 2.



Après plus de trois siècles, les noms de Newton et Leibniz sont encore présents dans :

- La formule du binôme (de Newton)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- La résolution numérique des équations (par la méthode de Newton).

- La dérivation itérée d'une somme (formule de Leibniz)

$$(f + g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

ΦΩΚΑΕΙΣ ΟΙ ΕΝ ΙΟΝΙΑΙ ΕΜΠΟΡΙΑΙ ΧΡΩΜΕΝΟΙ ΕΚΤΙΣΑΝ ΜΑΣΣΑΛΙΑΝ

Les phocéens qui commerçaient en Ionie fondèrent Marseille.

xxx P R E F A C E.

Nous n'ajouterons qu'un mot à cette Préface , déjà trop longue , c'est que quiconque apprendra le Calcul de l'Infini dans ce Traité de Newton , qui en est la vraie source , aura des idées claires de la chose , & fera fort peu de cas de toutes les objections qu'on a faites , ou qu'on pourroit faire contre cette sublime Méthode.

