



Apprendre le nombre et les opérations Que savons-nous des difficultés?

Michel Fayol

Pr Émérite Université de Clermont Blaise Pascal &
CNRS

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr



Laon APMEP Oct 2015



Une série de faits

- Grande importance des mathématiques pour les professions et la réussite scolaire;
- Comparaisons internationales: très importantes différences et **inégalités**;
- **Précocité** des inégalités: importance du milieu socio-culturel et de la préscolarisation;
- Avancées des recherches faisant **espérer des améliorations** si les interventions sont précoces;
- Les performances en mathématiques: **hétérogénéité des composantes**;

2

Résultats des recherches

- Les performances en mathématiques dépendent de **trois dimensions** :
 - Une dimension **spécifique aux mathématiques** associée au traitement des **grandeurs et numérosités**; **très précoce et universelle**;
 - Un ensemble de dimensions **cognitives générales** : langage, mémoire temporaire (de travail), attention, vitesse, espace, émotions;
 - Une dimension sociale et interactive: **attentes et pratiques** familiales (des **parents**) et scolaires (des **enseignants**);

Laon APMEP Oct 2015

3

POUR DÉCRIRE

Le développement d'études longitudinales

Trajectoires

**Performance
initiale**
P1 en T1



**Performance
finale**
P2 à Pn en T2 en Tn

Dimension mathématique

Dimension mathématique

Dimensions cognitives

Dimensions cognitives

Dimensions sociales

Dimensions sociales

Très grandes **différences interindividuelles et intra-individuelles**

Laon APMEP Oct 2015

4

Des difficultés de performances

- Le « sens du nombre » ou intuition des grandeurs et quantités;
- La numération décimale et le transcodage;
- La résolution des opérations: faits numériques, algorithmes;
- Le résolution de problèmes;

Des composantes impliquées

- Le langage;
- L'attention;
- La mémoire à court terme; la mémoire de travail; verbale et visuelle;
- Les capacités spatiales;
- La vitesse de traitement;
- L'anxiété;

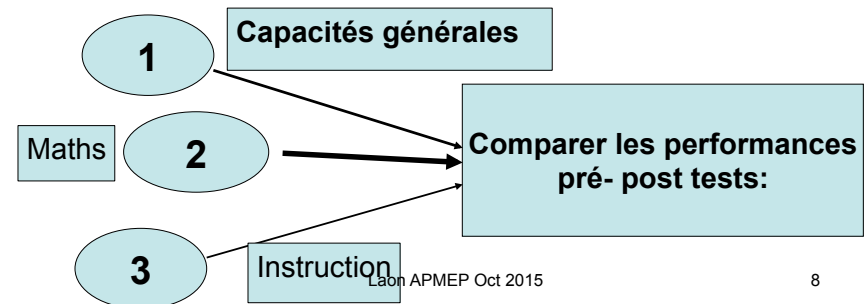
Une démarche: établir des relations causales

- A la recherche de **relations causales**: sur quelles variables pouvons-nous (devrons-nous?) **intervenir en T1** pour induire de meilleures performances en Tn dans des activités dont le champ reste à déterminer;
- **Impact « local » ou généralisable?**

Décrire et modifier les performances

Dowker, 2008; Geary, 2011, 2012

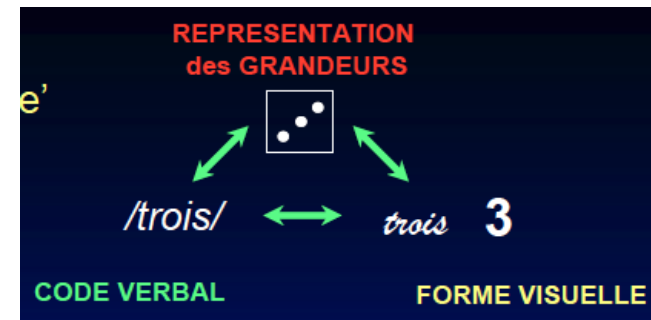
- Dimensions (1), (2), (3), etc. susceptibles d'influer;
- Évaluations pré- et post-tests immédiat et différés: $t_1 \dots t_n$; de quelques jours à plusieurs années;
- Tester variables liées;
- Recherche de relations causales, généralisables?



Le modèle du triple code

Une base de travail, insuffisante pour l'étude du développement

Trois types de représentations



Représentation des grandeurs et quantités (magnitudes), quelles qu'elles soient: **approximative** et **analogique**.

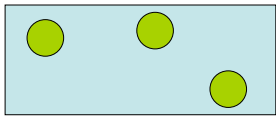
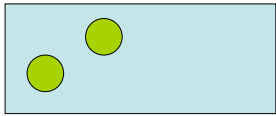
1 Des traitements élémentaires

Deux systèmes de traitement :
subitizing; évaluation approximative des quantités; le sens du nombre

Objectif de cette première partie

- Comment s'effectue le passage **d'un traitement intuitif et approximatif** des grandeurs et quantités, disponible dès la naissance mais qui s'affine au fil du temps, à **un traitement précis** (jusqu'à 10) et conforme aux contraintes culturelles de ces mêmes grandeurs et quantités dont on attend qu'il soit en place à l'entrée à l'école élémentaire;
- Facteurs susceptibles d'influer sur ce passage;

Subitizing 1, 2 et 3



- Percevoir très rapidement et très exactement de petites quantités : **subitizing**;
- Discrimination des **petites quantités: 1, 2, 3 peut-être 4 voire 5**; bébé;
- Représentations d'**entités juxtaposées en mémoire (O O O)**, **modèle mental**, pas forcément numérique;
- Semble affecté chez certaines populations (Down? Dyscalculiques? Associé à la **MT**, Ashkenazi, 2013; Piazza et al., 2011;

Laon APMEP Oct 2015

Discrimination, évaluation, transformations

Traitement approximatif des grandeurs ou grandes collections discrètes

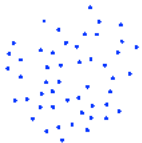
Laon APMEP Oct 2015

14

Discriminer les grandeurs et les grandes numérosités



Les nouveau-nés de quelques heures discriminent deux collections lorsque leur rapport est de 3 à 1 (24 et 8); à l'âge de 6 mois, la discrimination devient possible pour un rapport de 2 à 1 (16 et 8); à l'âge de 9 mois, elle le devient pour un rapport de 3 à 2 (12 et 8 ou 18 et 12).



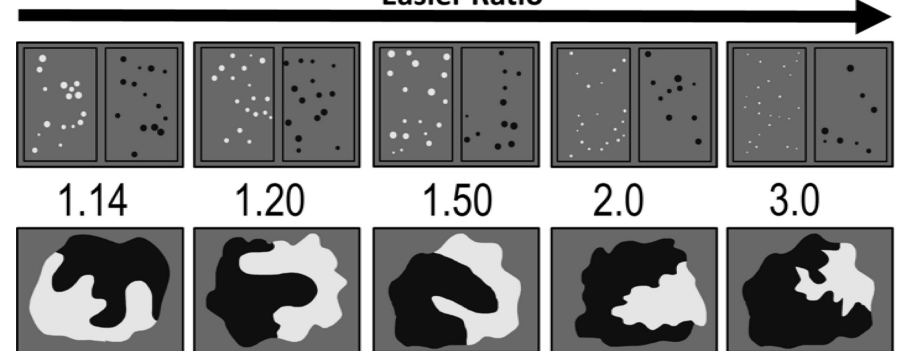
Les capacités de **discriminations analogiques** continuent de s'affiner en fonction de l'âge et de l'expérience, quelles que soient les cultures;

Laon APMEP Oct 2015

15

Comparaisons de grandeurs et quantités

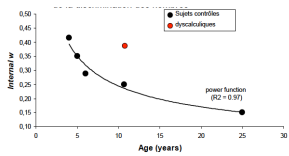
Odic Dev, Psv 2013 N23
Easier Ratio



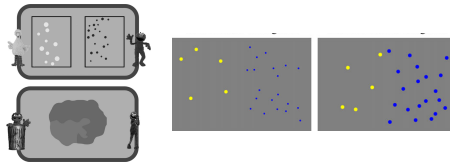
Laon APMEP Oct 2015

16

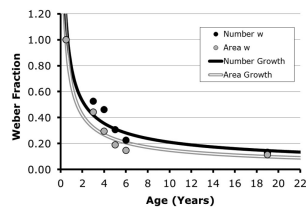
Un modèle des difficultés et atteintes



Acuité plus faible des enfants dyscalculiques (Piazza et al. 2011)
Sensibilité à l'espace occupé (**congruence** surface quantité (Bugden et al., 2015) chez DD
Importance de l'attention (Geary, 2013)



**Système d'évaluation
approximative (SEA)
Analogique**



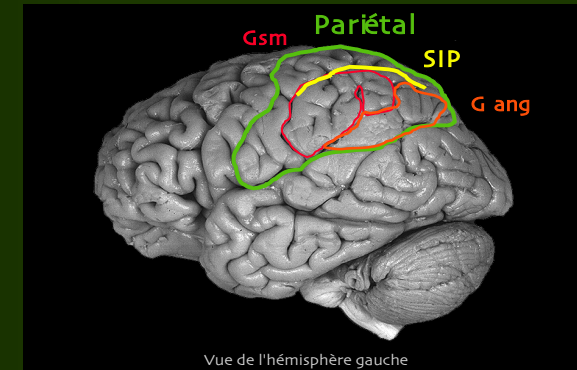
Affinement progressif des discriminations de grandeurs et quantités. Maturation?
Certains individus atteignent une acuité insuffisante ou y parviennent lentement

Laon APMEP Oct 2015

17

Localisation cérébrale

Introduction: Un "organe" numérique?



Laon APMEP Oct 2015

18

Que faire?

- Le problème est triple:
 - Raffiner les **capacités de comparaisons** des grandeurs et quantités; établir l'équivalence des quantités; correspondances terme à terme;
 - Acquérir **un système symbolique** (noms de nombres, chiffres arabes, ou autre);
 - **Associer les symboles aux quantités** dans les deux sens: cardinal (notion très abstraite); évocation et production automatiques;

Laon APMEP Oct 2015

19

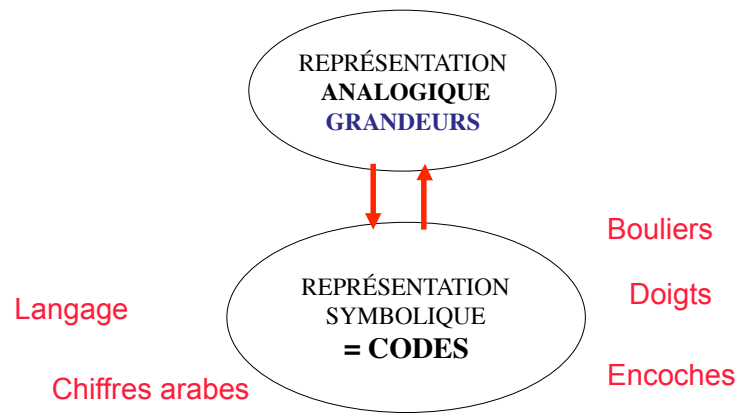
2 Le traitement symbolique

Différents systèmes dont l'apprentissage et l'efficacité varient

Laon APMEP Oct 2015

20

De la représentation analogique à la représentation symbolique



Laon APMEP Oct 2015

21

L'importance des codes



- Essayez de résoudre:
- $XXXIV \times XXIII$
- $CXXIX - XXXVIII$
- Ce ne sont pas les quantités qui posent problème, mais **leur codage** et la **manipulation** des codes;
- Source principale de difficulté: le **code**; sa **signification**; sa **vitesse** d'accès (dans les 2 sens); sa **manipulation**;

Laon APMEP Oct 2015

22

2.1 Apprentissage verbal

Relativement facile, mais trompeur

Laon APMEP Oct 2015

23

Le système verbal

- **Lexique** : un, deux, six, douze, vingt, cent, mille
- **Bases** : dix, vingt, soixante
- **Combinatoire** : -> syntaxe traduisant des combinaisons « Additives » (trente six) ou « Multiplicatives » (quatre vingt ; trois cents)
- **Problèmes de régularité** : mémorisation du lexique ; acquisition et mise en œuvre de la syntaxe

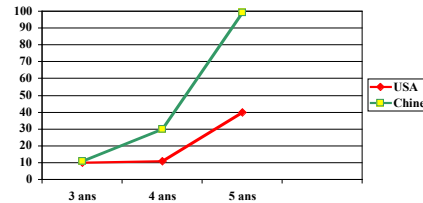
Laon APMEP Oct 2015

24

Caractéristiques de la représentation verbale Comparaison anglais, chinois, français

	Français	Anglais	Chinois
1	un, une	one	yi
2	deux	two	er
3	trois	three	san
10	dix	ten	shi
11	onze	eleven	shi yi
12	douze	twelve	shi er
13	treize	thirteen	shi san
20	vingt	twenty	er shi
21	vingt et un	twenty-one	er shi yi
22	vingt-deux	twenty-two	er shi er
23	vingt-trois	twenty-three	er shi san

Lenteur relative de l'apprentissage;
Différences linguistiques précoces (*Hodent, 2005; Sarnecka, 2014*)
Effets secondaires sur la capacité de mémoire à court terme;



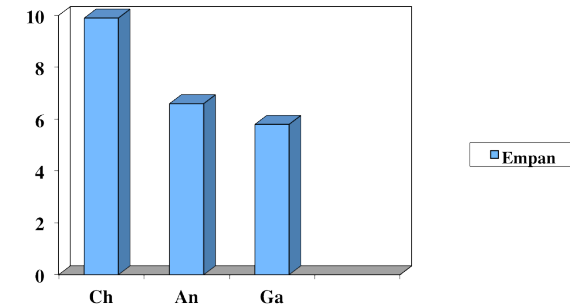
Laon APMEP Oct 2015

25

Privilégier les autres codes?
Notation arabe; utilisation des doigts; etc.

Variations d'empan mémoriel

- Ch = chinois; An = anglais; Ga = gallois



Anderson, J.R., 1994

Laon APMEP Oct 2015

Empan de chiffres

26

La relativité de la dimension verbale

- En **Amazonie**: peuplades sans séquence étendue de noms de nombres : limitée à « un, deux, trois.. »;
- Flou de appariements entre noms de nombres et quantités associées: 1 systématiquement appliqué; 2 le plus souvent aussi; mais 3 renvoie parfois à deux, parfois à 3 ou à 5;
- Pourtant, capacité d'évaluation approximative (donc représentation analogique fonctionnelle) et correspondance terme à terme exacte;
- C'est la relation code quantité qui pose problème;**

Laon APMEP Oct 2015

27

2..1.1 Les tout-débuts et la dimension verbale

Des débuts difficiles et une évolution lente

Laon APMEP Oct 2015

28

Des apprentissages lents

- Les enfants apprennent les noms des nombres un, deux et trois en les associant à des quantités ;
- Cette acquisition suit un **ordre strict** et demande plusieurs mois
 - en premier « **un** » (vers 2 1/2 ans),
 - puis **2** (vers 3 ou 3 1/2 ans),
 - puis **3** (vers 3 1/2 ou 4 ans) ;
 - puis **4** et la suite
- Acquisition mise en évidence par **deux épreuves**, d'une part « Donne N », d'autre part « Combien y a-t-il sur une carte? » ;
- Plus tard (au-delà de 4), les enfants découvriront et généraliseront le **principe cardinal et la fonction de successeur** ($N, N+1, (N+1)+1\dots$);

La notion de cardinal

Mix, 1999

- La reconnaissance de l'**équivalence numérique** (= le **cardinal**) de petites quantités (2, 3 et 4) est d'autant plus facile chez les plus jeunes (jusque vers 4 ans) que:
 - Les entités se ressemblent;
 - La disposition spatiale est proche;
 - Les enfants connaissent la suite conventionnelle des noms de nombres;

De la représentation analogique à la représentation verbale

•Deux problèmes :

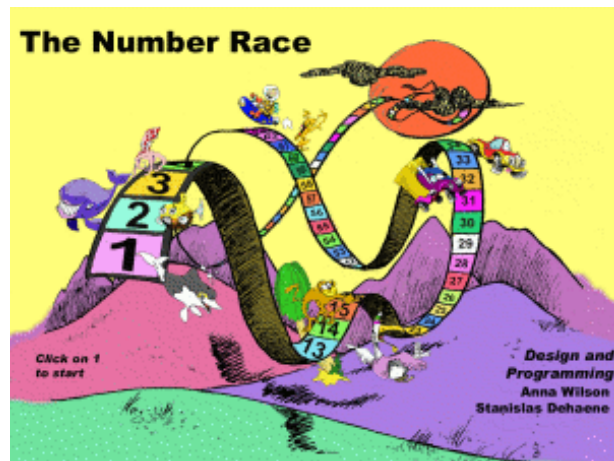
–**Catégorisation** : la cardinalité devrait être indépendante par rapport aux caractéristiques perceptives des collections (3 étoiles; 3 fourmis, 3 voitures);

–**Le langage code la quantité par l'ordre** : 6 est plus grand que 5 puisque 6 vient après 5; les enfants doivent apprendre à évoquer la quantité à partir de la succession des mots de nombres;

2.1.2. Relation non-symbolique / symbolique

La Course aux nombres

La course aux nombres



Laon APMEP Oct 2015

33

Recherche en situation scolaire

- 53 enfants de GSM entraînés 14 semaines par demi-groupe en 2 fois 7 semaines. Deux jeux : la course au nombre et un jeu d'initiation à la lecture;
- Un pré-test et deux post-tests (T1 et T2): Diverses épreuves : comparaisons verbales ou arabes ou non symboliques, connaissance de la suite verbale, additions;
- Progrès pour seules comparaisons symboliques, verbales ou chiffres arabes, pas comparaisons non symboliques; plus pour faibles; (Wilson et al., 2009);
- Généralisation non testée;

Laon APMEP Oct 2015

34

2.2. Le code indo-arabe

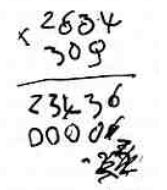
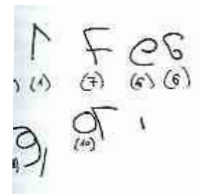
Différencier les caractéristiques matérielles du code de sa structure

Laon APMEP Oct 2015

35

Caractéristiques matérielles

- Code écrit;
- Implication des dimensions visuo-spatiales: troubles correspondants; orientation droite-gauche (< >; 14 vs 41; etc);
- Apprentissage de la forme graphique : inversions de 3, 5, 7 et 9 (Fisher, 2010)
- Alignement; Mazeau, 1995



Laon APMEP Oct 2015

Plusieurs difficultés

- **Transcrire en chiffres arabes les quantités et grandeurs:** un, deux, trois, n chiffres; notation positionnelle; relation entre code et quantités (base 10);
- **Passer d'un code à un autre :** oral -> indo-arabe, et réciproquement; contraintes de MCT et MT : forme, longueur et ressemblance phonologique;
- **Opérations posées:** manipuler les écritures en relation avec les traitements des quantités;

Laon APMEP Oct 2015

37

Le code indo-arabe

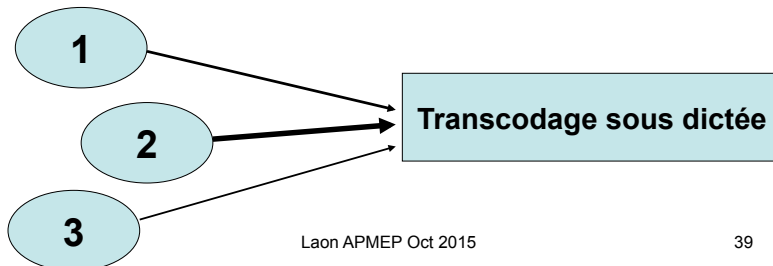
- Lexique restreint (10 éléments dont zéro);
- **Notation positionnelle** (la valeur dépend de la position: 1; 10; 100; 1000);
- Erreurs de position : 201 vs 210; importantes **difficultés en 2ème et 3ème primaires;**
- Problèmes de **transcodage oral -> écrit :** erreurs spécifiques en Français (6012 pour soixante douze; 42016 pour quatre vingt seize)); non transparence de la base dix à l'oral;
- Erreurs persistantes en début de second degré pour la transcription des grands nombres;

Laon APMEP Oct 2015

38

Réussir le transcodage

- Maintenir la configuration verbale en MCT (1);
- Déterminer le nombre de chiffres (frame) (2);
- Transcoder pas à pas (MT va-et-vient de l'attention)
- Capacité de contrôle ultérieur (3);



Laon APMEP Oct 2015

39

3. Relations entre analogique et symbolique

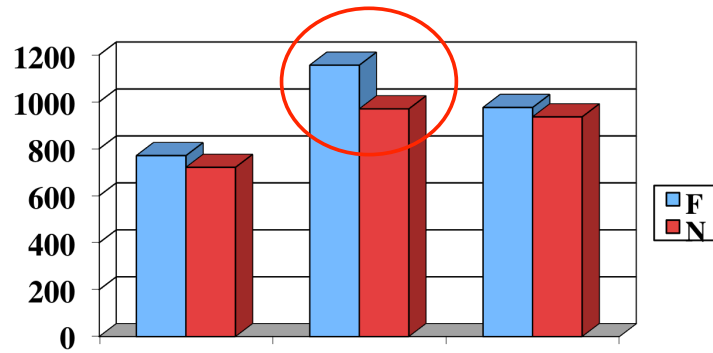
De l'évaluation à la prédiction;
Comparaisons et ligne numérique

Laon APMEP Oct 2015

40

Comparaisons de chiffres et de collections

Landerl et al., 2004; Rousselle & Noël, 2007



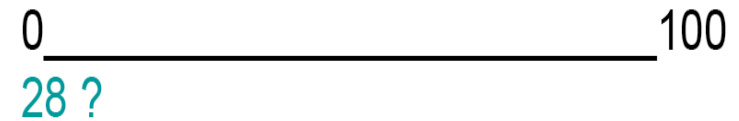
Comparaison physique Objets physiques Collections

Les FC sont plus lents que les N, mais surtout, leur lenteur est très accusée pour les comparaisons de chiffres arabes.

Laon APMEP Oct 2015

41

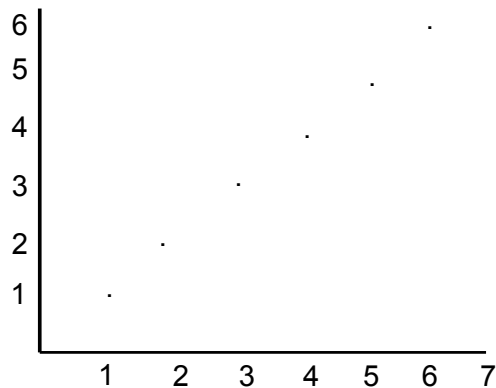
La ligne numérique comme outil d'évaluation de la représentation



Laon APMEP Oct 2015

42

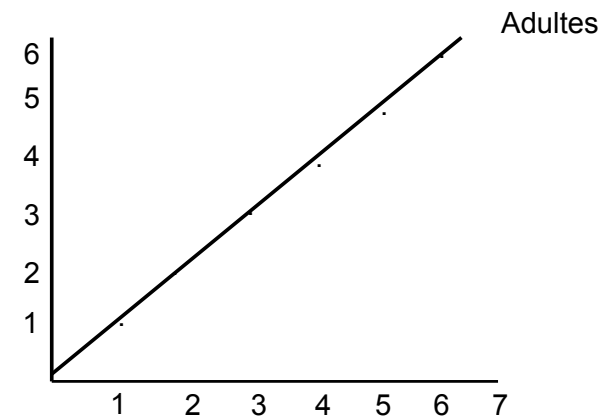
Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Laon APMEP Oct 2015

43

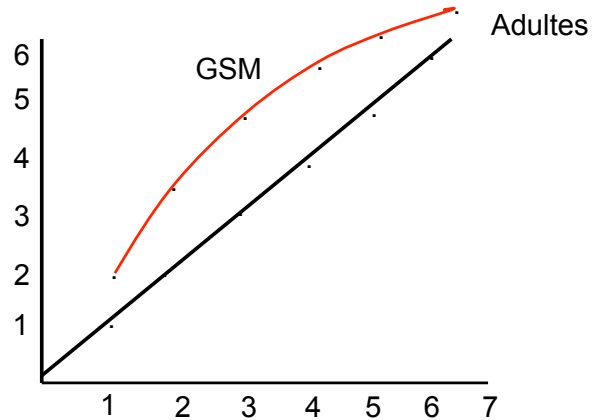
Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique



Laon APMEP Oct 2015

44

Évaluer les relations entre représentations analogique et symbolique

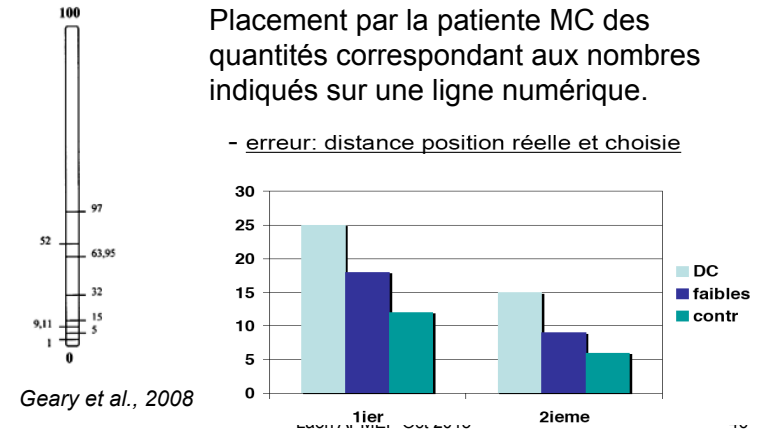


Laon APMEP Oct 2015

45

Troubles de la relation entre représentations analogique et symbolique

Polk et al., 2001



Geary et al., 2008

Évolution des estimations

Siegler, R.S., & Booth, J. L. (2004); Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006)

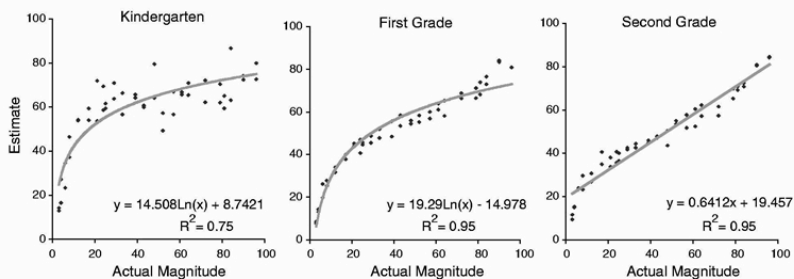


Figure 2. Progression from logarithmic pattern of median estimates among kindergartners (left panel) to linear pattern of estimates among second graders (right panel) in Experiment.

Évolution de la mise en relation entre système symbolique verbal (quinze...) et représentation spatiale: du logarithmique au linéaire.

Laon APMEP Oct 2015

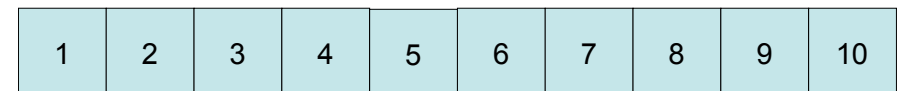
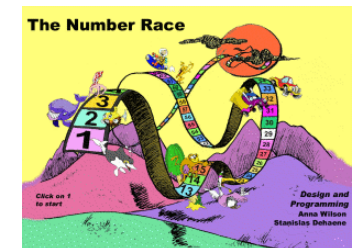
47

Intervenir?

Réduire le délai de mise en relation entre symbolique et quantité?

- Travailler avec des dispositifs de type « jeu de l'oie » ou « jeu de petits chevaux »;

Wilson et al., 2009



(bouliers?);

- Estimateur;
- Course aux nombres;

Laon APMEP Oct 2015

48

Décimaux et fractions

- Généralisation des propriétés de entiers naturels;
 - nombres les plus longs sont les plus grands (4, 345 plus grand que 4,4);
 - Influence des valeurs des chiffres (0,1 conçu comme plus petit que 0,02);
 - Nombres avec zéro final sont plus grands (3,400 plus grand que 3,5)
- Placement difficile sur la ligne numérique;
- Peu de données relatives aux entraînements;

Laon APMEP Oct 2015

49

Numération

- Pas de difficulté jusqu'à 10 (sauf troubles de la coordination);
- Difficile: notation de position et sa relation aux quantités;
- Difficile: relation entre opérations posées et quantités correspondantes;
- Très difficile: fractions et décimaux;
- Manque de données relatives aux effets de l'instruction;

Laon APMEP Oct 2015

50

POUR CONCLURE

Deux dimensions

Laon APMEP Oct 2015

51

Deux dimensions

- Une **dimension spécifiquement mathématique**; poids dans le devenir initial des performances arithmétiques; précocement impliquée; améliorabile précocement dans des limites;
- Des **dimensions cognitives générales** : le langage et les systèmes symboliques (leurs propriétés); la MT, presque toujours impliquée (différentes sous-dimensions); la vitesse; l'attention; l'espace;

Laon APMEP Oct 2015

52

Deux modes d'intervention

- Intervenir **sur le sens du nombre, le dénombrement, la résolution des opérations**; impact à court terme; à long terme? Jusqu'où?
- Efficacité d'interventions en maternelle avec enfants défavorisés ; stabilité des résultats 8 semaines plus tard (*Jordan et al., 2012; Ramani & Siegler, 2008; Baroody et al., 2009*);
- Efficacité d'interventions combinant opérations et stratégies (*Carr et al., 2011*);

Laon APMEP Oct 2015

53

Deux modes d'intervention

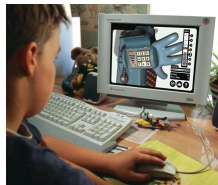
- **Intervenir sur les capacités générales:** systèmes symboliques; MT; vitesse?; attention? Pas toujours d'effets à court terme; effets moyen terme?
- Interventions cherchant à améliorer la MT (*Klinberg et al., 2002, 2005* avec des ADHD de 7-12 ans ; *Thorell et al. 2009* avec enfants préscolaires; *Holmes et al., 2009, 2010* avec impact positif sur les performances en maths);

Laon APMEP Oct 2015

54

Deux modes d'intervention

- Intervenir sur les capacités générales: systèmes symboliques; MT; vitesse?; attention? Pas toujours d'effets à court terme; effets moyen terme?
- Interventions cherchant à améliorer l'attention (*Diamond, 2011*);
- Moindres succès avec la vitesse;



Laon APMEP Oct 2015



Des questions

- Rôle de l'environnement socio-culturel; mal connu, peu évalué; interventions?
- Rôle de l'enseignement dispensé; peu étudié;
- Rôle de l'anxiété (*Young et al., 2012; Maloney, 2012*), y compris chez les enseignants; que faire?
- Et sans doute bien d'autres....

Laon APMEP Oct 2015

56



Merci pour votre attention

Pour en savoir plus

Michel Fayol (2013 2^{ème} édition). L'acquisition du nombre. Paris: Presses Universitaires de France, QSJ

Michel.fayol@univ-bpclermont.fr