Pavages et quasi-cristaux

Journées Nationales APMEP

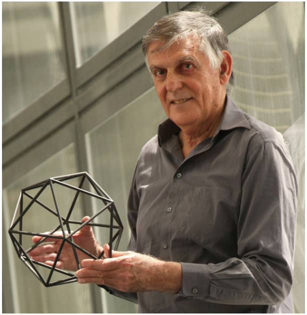
Samuel Petite

Laboratoire Amiénois de Mathématique Fondamentale et Appliquée
UMR 7352 du CNRS

20 octobre 2015

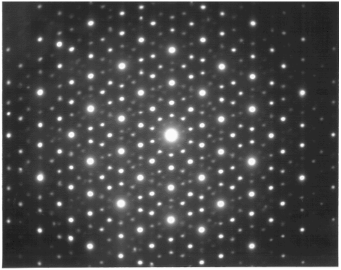
Dan Shechtman

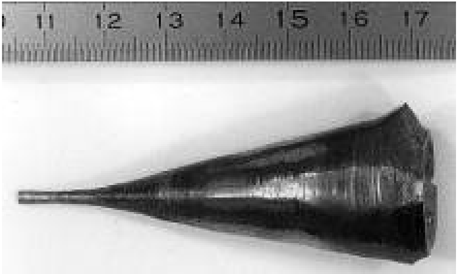
Prix Nobel de chimie 2011



D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn : *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry.* Physical Review Letters. **53**, 1984, S. 1951–1953

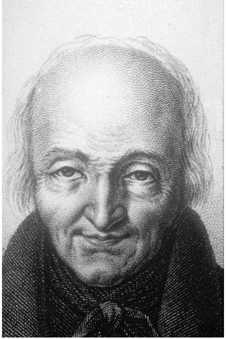
Quasi-cristal





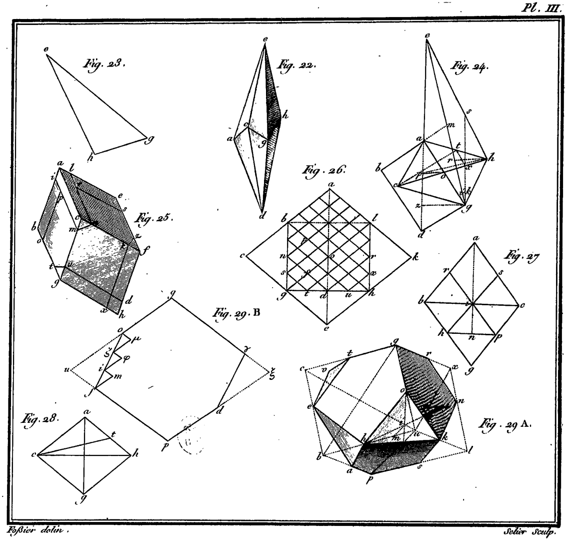
René Just Haüy

- René Just HAÜY (1743 (Saint-Just en Chaussée)-1822 (Paris))
Père de la cristallographie moderne.



René Just Haüy

René Just Haüy



Essai d'une théorie sur la structure des crystaux (1784)

René Just Haüy

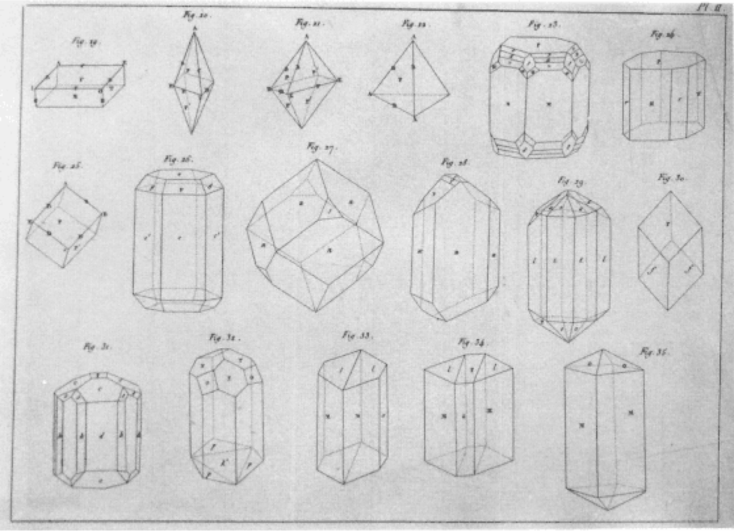
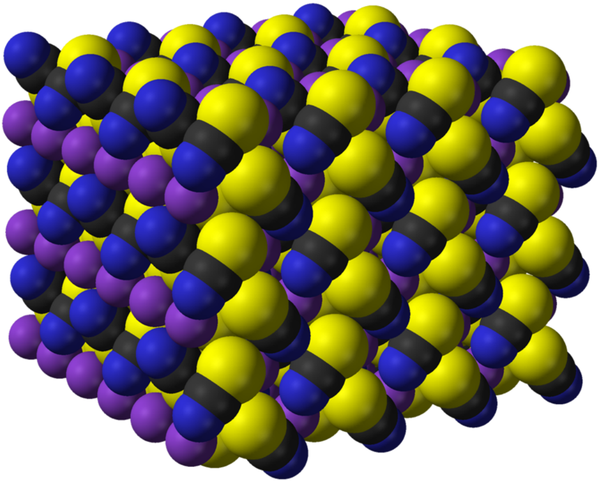


Tableau comparatif des résultats de la cristallographie et de l'analyse chimique relativement à la classification des minéraux (1809)

Maille élémentaire de thiocyanate de potassium



Un problème combinatoire

On se donne un polygone. Peut-il être une maille élémentaire ?

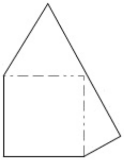
Un problème combinatoire

On se donne un polygone. Peut-il être une maille élémentaire ?

Ex: Escher-Les Reptiles

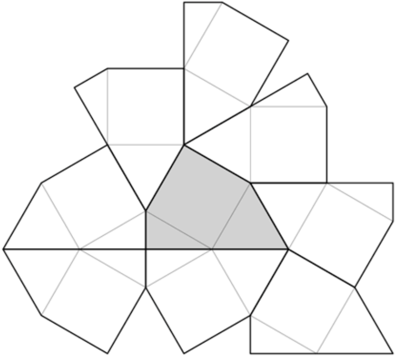
Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe. Peut-il être une maille élémentaire ?



Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe. Peut-il être une maille élémentaire ?

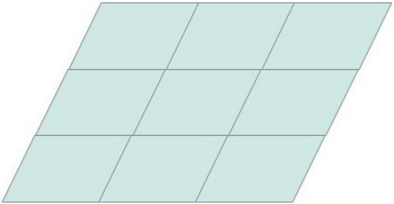


Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 4 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?

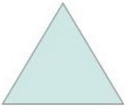
Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 4 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?



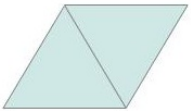
Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 3 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?



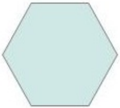
Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 3 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?



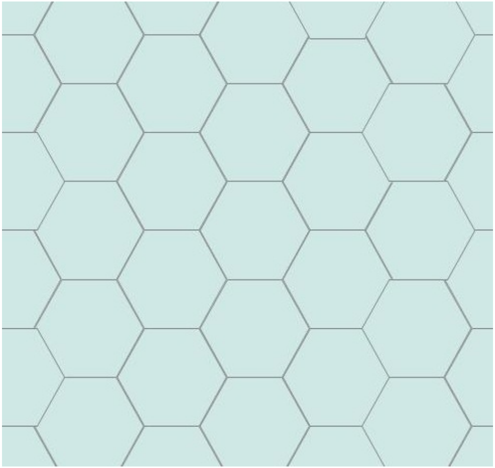
Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 6 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?



Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 6 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?

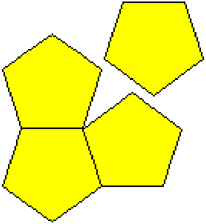


Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 5 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?

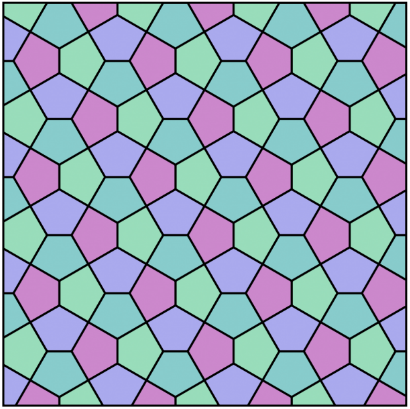
Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 5 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ?



Un problème combinatoire

On se donne un polygone convexe à 5 côtés.
Peut-il être une maille élémentaire ? Pavage du Caire



Un "théorème" de Kershner

- 1968 Kershner publie la liste de tous les pavages par pentagones non réguliers: 8 pavages au total

Un “théorème” de Kershner

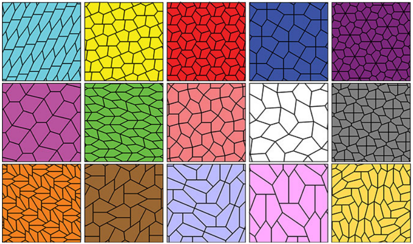
• 1968 Kershner publie la liste de tous les pavages par pentagones non réguliers: 8 pavages au total

• 1975, publication de ce résultat dans *Scientific American*. Richard James III et Marjorie Rice et en trouvent cinq de plus !

Un “théorème” de Kershner

• 1968 Kershner publie la liste de tous les pavages par pentagones non réguliers: 8 pavages au total

• 1975, publication de ce résultat dans *Scientific American*. Richard James III et Marjorie Rice et en trouvent cinq de plus !



Le dernier a été découvert par C. Mann, J. MacLoud-Mann et D. Von Derau (2015).
On ne sait pas si la liste est complète.

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

Théorème

Il n'existe pas de pavage du plan euclidien avec un polygone convexe à $p \geq 7$ côtés.

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

Théorème

Il n'existe pas de pavage du plan euclidien avec un polygone convexe à $p \geq 7$ côtés.

Preuve : par contradiction, on considère un tel pavage.

Dans un carré de taille n,

- nombre de faces $= F_n$,   nombre de sommets $= S_n$,
- nombre d'arêtes $= A_n$.

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

Théorème

Il n'existe pas de pavage du plan euclidien avec un polygone convexe à $p \geq 7$ côtés.

Preuve : par contradiction, on considère un tel pavage.
Dans un carré de taille n,

- nombre de faces $= F_n$, nombre de sommets $= S_n$,
- nombre d'arêtes $= A_n$.

Formule d'Euler $$F_n - A_n + S_n = 2 + O(n) = O(n)$$

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

Théorème

Il n'existe pas de pavage du plan euclidien avec un polygone convexe à $p \geq 7$ côtés.

Preuve : par contradiction, on considère un tel pavage.
Dans un carré de taille n,

- nombre de faces $= F_n$, nombre de sommets $= S_n$,
- nombre d'arêtes $= A_n$.

Formule d'Euler $F_n - A_n + S_n = 2 + O(n) = O(n)$

Lemme des poignées de mains

$$2A_n + O(n) = \sum_{\text{sommet}} deg(s) \geq 3S_n$$

$$2A_n + O(n) \geq pF_n$$

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

Théorème

Il n'existe pas de pavage du plan euclidien avec un polygone convexe à $p \geq 7$ côtés.

Preuve : par contradiction, on considère un tel pavage.

Dans un carré de taille n,

- nombre de faces $= F_n$, nombre de sommets $= S_n$,
- nombre d'arêtes $= A_n$.

Formule d'Euler $F_n - A_n + S_n = 2 + O(n) = O(n)$

Lemme des poignées de mains

$$2A_n + O(n) = \sum_{\text{sommet}} deg(s) \geq 3S_n$$

$$2A_n + O(n) \geq pF_n$$

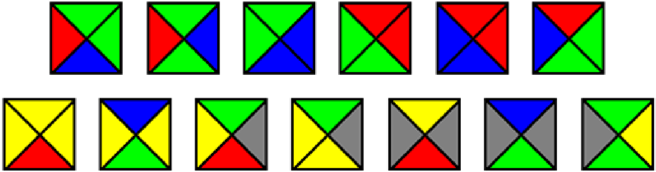
$$O(n) \geq (p-6)S_n \qquad \square$$

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

On se donne une famille de polygones avec des règles d'adjacence.
Peuvent ils paver le plan ?

Paver le plan $\Rightarrow$ des restrictions

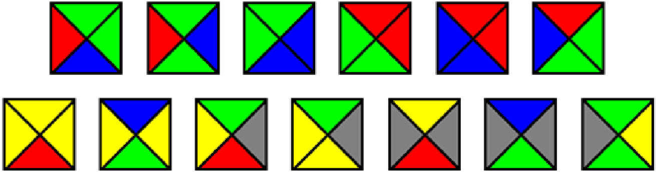
On se donne une famille de polygones avec des règles d'adjacence.
Peuvent ils paver le plan ?



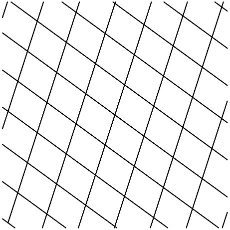
Paver le plan ⇒ des restrictions

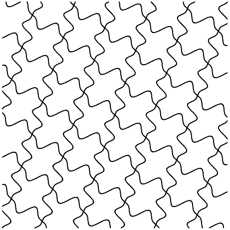
Théorème (R. Berger, 1960)

Il n'existe pas d'algorithme pour décider si une famille de polygones pavent l'espace.

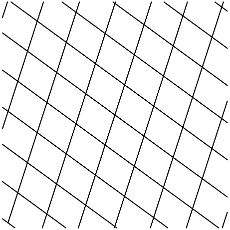


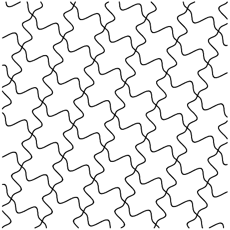
Groupe cristallographique



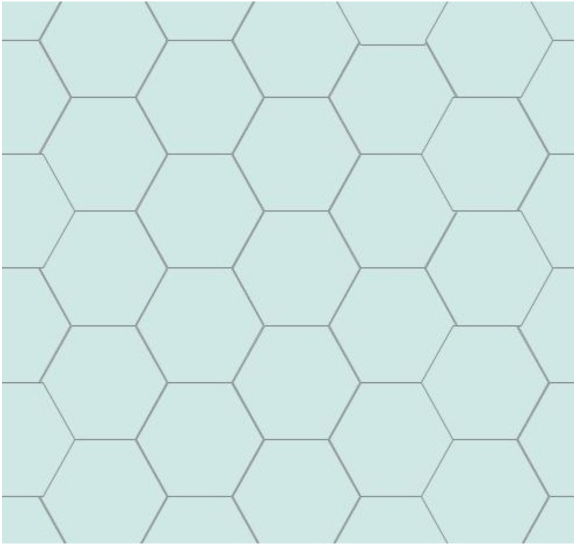


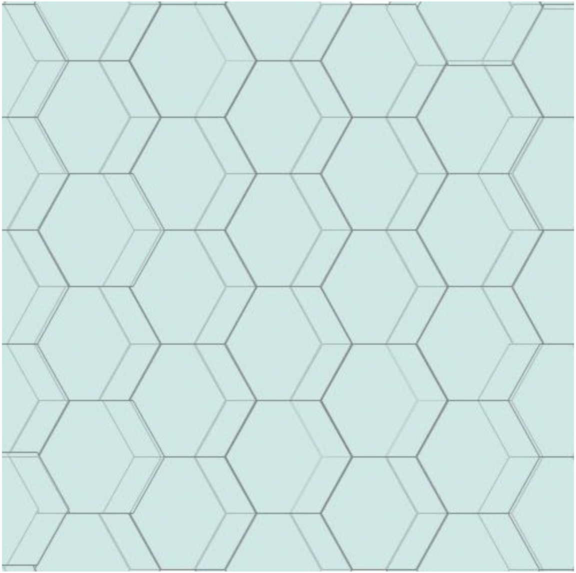
Groupe cristallographique

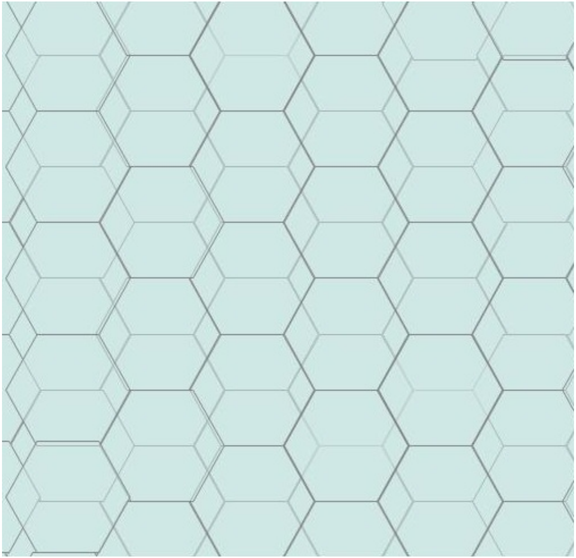


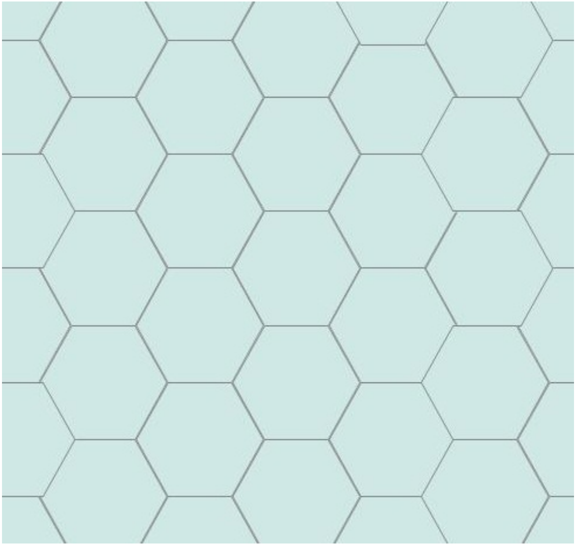


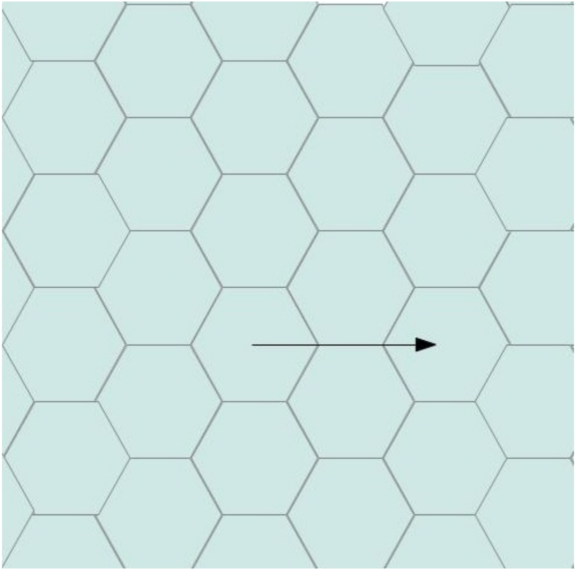
Les symétries du pavages sont indépendantes de la forme de la maille élémentaire.
L'ensemble des symétries d'un pavage est appelé
groupe cristallographique.



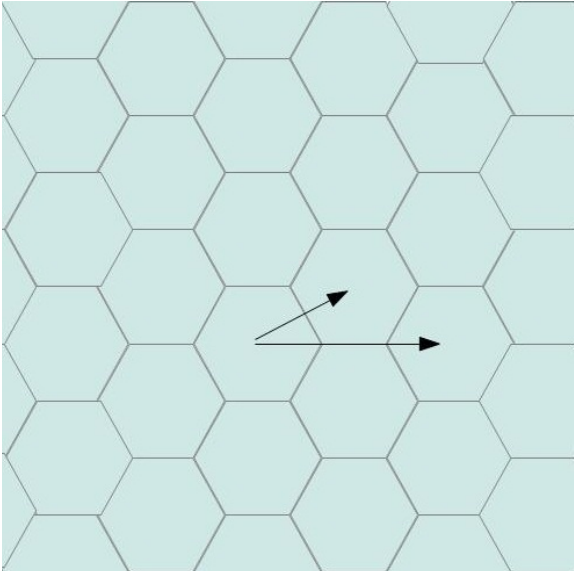




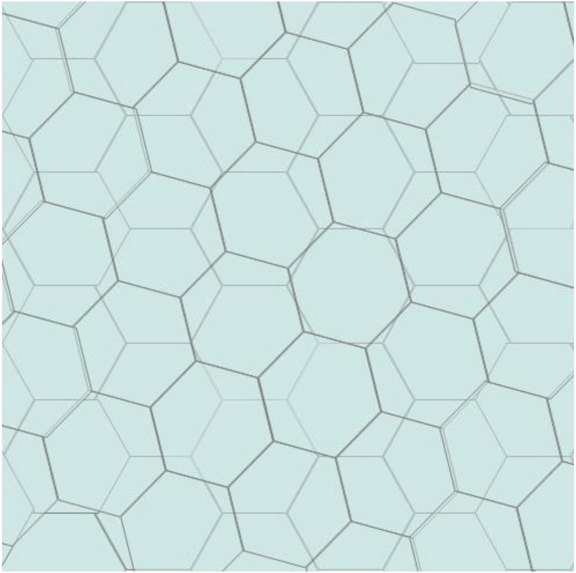




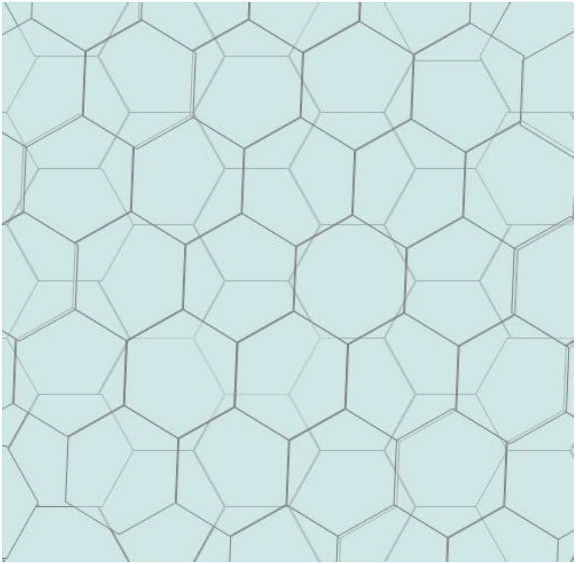
Symétries : translation



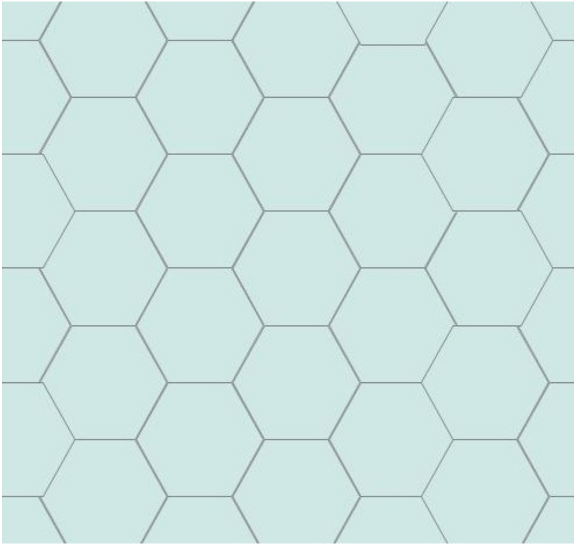
Symétries : translations



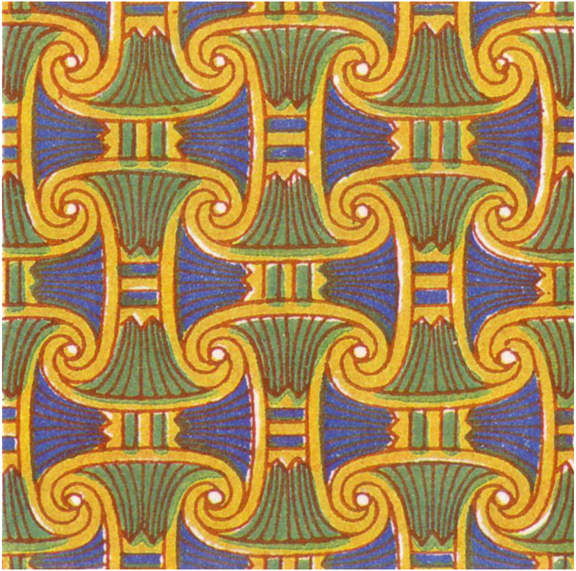
Symétries : translations



Symétries : translations



Symétries : translations ; rotation d'angle $\frac{360}{6} = 60^\circ$



Les groupes cristallographiques

- En 1891, le cristallographe et mathématicien russe Evgraf Fedorov a montré qu'il existait seulement 17 types de groupes cristallographiques du plan.

Les groupes cristallographiques

- En 1891, le cristallographe et mathématicien russe Evgraf Fedorov a montré qu'il existait seulement 17 types de groupes cristallographiques du plan.
- Il existe 219 groupe cristallographique en dimension 3

Les groupes cristallographiques

- En 1891, le cristallographe et mathématicien russe Evgraf Fedorov a montré qu'il existait seulement 17 types de groupes cristallographiques du plan.
- Il existe 219 groupe cristallographique en dimension 3

Feuille1

Type	Réseau	Plus Petite Rotation	Réflexions-translations
p1	parallelogram	aucune	non
p2	parallelogram	Demi-tour	non
pm	rectangular	aucune	non
pmm	rectangular	Demi-tour	non
pg	rectangular	aucune	oui
pgg	rectangular	Demi-tour	oui
pmg	rectangular	Demi-tour	oui
cm	rhombic	aucune	oui
cmm	rhombic	Demi-tour	oui
p4	square	Quart de tour	non
p4m	square	Quart de tour	oui
p4g	square	Quart de tour	oui
p3	hexagonal	Tiers de tour	non
p3m1	hexagonal	Tiers de tour	oui
p31m	hexagonal	Tiers de tour	oui
p6	hexagonal	Sixième de tour	non
p6m	hexagonal	Sixième de tour	oui

Les groupes cristallographiques

Théorème (Bieberbach, 1912)

Dans $\mathbb{R}^d$, il n'existe, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de groupes cristallographiques.

Les groupes cristallographiques

Théorème (Bieberbach, 1912)

Dans $\mathbb{R}^d$, il n'existe, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de groupes cristallographiques.

Question : Quel est ce nombre ? Peut on expliciter ces groupes ?

Les groupes cristallographiques

Théorème (Bieberbach, 1912)

Dans $\mathbb{R}^d$*, il n'existe, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de groupes cristallographiques.*

Question : Quel est ce nombre ? Peut on expliciter ces groupes ?

Plesken & Schulz (2000) énumèrent ces groupes (841) pour $d = 6$.

Instrument de mesure

Un diffractomètre

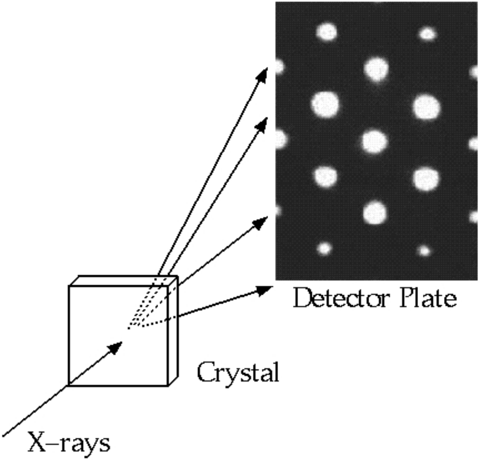
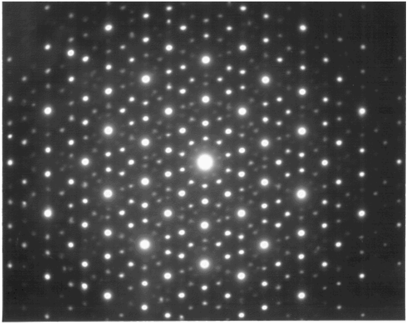


Figure de diffraction de Shechtman



Apparition

• Avant 1982, un paradigme : un spectre de diffraction discret ne provient que d'une structure périodique (i.e. invariante par des translations).

• En 1982 : D. Shechtman *et al.* observe une figure de diffraction disècrte de Al-Mn qui a un symétrie par rotation d'angle $\frac{360}{5}$ impossible par la classification.

Plusieurs quasi-cristaux dans les laboratoires

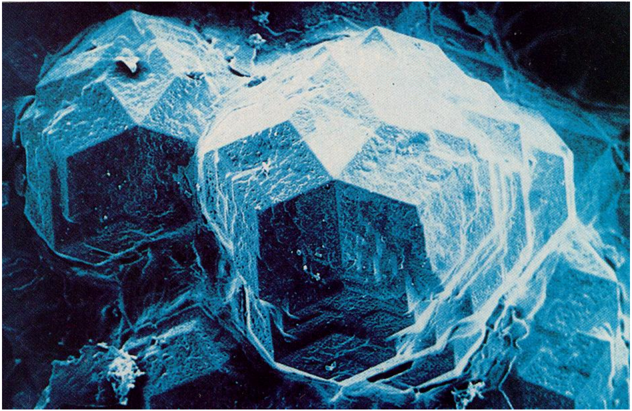
- Al-Mn, Al-Cu-Fe, Al-Cu-Co, Al-Co-Ni, Al-Pd-Mn, Al4Mn, Al6Mn, Al6Li3Cu, Al78Cr17Ru5, Mg32(Al,Zn)49, Al70Pd20Re10, Al71Pd21Mn8.

- C'est une nouvelle structure.

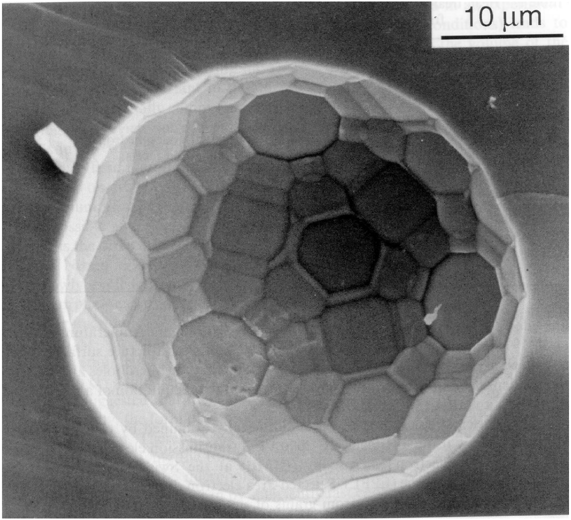
- Le nom de cette nouvelle structure par l'Union Intern. Cristallographie (1992) :

un quasi-cristal

Alliage Al-Li-Cu



Alliage Al-Mg-Pb

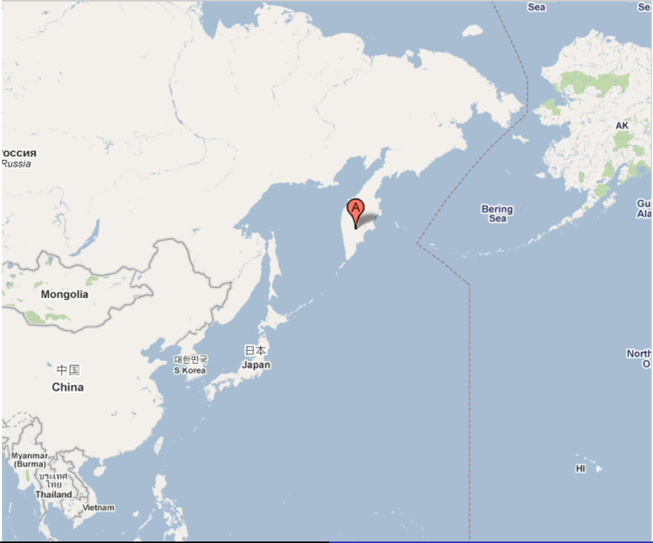


Quasi-cristal naturel ?

• un quasi-cristal (non fabriqué dans un laboratoire) a été découvert en 2009 dans les montagnes de Koriakie (Russie).

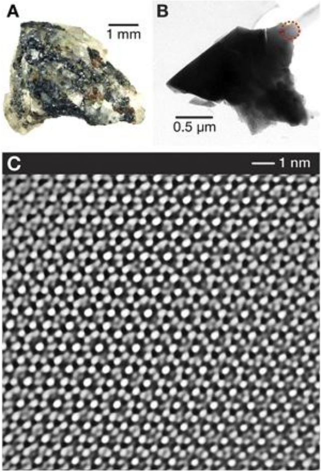
Quasi-cristal naturel ?

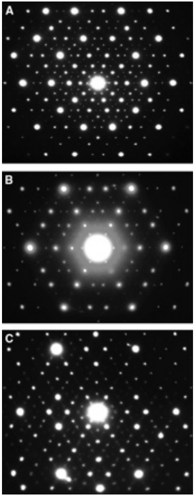
• un quasi-cristal (non fabriqué dans un laboratoire) a été découvert en 2009 dans les montagnes de Koriakie (Russie).



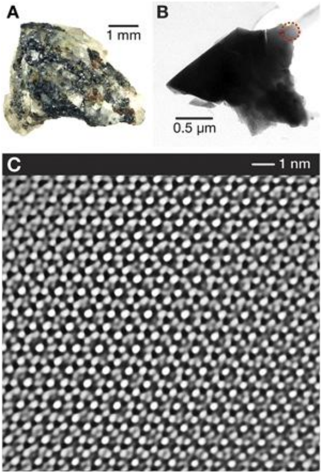
Quasi-cristal naturel : une expédition

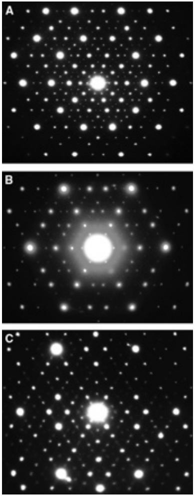
The quest for quasicrystals led Luca Bindi, Valery Kryachko and Paul Steinhardt (top left, left to right) into the Siberian wilderness





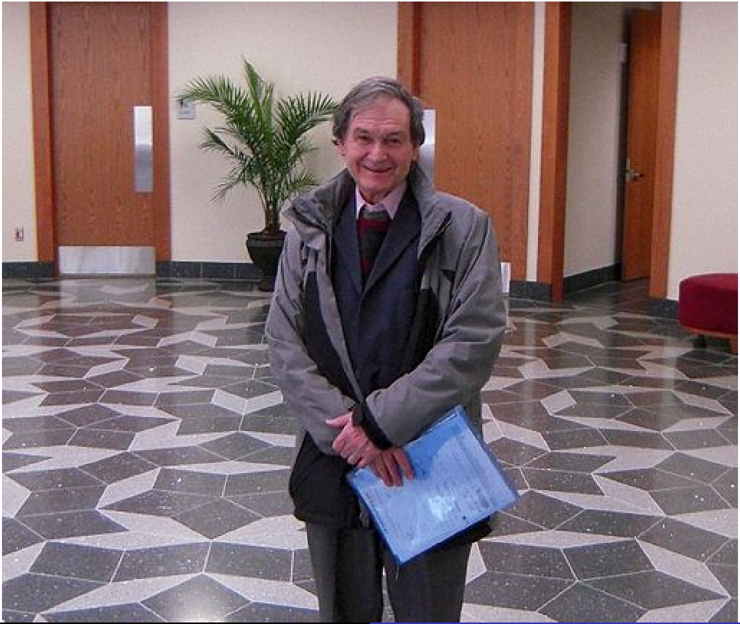
L. Bindi, P. Steinhardt, N. Yao, P. Lu,
Natural Quasicrystals, Science **324** (2009)



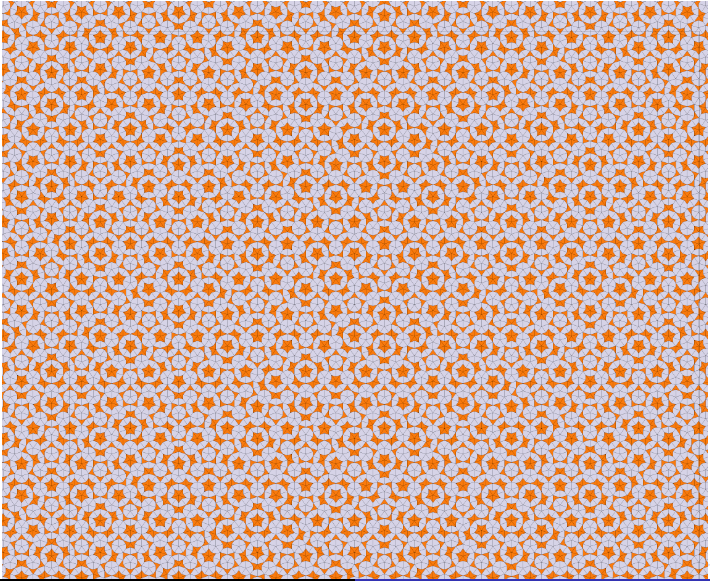


Comment apparaissent ils ? On ne sait toujours pas.

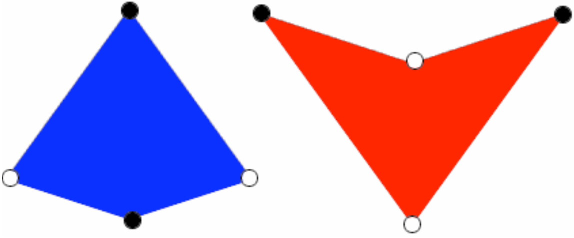
Roger Penrose



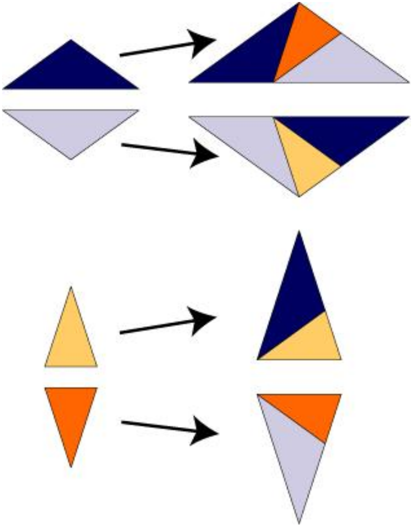
Pavage de Penrose



Pavage de Penrose



Construction du pavage de Penrose



Construction du pavage de Penrose