Conférence

DE LA MODELISATION DU MONDE AU MONDE DES MODÈLES

QUELS ENJEUX POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES ?

Jean-Claude DUPERRET

Professeur de mathématiques
IUFM de Champagne-Ardenne
IREM de Reims
COPIRELEM

Résumé

On est passé en 30 ans d'un enseignement dit de « structure » à un enseignement dit de « modélisation », sans que cette évolution ait été clairement explicitée. Cela renvoie à la question bien ambitieuse de la modélisation, surtout lorsqu'on la pose sous l'angle des mathématiques. Si la plupart des autres disciplines scientifiques ont pour objet de « décrire » et de « modéliser » un point de vue du « monde réel », point de vue différent suivant ces disciplines, comment les mathématiques peuvent-elles s'inscrire dans ce rapport au monde réel ? Les mathématiques ont-elles pour objet de « décrire » la réalité, ou ne se contentent-elles pas d'une action intellectuelle sur une réalité déjà abstraite ? Qu'est-ce qu'un modèle mathématique ? Y a-t-il unicité du modèle pour traduire une « réalité », ou celui-ci n'est-il pas lié à « l'intention » de modélisation ? En quoi la connaissance du modèle permet-elle « d'éclairer » la réalité, voire de l'expliquer et d'avoir une attitude « opérationnelle » et « décisionnelle ».
Pour essayer d'éclairer ces notions de « modélisation » et de « modèles mathématiques », et de balayer les questions ci-dessus, l'exposé proposera de nombreux exemples, dont certains centrés sur les mathématiques de l'école primaire. Les notions de forme, de grandeur et de mesure en seront un fil conducteur, et permettront de visiter un certain nombre des « mondes mathématiques » qui constituent les piliers d'un enseignement de mathématiques pour tous.

Dans le cadre de cet exposé, je ne parlerai pas, ou très peu, d'expérimentation : je renvoie pour cela à la conférence de Daniel Perrin au colloque COPIRELEM de Dourdan, parue dans les actes correspondants. Je me centrerai donc sur les questions de la modélisation et du rapport des mathématiques au « réel », et vous proposerai une revisite avec cet éclairage d'un enseignement de mathématiques pour tous balayant l'école, le collège…et au-delà pour certains développements.

Pour essayer de rentrer dans la complexité d'un tel sujet, je m'appuierai sur de nombreux exemples, liés à mon expérience d'enseignant et de formateur, et aux questions que je me suis posées… et que je me pose encore !

Grâce aux IREMS, j'ai eu la chance de rencontrer beaucoup de collègues qui m'ont permis de faire évoluer ma réflexion, et je pointerai ici plus particulièrement trois commissions qui représentent beaucoup pour moi :

- la commission Inter-IREM premier cycle dont j'ai été le responsable au temps des « suivis scientifiques » qui accompagnaient les nouveaux programmes de 1986,
- la COPIRELEM dont je suis membre depuis deux ans qui m'a permis de poursuivre et approfondir ma réflexion sur l'enseignement des mathématiques à l'école,
- la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques) où j'ai beaucoup appris de ses différents membres, et plus particulièrement de son président Jean-Pierre Kahane qui a été pour moi un « maître à penser ».

Ce parcours que je vais vous proposer est donc à la fois le résultat d'un cheminement personnel, et de toutes ces rencontres et échanges que j'ai pu avoir. Il m'est bien impossible de citer tous ces collègues qui m'ont enrichi. Si certains, que je n'aurais pas cités, se reconnaissent dans tel ou tel de mes propos, qu'ils soient ici remerciés de l'éclairage qu'ils m'ont apporté !

D'UN ENSEIGNEMENT DE STRUCTURE A UN ENSEIGNEMENT DE MODELISATION… OU LES TRIBULATIONS D'UN ENSEIGNANT DE MATHEMATIQUES EN COLLEGE

Après une année de CPR à Lyon, j'ai commencé ma carrière en 1972 comme professeur au collège Albert Camus, à La Chapelle Saint Luc, une ZUP située à côté de Troyes. C'était l'époque des « mathématiques modernes » ! À l'époque, ne se posait pas la question du rapport des mathématiques au réel : les mathématiques étaient un magnifique édifice qui se construisait de façon purement interne. Pour illustrer cela, je vais prendre quelques exercices et définitions qu'on trouvait alors dans les manuels.

UNE ABSENCE DE RAPPORT AU « REEL » AVEC LES MATHEMATIQUES MODERNES

Des exemples d'énoncés :

En sixième, un des grands enjeux était l'écriture d'ensembles « en extension » et « en compréhension », et le passage d'une écriture à l'autre :

Collection Mauguin – classe de 6ème

Définissez en compréhension :

a) L'ensemble de lettres {v, w, x, y, z}

b) L'ensemble de nombres entiers {41, 43, 45, 47, 49}

On trouvait bien quelques tentatives d'interdisciplinarité :

Écrivez en extension un ensemble A formé de cinq éléments qui soient des oiseaux. Une outarde peut-elle être un élément de A ?

On peut imaginer la tête des élèves sur la présence ou non de l'outarde dans cet ensemble !

En cinquième, l'étude des relations occupait une place prépondérante. Sous forme de boutade, je dirais volontiers que c'était « le royaume des flèches », avec les différents diagrammes du programme. Voici un énoncé qui se voulait certainement en prise avec le « quotidien ».

Collection Bréard – classe de 5ème

Dans l'ensemble des élèves de la classe, on considère la relation : «…est né(e) la même année que… »

Est-ce une relation d'équivalence ?

Donner, le cas échéant, les classes d'équivalence.

On attendait des élèves qu'ils « récitent » en les adaptant au problème les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité : « tout élève est né la même année que lui même », « si un élève est né la même année … »
On peut noter que, dans cet exercice, les classes d'équivalence sont relativement immédiates !

Quelle définition des objets mathématiques ?

La définition des « objets mathématiques » se faisait sans aucune relation au monde réel, mais uniquement dans la logique interne de construction des différentes structures. Je ne peux pas résister au plaisir de vous rappeler comment était à l'époque définie la droite affine en quatrième, époque où « Thalès » n'était qu'un axiome servant à « coordonner » les différentes structures des droites affines pour définir le plan affine :

Collection Mauguin – classe de 4ème

Soit (Δ, g) une droite réelle et H l'ensemble de toutes les bijections h telles que :
$(M \in \Delta)$ $[h(M) = ag(M) + b]$ $(a \in 3^*, b \in 3)$Le couple (Δ, H) est appelé droite réelle affine obtenue à partir de g ; Δ en est le support.

Je dois dire que je garde de cette époque le souvenir d'un enseignement facile, entièrement géré par l'enseignant, laissant bien peu de place à une réelle activité des élèves. Même les parents d'élèves regardaient, certes avec un peu d'inquiétude, mais aussi avec une certaine « admiration » cette construction des mathématiques qui n'avait aucune résonance avec leur propre parcours d'élève.

LES « NOUVEAUX PROGRAMMES » DE 1986

C'est au contact des IREM que j'ai commencé à me poser la question de la pertinence de ces mathématiques modernes, à la fois dans leur rôle de sélection, mais aussi de leur capacité de construction d'un vrai outil scientifique à la disposition des élèves et des autres disciplines.
Toutes ces questions fortement posées par différents instituts et associations ont conduit aux nouveaux programmes de 1986, où les mots-clés sont devenus pour le collège « activités » et pour l'école « situations-problèmes », mettant en avant les problèmes concrets, quotidiens, issus du monde réel, et prônant une démarche expérimentale. Le mot de « modélisation » ne figure pas dans ces programmes.
Cette période fut pour moi une formidable « bouffée d'air frais » en tant qu'enseignant, et me donna la chance de pouvoir développer un travail en équipe aussi bien au niveau

de mon collège qu'au niveau de la commission « Inter-Irem Premier Cycle » investie dans les « suivis scientifiques », commission dont je fus alors le responsable.

Des spaghettis réels…

Dans le cadre de ces nouveaux programmes, j'essayais au maximum de mettre les élèves en situation d'activité (versant parfois dans l'activisme), et pour introduire l'inégalité triangulaire en quatrième j'eus une idée que je trouvais a priori géniale : j'amenais des spaghettis en classe, en donnais quelques uns à chaque élève, et leur demandais de les « casser » en trois morceaux « au hasard ». Ils devaient alors essayer de faire un triangle avec ces trois morceaux. Je leur demandais de mesurer la longueur de chacun des morceaux, et de conjecturer à partir de cette mesure une règle qui permette de discriminer les cas où ils obtenaient des triangles des autres. L'état de la classe à la fin de l'heure m'a déterminé à ne pas reconduire une telle expérience !

…aux spaghettis mathématiques

Dans notre collège, nous suivions les classes de quatrième en troisième. Je voulais revenir sur cette expérience pas très heureuse des spaghettis, et pour ce faire, j'inventais le « spaghetti mathématique ». C'était un spaghetti de longueur 1, avec équiprobabilité de « cassure » (ce qui est évidemment inconcevable avec un spaghetti réel !). Et pour faire ces cassures, j'utilisais la simulation. J'expliquais donc aux élèves ce nouveau contexte, et leur proposais de faire ces cassures avec leur calculatrice en utilisant la touche « random » qui leur donnait à l'époque un nombre compris entre 0 et 1 avec 3 chiffres après la virgule. Avec 3 tirages aléatoires (ex : 0,167 ; 0,534 ; 0,435), ils simulaient la cassure de 3 spaghettis mathématiques, et pour donner un sens « tangible » à l'expérience, je leur proposais de multiplier par 100 chacun des nombres obtenus, ce qui leur donnait 3 mesures de longueur en mm, et ils pouvaient ainsi vérifier par construction s'ils avaient ou non « tirer » un triangle (vous aurez noté que cette nouvelle situation ne reproduit pas l'expérience précédente où je cassais un spaghetti en 3, alors que là je casse 3 spaghettis en 2). L'objectif de la séance était d'arriver à se passer de l'expérience physique pour décider simplement avec les 3 tirages si on obtenait un triangle ou non via l'inégalité triangulaire immédiatement traduite par : « il ne faut pas qu'un des nombres soit plus grands que la somme des deux autres ».
Forts de cette règle, les élèves effectuèrent alors 10 tirages, et, sans avoir vraiment préparé ce passage aux statistiques, je proposais de voir quel était le pourcentage des triangles obtenus. Devant le résultat (48%), les élèves me demandèrent : « c'est bon ? » ; « c'est ça ? » ; « c'est juste ? », comme s'ils pensaient que je connaissais « ce résultat » ? Leur questionnement pouvait être traduit par : existe-t-il un modèle mathématique qui me permette d'affirmer que ce résultat est « vraisemblable » ? Et j'étais bien incapable de leur répondre, sinon en faisant tourner mon ordinateur et en constatant qu'il y avait une certaine stabilisation de la fréquence autour de 50%. Je crois que ce fut mon premier vrai contact avec la modélisation.

LA MODELISATION

Pour préparer cet exposé, j'ai lu un certain nombre de textes sur la modélisation, qui m'ont montré la complexité de ce thème et la diversité des approches. Pour cet exposé, je me contenterai des caractérisations d'une telle démarche que je donne ci-dessous, et je proposerai alors de voir en action cette notion de modélisation dans une certain nombre de domaines des mathématiques, en l'illustrant avec de nombreux exemples qui vont de l'école à l'université.

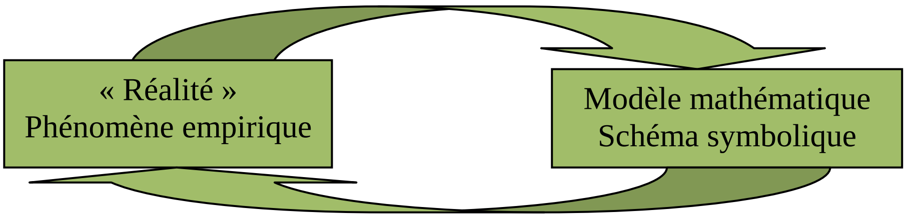
Modélisation

Modéliser, c'est « re-présenter » une situation d'une certaine réalité dans un modèle (mathématique pour nous), « re-présenter » étant pris au sens de présenter cette situation avec une nouvelle description liée au modèle choisi.
Et j'attacherai à ce processus de représentation trois spécifictés :

- Représentation « fonctionnelle » des objets d'une certaine « réalité » par des objets « abstraits » ou « schématisés » dans un modèle où peut s'exercer un traitement théorique,
- Représentation « analogique » ou « métaphorique » : les processus naturels sont imités dans des conditions qui favorisent l'observation et l'étude,
- Représentation « sélective » : un travail de modélisation nécessite de retenir certaines caractéristiques de la situation et d'en ignorer d'autres.

« Modélisation » et « modèle »

Ce processus de modélisation s'illustre par le schéma ci-dessous :



Ce schéma fonctionne dans les deux sens :

- du réel vers le modèle : modèles descriptifs (« transformer » et « interpréter » des « informations ») ; ce sens correspond à une fonction heuristique,
- du modèle vers le réel : modèles prédictifs (« anticiper » une « action ») ; ce sens correspond à une fonction justificative.

UNE PREMIÈRE MODÉLISATION DU MONDE PHYSIQUE: LA GEOMETRIE

De par son étymologie, la géométrie constitue une des premières modélisations, celle du monde « physique » dans lequel nous vivons. Dans notre enseignement, cela va se traduire d'abord par la représentation des formes, objets du monde physique, par des dessins qui vont « tenir » sur le micro-espace de la feuille de papier, puis des figures, objets mathématiques porteurs de propriétés.

PLURALITE DES MODÈLES GÉOMÉTRIQUES

Une géométrie…ou des géométries

Une des premières finalités qu’on attribue aux mathématiques est de donner une certaine intelligibilité du monde (cela commence avec le monde des grandeurs), puis d’en donner des représentations (c’est le monde des nombres et des figures). Pour modéliser formes et grandeurs, le modèle premier que nous proposons à nos élèves est celui de la géométrie euclidienne. C’est celui que nous avons hérité des grecs, et qui a été le modèle prépondérant pendant des siècles ; On pourrait le résumer en disant que c’est une modélisation « locale » de l’espace physique, avec des « postulats » qui sont des demandes « de bon sens ».

Mais si l’on veut vraiment modéliser notre terre, la géométrie sphérique est un bien meilleur modèle, qui oblige notre pensée à se « décentrer ». Dans cette géométrie, les objets mathématiques ne vont plus être les mêmes (plus de segment, mais des arcs de cercle…), et les propriétés de la géométrie euclidienne vont être mises en défaut : le plus court chemin d’un point à un autre devient une géodésique (arc de cercle) ; la somme des angles d’un triangle (sphérique) n’est plus égale à 180°…On voit bien là combien la modélisation est fortement tributaire du modèle choisi.

Au-delà de cette géométrie sphérique, d’autres géométries sont apparues (en réaction au modèle euclidien), comme la géométrie hyperbolique dont Daniel Perrin nous a montré quelques propriétés des droites remarquables d’un triangle dans la conférence d’ouverture du colloque COPIRELEM de Dourdan.

On assiste à un achèvement de l’édifice de ces différentes géométries avec le discours inaugural de Félix Klein à Erlangen en 1872 qui unifie toutes ces géométries dans une théorie unique pour en dégager les points de similitude. Cette théorie est basée sur l’action d’un groupe de transformations sur un ensemble de points. Ce souci de mettre en place des théories unificatrices des différents modèles est certainement à l’origine des mathématiques modernes, avec l’hypothèse de faire économiser à l’élève leur lente mise en place au regard de l’histoire. Les programmes de 1986 qui peuvent apparaître en réaction à cette hypothèse ont cependant gardé de manière forte les groupes de transformation.

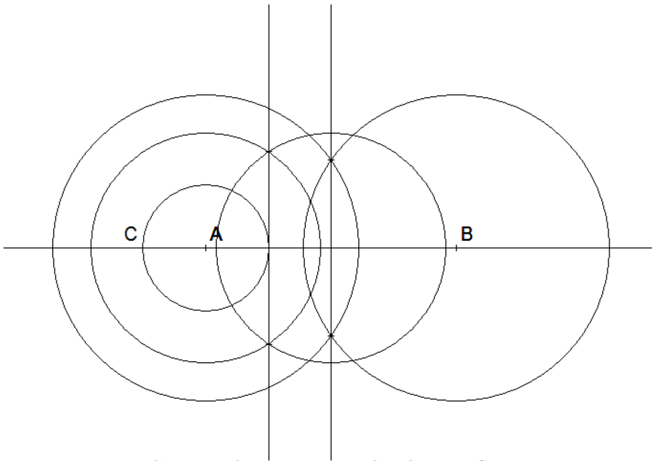
Cinq, quatre, trois, deux, un

Je vais partir d’un problème proposé par l’IREM de Montpellier comme narration de recherche pour illustrer en quoi le modèle choisi va influer sur la résolution d’un même problème. Bien entendu, ce que je vais proposer n’est pas du tout l’objectif recherché par ces collègues de Montpellier : leur but est de mettre les élèves dans une démarche expérimentale, avec tâtonnement, essais, procédures personnelles…, alors que je vais essayer de montrer en quoi la connaissance de modèles géométriques conduit à des procédures expertes.

Voici l’énoncé de ce problème :
A et B sont deux points donnés. On souhaite construire en utilisant seulement une règle non graduée et un compas le point C vérifiant les trois conditions suivantes :
1) C appartient à la droite (AB)
2) C n’appartient pas au segment [AB]
3) $AC = \frac{3}{4}AB$
Quel est le nombre minimum d’arcs de cercles (ou de cercles) qu’il est nécessaire de tracer ?

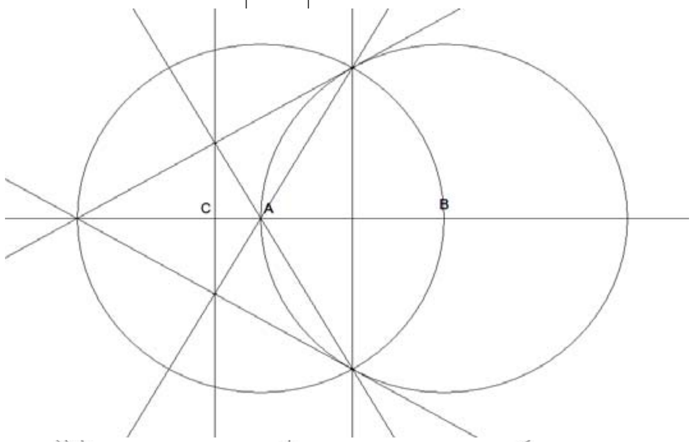
Cinq cercles :

Cette première procédure fait intervenir 5 cercles : 4 pour le tracé de 2 médiatrices, et 1 pour symétriser le dernier point obtenu.
On est ici dans la géométrie euclidienne, avec la conceptualisation du milieu par « équidistance »



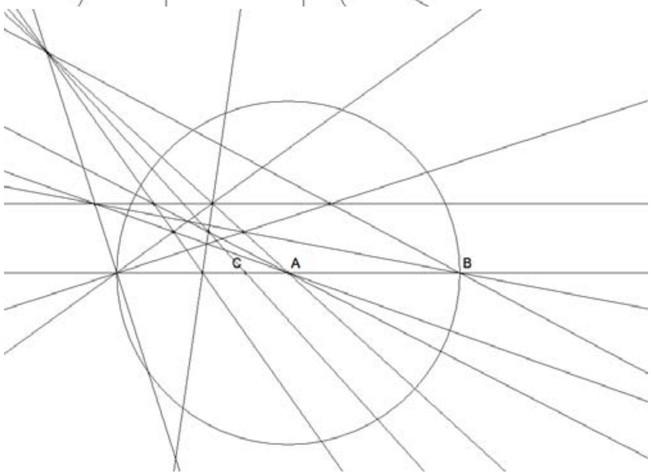
Deux cercles :

Cette procédure utilise 2 cercles et permet d’obtenir un triangle équilatéral dont A est le centre de gravité.
La « droite des milieux » donne alors le point C.
On est ici dans la géométrie affine avec la conceptualisation du milieu comme « barycentre ».



Un cercle :

Cette procédure ne nécessite qu’un cercle qui donne un milieu (ici A).
C’est alors une suite de constructions échangeant milieux et parallèles qui permet d’obtenir le point C.
On est ici en géométrie projective avec une conceptualisation « milieu-parallèle »



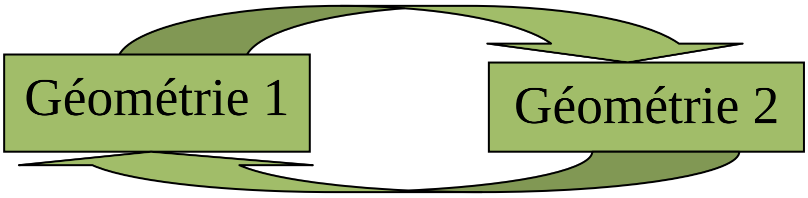
Cet exemple montre bien que, pour le même problème, suivant le choix du modèle géométrique les objets cercle et droite n'ont pas la même « prégnance », la conceptualisation du même objet « milieu » et les actions physiques de tracé sont différentes. Un même problème conduit donc à des modélisations différentes en fonction du modèle choisi.

MODELISATION GÉOMÉTRIQUE EN TERME DE « NIVEAUX » D'ACTION ET DE PENSEE

Cette modélisation beaucoup plus opérationnelle pour l'enseignement de la géométrie s'appuie sur les « paradigmes géométriques » développés par Alain Kuzniak et Catherine Houdement d'après la typologie de F.Gonseth ;

- Géométrie 1 : la géométrie « naturelle »
- Géométrie 2 : la géométrie « axiomatique naturelle »
- Géométrie 3 : la géométrie « axiomatique formelle »

Nous allons dans un premier temps nous intéresser plus particulièrement aux géométries 1 et 2 qui sont celles développées dans l'enseignement pour tous (école et collège).
La géométrie 1 est celle des objets et des actions « physiques », la géométrie 2 celle des objets « idéalisés » et des actions « intellectuelles ».
Une erreur serait de penser qu'elles sont à développer dans cet ordre. L'enseignement doit au contraire assurer un constant aller-retour entre ces deux géométries comme le suggère le schéma ci-dessous, en s'appuyant sur l'analogie, voire la simultanéité des « gestes » entre ces deux géométries, et en pointant les différences de nature des objets, des tâches et des modes de validation.



La géométrie 1 est une première modélisation du monde physique. La géométrie 2 est une modélisation mathématique de la géométrie 1.

Pour aller plus loin dans cette réflexion sur l'interaction entre ces deux géométries, je vous renvoie à l'article de Catherine Houdement paru dans le Repères-IREM 67 : « A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège ». Je vais pour ma part me contenter d'illustrer cet aller-retour entre ces deux géométries avec un problème qui a traversé l'histoire, et qui va mettre en jeu formes (ici les polygones) et grandeurs (ici aire). L'objectif est de découper une forme pour en faire une autre forme de même aire, démarche très présente dans les programmes de l'école élémentaire avec toutes les activités de type « puzzle ».

Du polygone au carré

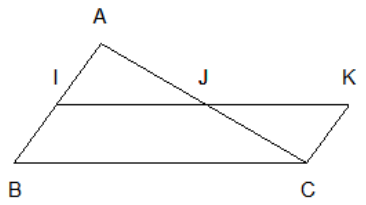
On pourrait situer ce problème dans le monde physique comme celui du « remembrement », mais nous allons directement le situer dans le micro-espace de la géométrie élémentaire :

« Peut-on découper un polygone pour en faire un carré ? »

Je vais ci-dessous résumer les étapes constitutives de la résolution de ce problème :

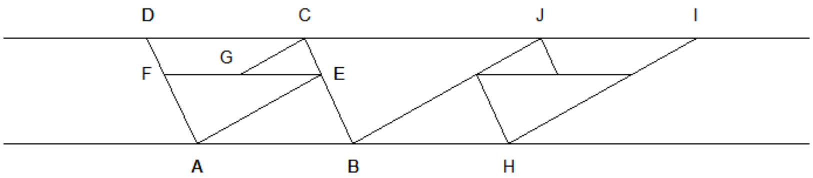
Du triangle au parallélogramme :

La « droite des milieux » donne une solution, en découpant le triangle suivant (IJ) pour obtenir le parallélogramme BCKI qui a la même aire que le triangle ABC



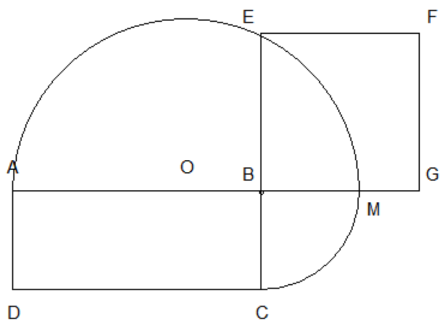
Du parallélogramme au parallélogramme…et donc au rectangle :

Voici un découpage obtenu par translations, les différentes pièces étant constituées en utilisant les 3 directions constituées par ces 2 parallélogrammes de même aire.

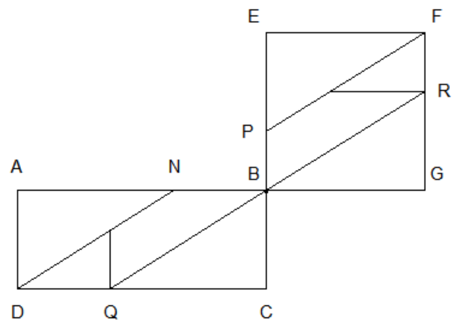


Du rectangle au carré :

La première étape est de construire un carré ayant la même aire que le rectangle donné (ici ABCD).
Le théorème de Thalès (pas le nôtre, mais celui de la plupart des autres pays) nous donne une solution avec le fait que le triangle AEM inscrit dans un demi-cercle est rectangle, et donc que le carré de la hauteur EB est égal au produit des longueurs AB et BM.



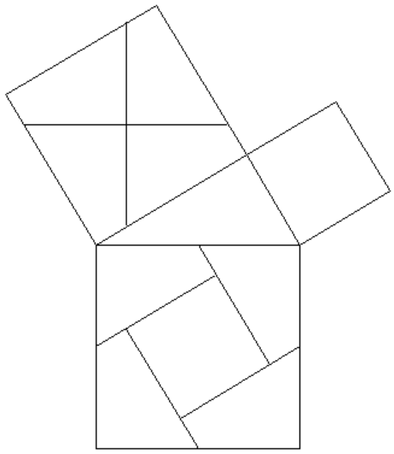
Il ne reste plus qu’à découper !



Du polygone au carré :

Nous allons résoudre le problème avec un quadrilatère, l’algorithme employé permettant d’envisager alors tous les polygones.
Nous découpons notre quadrilatère en 2 triangles, et découpons chacun d’eux pour obtenir un carré comme vu ci-dessus. Nous voici donc avec 2 carrés, à partir desquels il faut construire un carré dont l’aire soit égale à la somme des aires des 2 carrés déjà obtenus, puis découper ces 2 carrés pour reconstituer le troisième.

Merci Pythagore !



Que d'actions, que d'allers-retours entre figure et dessin, entre coups de ciseaux physiques et coups de ciseaux mathématiques, entre géométrie 1 et géométrie 2.
La démarche a été double : d'abord construire les objets “ convoités ”, en utilisant et validant par “ Thalès ” pour le passage du rectangle au carré, par “ Pythagore ” pour le passage de deux carrés à un troisième carré ; ensuite imaginer les découpages. Pour ce second travail la prise d'information sur le dessin est absolument nécessaire, car ce sont les “ bords ” qui vont guider notre action : recherche simultanée de “ pièces isométriques ” et du “ déplacement ” correspondant. Les mathématiques nous garantissent alors que le “ découpage ” que nous avons effectué est un bon “ puzzle ”, c'est-à-dire qu'il ne laissera pas de “ vide ” ni de “ superposition ” entre les pièces lorsque nous retournerons dans le découpage physique.
Ce problème illustre bien aussi le double sens de la démarche de modélisation : heuristique de la géométrie 1 vers la géométrie 2, explicatif de la géométrie 2 vers la géométrie 1.

Le problème de la réversibilité d'une action de modélisation.

Quand on modélise un problème ou une situation, l'action se fait dans un sens (ici du polygone au carré). Il est souvent très difficile de mener l'action dans l'autre sens (du carré à un polygone) avec le même « traitement ». Il a fallu attendre Biolay au début du $20^{ème}$ siècle pour établir le résultat suivant : « deux polygones de même aire sont « puzzle-équivalents » ».

L'impossible retour à la réalité

Nous avons sur cet exemple illustré cet aller-retour entre la géométrie 1 et la géométrie 2 : nos sens, notre perception, nos actions physiques accompagnent nos actions intellectuelles, notre raisonnement, les modélisent par une certaine analogie. Mais qu'en est-il dans la géométrie 3 ? Pour entrer dans ce nouveau « monde géométrique », je vous propose de suivre Jean-Pierre Kahane dans un article paru dans Repères-IREM 29 : « Le théorème de Pythagore, l'analyse multifractale et le mouvement brownien » où il pose le problème suivant, pour lequel notre perception première va d'emblée donner une réponse négative :

Peut-on reconstituer un cercle à partir d'un carré par " dissection " et " déplacements " ?

Le problème ainsi posé dans les années 1920 par Banach et Tarski " s'appelle la quadrature géométrique du cercle.
Laczkovitch, mathématicien hongrois, a donné une réponse positive à cette question : il a montré que de telles partitions du carré et du disque étaient possibles et que l'on pouvait passer des morceaux du disque aux morceaux du carré par des translations.

Inutile de prendre vos ciseaux : cette construction est non mesurable, et les outils physiques dont nous disposons sont complètement inadaptés. Nous voyons ici un modèle de pensée non seulement déconnecté du monde réel, mais en opposition avec celui-ci !

DU MONDE DES « GRANDEURS » AU MONDE DES « NOMBRES » VIA LA MESURE

GRANDEURS ET MESURES

Comme je l'ai dit dans mon introduction du monde de la géométrie, une des finalités des mathématiques est de modéliser le monde qui nous entoure, et pour cela d'en donner des représentations. Les « nombres » constituent une des représentations premières à la fois d'un point de vue historique, d'un point de vue de l'enseignement, mais aussi d'un point de vue prégnance dans notre société comme je vais essayer de l'illustrer. Ce monde des « nombres » naît du monde des « grandeurs » via la « mesure », et, pour développer cette approche, je vais partir d'une typologie proposée par Guy Brousseau lors d'une réunion de la CREM proposant trois approches de la notion de mesure :

- La mesure la plus simple : le cardinal d'un ensemble fini (nombre entier naturel). Cette première mesure servira de fil conducteur à cette partie de mon exposé.
- La « mesure exacte » : couple formé d'un nombre et d'une unité (extension du champ des nombres) ; c'est souvent une convention « sociale ». Je partirai de cette mesure pour poser la question de l'extension du champ des nombres dans la partie suivante.
- Dans des situations où cette convention sociale n'existe pas, l'image d'une grandeur par une mesure est en fait un intervalle (erreur, tolérance, intervalle de confiance…). Cette mesure nous permettra d'entrer dans le « monde de l'incertitude » qui sera la dernière partie de mon exposé.

LES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Pour introduire cette partie, je citerai Kronecker : « Dieu a créé les nombres entiers naturels, les autres sont l'œuvre des hommes » Et pour illustrer ces premiers contacts de l'homme avec les nombres entiers naturels, je m'appuierai sur deux exemples proposés par John B.Barrow dans son livre « Pourquoi le monde est-il mathématique ? » (texte en italique).

Nuzi, vieille ville de Mésopotamie

Lors de fouilles archéologiques à Nuzi, vielle ville de Mésopotamie, aujourd'hui en Irak, on a trouvé une petite bourse d'argile, creuse, portant l'inscription suivante :

« Objets concernant des moutons et des chèvres »

- *21 brebis qui ont déjà eu des petits*
- *6 agneaux femelles*
- *8 béliers adultes*
- *4 agneaux mâles*
- *6 chèvres qui on déjà eu des petits*
- *1 bouc*
- *2 chevrettes*

Soit 48 animaux.

Après avoir brisé le sceau de la bourse, on trouva à l'intérieur 48 billes en terre crue. Le propriétaire du troupeau confiait aux paysans un certain nombre de bêtes ; lui, pour mémoire, disposait de la liste inscrite en signes cunéiformes » ; eux, qui ne savaient pas lire, utilisaient les billes d'argile pour vérifier le compte des bêtes.

On trouve ici une des plus anciennes forme de modélisation : la bijection. Cette modélisation est fonctionnelle, analogique, et sélective (chaque bête est représentée par une bille, sans souci d'autre précision). Il n'y avait aucune nécessité pour le berger de connaître les nombres, de savoir compter. On retrouve dans ce geste une des premières approches du nombre en maternelle, l'aspect cardinal. Cet aspect est éphémère, il change avec chaque collection.

Montagnes de Ngwane

Le repère est la forme la plus ancienne du sens du nombre que l'on connaisse. Le plus vieux témoignage de cette façon de compter se trouve sur l'os du péroné d'un babouin, datant de trente cinq mille ans avant Jésus Christ, découvert dans les montagnes de Ngwane, en Afrique, qui fait apparaître 29 entailles. Il s'agit probablement d'une arme sur laquelle le chasseur tenait le compte des animaux qu'il avait tués.

On peut ici dire que l'on approche l'aspect ordinal du nombre. Les animaux sont comptabilisés dans l'ordre où ils ont été tués, et ce repérage résiste au temps.

Le bâton d'Ishango

Ce bâton est un véritable trésor scientifique ! Il a été découvert à Ishango, près de la frontière actuelle du Zaïre.
Il est daté d'environ 15 000 ans. Il fait apparaître trois rangées d'entailles, deux de 60 et une de 48. Une des rangées présente la séquence 9 (10-1), 19 (20-1), 21 (20+1), 11 (10+1), les deux autres rangées contiennent des nombres premiers : 5, 7, 11, 13, 17 et 19.
Beaucoup d'hypothèses ont été émises sur ce bâton. Une certitude est qu'on est ici devant un progrès majeur par rapport aux deux autres exemples proposés précédemment. La notion de nombre est présente, et ce bâton propose de les mettre en correspondance.
On peut dire qu'on a ici la plus vieille « calculette » de l'histoire !
John D.Barrow le donne aussi comme exemple dans son livre.

REPRESENTER LES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Les chiffres et les lettres ont une longue histoire commune. Elle a commencé dès que les hommes eurent l'idée de l'écriture. Ils inventèrent des signes pour écrire les mots et les nombres. Certaines civilisations ont utilisé les lettres pour « écrire » les nombres (grecs, romains…) La représentation des nombres a souvent évolué de la façon suivante :Une unité : un signe

- L'idée du groupement
- Les groupes de groupes

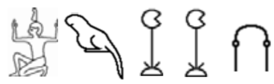
La représentation symbolique choisie va être déterminante pour les potentialités mathématiques du système. Prenons comme exemple la numération égyptienne.

Numération égyptienne

C'est une numération à base 10, qui utilise la symbolique suivante :

un	1	bâton	
dix	10	anse	
cent	100	spirale	
mille	1 000	fleur de lotus	
dix mille	10 000	index	
cent mille	100 000	têtard	
un million	1 000 000	dieu	

On voit que ce système n'est pas positionnel, et qu'il ne nécessite nullement le « zéro ». Il est limité dans sa potentialité d'écriture des nombres (jusqu'à 9 999 999) et ne permet donc pas d'envisager l'aspect « infini » de l'ensemble des nombres entiers naturels. La symbolique utilisée permet de fonctionner fortement par analogie avec les tas que l'on pourrait faire pour exprimer les groupes et les groupes de groupes

231	
231	
1 102 010	

Notre système décimal

Quelques civilisations sont allées plus loin en évoluant de la façon suivante :
- L'idée de position
- L'idée du zéro

On peut citer les Babyloniens, qui avaient un système à base 60, les Mayas avec un système à base 20, les Chinois avec un système à base 10, et enfin notre système indo arabe à base 10.
Je ne peux pas dans le cadre du temps de cet exposé développer plus avant les trois composantes que met en jeu la connaissance évoluée des nombres :
- La représentation des quantités
- La représentation verbale
- La représentation indo arabe

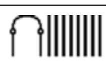
Je me contenterai d'une référence aux travaux de Stanislas Dehaene qui a montré que chacune de ces représentations correspondait à une localisation différente du cerveau, ce qui permet de pointer que notre représentation verbale est certainement la plus catastrophique du monde, et donc un lourd handicap pour notre enseignement !

CALCUL : OPERATIONS ET ALGORITHMES

Le calcul va naître de la nécessité de réaliser dans un « modèle symbolique » les actions menées dans le monde « réel ». Par exemple le « regroupement » de collections de mêmes objets va se traduire par l'addition dans le monde mathématique.
Les algorithmes de calcul pour « représenter » ces actions dans le monde mathématique vont être évidemment fortement dépendants du système de représentation des nombres. Et l'analogie avec les gestes de la réalité sera d'autant moins évidente que le système utilisé sera évolué, comme notre système indo arabe. Si l'on prend le système de numération égyptien, l'analogie est par contre forte :

Addition et soustraction :

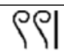
35	
17	
35 +17	
52	

35	
17	
35	
35 - 17	
18	

Au-delà de cette forte analogie, on constate que dans ce système de représentation, les tables d'addition ne sont d'aucune nécessité, et que la gestion de la retenue si délicate dans nos algorithmes se fait ici en action, en aval pour l'addition, en amont pour la soustraction.

Multiplication par 2 et 10

On peut se poser la question des limites d'un tel système pour des calculs plus complexes comme la multiplication. Les égyptiens proposent d'abord deux « multiplications », la première par 10, immédiate compte tenu du système de représentation, et la seconde par 2 qui consiste à « doubler » le nombre de symboles :

La multiplication par 10	
201	
2010	
La multiplication par 2	
23	
46	

Et pour faire le produit de deux nombres quelconques ?

Voici la méthode utilisée, donnée par le scribe Ahmès dans le papyrus de Rhind (1650 ans avant JC environ), qui s'appuie sur la connaissance de la « multiplication par 2 ».
Je propose ci-dessous comme exemple le produit 24 x 37, mais en utilisant notre système de représentation des nombres, pour mettre en évidence l'algorithme utilisé :

- 1 37 = 1 x 37
- 2 74 = 2 x 37
- 4 148 = 4 x 37
- 8 296 = 8 x 37
- 16 592 = 16 x 37

Pour obtenir le résultat final, il suffit d'ajouter (8x37) et (16x37)

888 = 296 + 592

L'analogie n'est plus ici avec les actions du monde réel, mais à l'intérieur du modèle entre deux suites proportionnelles, la première basée sur le système binaire. Là encore, aucune nécessité de tables de multiplication !

CALCUL ET PROBLEMES : LE « REEL », AIDE OU OBSTACLE ?

L'école sert !

Je vais partir d'un exemple proposé par Rémi Brissiaud dans un article paru dans le bulletin vert 469 de l'APMEP : « Calcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes »
C'est le résultat d'une enquête menée par Schliemann en 1998 auprès d'enfants d'une dizaine d'années non scolarisés de Récife, qui vivaient de petits commerces.
À la question *« Quel est le prix de 3 objets à 50 cruzeiros l'un ? »*, 75% de ces enfants répondent correctement.

À la question *« Quel est le prix de 50 objets à 3 cruzeiros l'un ? »*, aucun de ces enfants n'est capable de répondre.
Cet exemple montre bien une rupture de la modélisation analogique. Pour répondre à la première question, les enfants utilisent une procédure d'addition réitérée, geste mathématique métaphorique de celui de la réalité.
Mais dans le deuxième cas, cette procédure s'avère impossible à mettre en œuvre par la lourdeur de la tâche aussi bien physique qu'intellectuelle qu'elle représente. Le sens externe devient un obstacle. Il faut passer à un sens interne et à une action dans le modèle mathématique qui conduira à l'échange des deux problèmes via la commutativité de la multiplication. Et c'est bien à l'école de construire cela !

Un modèle à plusieurs facettes

Considérons les deux problèmes suivants :

- *On fait des guirlandes de 5 mètres dans une « ficelle » de 32 mètres. Combien de rubans peut-on faire ?On fait 5 guirlandes de même longueur dans une « ficelle » de 32 mètres. Quelle est la longueur d'un ruban ?*

Une première approche est de dire que ces deux problèmes relèvent du modèle de la division. Sans rentrer dans une approche didactique sur les concepts de quotition et de partition, je veux seulement pointer ici que le retour au « réel » permet de bien distinguer les « divisions » à envisager.

- Dans le premier cas, on pense au geste des vendeurs de tissus qui reportent une règle en bois (d'un mètre en général), geste qui va déterminer le nombre de guirlandes, et donner le reste après découpage.
- Dans le second cas, le geste physique serait de plier la ficelle de façon à la superposer cinq fois, puis de mesurer la longueur obtenue.

On voit ici que le retour au « réel » est nécessaire pour faire le bon choix de division.

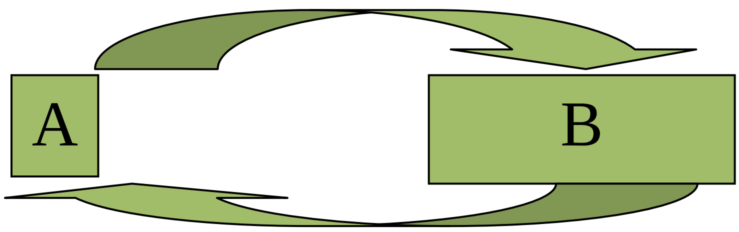
DE « L'ARITHMETIQUE » AU « CODAGE »

On entend souvent dire que les calculettes sont un obstacle à la mémorisation des tables de multiplication, et on peut en effet regretter son utilisation pour effectuer un produit comme 4x6. Mais je ne connais pas de calculettes qui, à l'inverse, « disent » que 24 c'est 6x4, mais aussi 8x3, 12x2. Cette décomposition multiplicative des nombres entiers naturels, à développer dès l'école primaire, est une première entrée dans « l'arithmétique » au sens où l'entendent les mathématiciens.

Et c'est cette décomposition multiplicative qui est le support mathématique d'un certain type de « codage ».

Une procédure dans le monde « réel »

Posons tout d'abord le problème dans le monde « réel » :
A veut envoyer un message à B sans que celui-ci soit intercepté par une tierce personne.



Une idée géniale donne la réponse dans le monde « réel » :

- A met son message dans une petite cassette qu'il ferme avec un « cadenas a » inviolable dont il garde la clef, et il envoie la cassette à B.
- B ne peut évidemment ouvrir la cassette, puisqu'il n'a pas la clef du « cadenas a ». Il met à sont tour un « cadenas b » inviolable, dont il garde la clef, et renvoie la cassette à A avec les deux cadenas.
- A ouvre le « cadenas a » avec sa clef, et renvoie la cassette qui n'a plus que le « cadenas b » à B.
- B peut alors ouvrir la cassette avec sa clef.

Une procédure analogique dans le monde « mathématique »

La procédure mathématique va reposer sur le résultat suivant : si l'on prend deux nombres premiers très grands (une centaine de chiffres), un ordinateur peut multiplier ces deux nombres en une seconde. Mais si l'on donne à un ordinateur ce nombre de 200 chiffres, et qu'on lui demande d'en retrouver la décomposition multiplicative, il a de quoi travailler un certain nombre d'années.
On retrouve ici le problème de la réversibilité de traitement dans un modèle, ce que les mathématiciens vont caractériser par la notion de « fonction piège ».
La procédure de codage se fait alors par analogie avec ce qui a été développé dans le monde réel, la cassette étant le codage du message par un nombre N composé d'un grand nombre de chiffres, les « cadenas a et b » étant des nombres premiers p et q d'une centaine de chiffres, la fermeture de la cassette se faisant par multiplication, et l'ouverture par division. La suite d'actions décrites dans le monde « réel » se traduira alors par les étapes successives : N, Np, Npq, Nq, N.

CONTINUITÉ OU RUPTURE DES MODÈLES DANS L'ENSEIGNEMENT

DU MODÈLE « ARITHMÉTIQUE » AU MODÈLE « ALGEBRIQUE »

Vu dans un livre de quatrième

Quatre allumettes mises bout à bout avec une cigarette de 7 cm mesurent 25cm en tout. Quelle est la longueur d'une allumette ?

L'énoncé ci-dessus, extrait d'un manuel de l'IREM de Lorraine paru en 1988, ne peut plus être proposé aujourd'hui compte tenu de sa référence au tabac ! Cet énoncé, ainsi que beaucoup d'autres de même style , m'a permis de mesurer chez les élèves la prégnance du « raisonnement arithmétique », ce qui ne les incitait nullement à passer à un traitement du problème par l'algèbre.

Comparons les deux méthodes :

25cm – 7cm = 18 cm 18cm : 4 = 4,5cm	$4x + 7 = 25$ $4x = 25 - 7$ $x = 4,5$

Un regard rapide montre les mêmes opérations (et heureusement !)
Mais la modélisation est différente :

- En arithmétique, on fonctionne par analogie au plus près de l'énoncé en « remontant à l'envers » les gestes de l'énoncé.
- En algèbre, on écrit « mot à mot » le problème en langage mathématique…et on l'oublie !

Une autre différence fondamentale est le statut du signe « égalité » :

- En arithmétique, il apparaît comme « déclencheur » de l'opération , comme « entrée » des calculettes.
- En algèbre, il a un rôle de relation, symbole d'une égalité conditionnelle.

Les enjeux sont différents :

- Le raisonnement arithmétique va être intimement lié au problème « réel » proposé.
- Le traitement algébrique a pour objectif de résoudre un ensemble de problèmes de même structure sans référence à la « réalité » de ces problèmes.

Les origines de l'algèbre

C'est à des problèmes de toutes sortes (problèmes d'héritage entre autres) que se consacrent les mathématiciens arabes au 9ème siècle. C'est à Bagdad que l'un d'entre eux, Al Khwarizmi va introduire une rupture fondamentale : en regroupant différentes sortes de problèmes qui se résolvent par le même algorithme, il déplace l'objet d'étude qui devient la résolution d'équations.

Nous allons examiner deux aspects de sa « méthode » : tout d'abord les transformations de base qui permettent de ramener tout problème à une forme canonique ; ensuite la validation des algorithmes de résolution par la géométrie.

Les transformations de base :

- "*al jabr*" (d'où vient le mot algèbre), qui peut se traduire par compensation, restauration, remplissage, « reboutement » :

"Si 3 choses diminuées de 5 valent 2 choses, je compense avec 5 ; alors 3 choses diminuées de 5 et augmentées de 5 valent 2 choses augmentées de 5 ; 3 choses valent donc 2 choses et 5."
L'objectif de cette transformation est de supprimer les « – ».

- "*al-muqabala*" qui peut se traduire par mise en opposition, confrontation, balancement :

« Si 3 choses valent deux choses et 5, alors 1 chose vaut 5."
L'objectif est ici de regrouper les termes semblables dans un même membre (celui où elles sont en « positif », car il n'y a pas de négatif chez Al Khwarizmi).

- $\boxed{\text{"}\textit{al-hatt}\text{"}}$

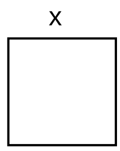
« Si 2 carrés et 42 valent 20 choses, alors 1 carré et 21 valent 10 choses."
L'objectif est ici de multiplier ou diviser les deux membres par un même nombre pour arriver à une forme canonique.

La résolution par la géométrie

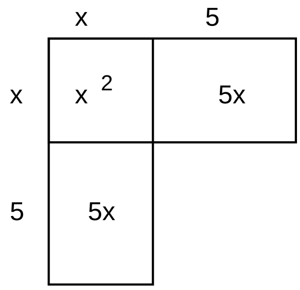
Al Khwarizmi étudie les équations du 1^er^ et 2^nd^ degré en les ramenant à l'aide des transformations ci-dessus à 6 formes canoniques.
Il revient alors au modèle de la géométrie euclidienne pour résoudre certaines de ces équations. Voici ci-dessous un exemple qu'il propose, traduit en « écriture moderne », c'est-à-dire utilisant le « langage littéral ».

"Un carré et 10 choses valent 39 " traduit par : $x^2 + 10x = 39$

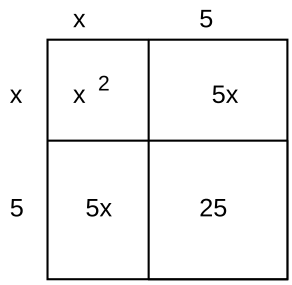
1) On construit un carré d'aire X^2 (donc de côté x) :



2) On borde ce carré de 2 rectangles dont l'aire respective est $5X$ (et donc d'aire totale $10X$). On obtient donc 5 comme autre dimension :



3) On complète alors le grand carré :



L'aire de ce carré est $x^2 + 2 \times 5x + 25$,
Or $x^2 + 10x = 39$, donc l'aire de ce carré est 64
Donc le côté de ce carré est 8.
Or le côté de ce carré est $x + 5$.
D'où : $x = 3$.

Al Khwarizmi ne s'intéresse qu'à la racine positive de cette équation du second degré, la seule qui a un sens par rapport aux problèmes « réels » qu'il veut résoudre.

L'apport du monde arabe

On retrouve bien dans toute cette démarche les caractéristiques d'une modélisation : une « re-présentation » d'un problème, fonctionnelle au niveau du traitement (tout mathématicien en est profondément convaincu) et sélective (la « chose » peut représenter la longueur d'une cigarette…ou toute autre chose). Les transformations de base font fortement penser à une analogie avec l'équilibre d'une balance (elles sont très proches de ce que nous enseignons à nos élèves de collège). La résolution via les aires a une fonction justificative, qu'il serait peut-être bon de remettre à l'honneur lors de la résolution de l'équation du 2nd degré dans nos classes de première.

Il est regrettable que dans notre enseignement ces mathématiques arabes n'aient pas la même célébrité que d'autres mathématiques comme celles des grecs. Et pour montrer la richesse culturelle et scientifique de ce monde arabe, je citerai deux poèmes de Omar Al-Khayam, entre autre mathématicien, et qui s'attaqua au 11ème siècle aux équations du 3ème degré.

Ceux qui par la science vont au plus haut du monde
Qui, par leur intelligence, scrutent le fond des cieux
Ceux-là, pareils aussi à la coupe du ciel
La tête renversée, vivent dans leur vertige

Ce poème veut traduire combien l'accès à la science donne une certaine « ivresse » de la pensée, et me fait penser à un souhait qu'avait émis Jean-Pierre Kahane au début des travaux de la CREM :
« Je souhaite que nous ayons en vue un objectif inaccessible : que chaque enfant, que chaque adulte, ait éprouvé au cours de sa vie la joie de la contemplation et de la découverte mathématique. »

Je ne me suis jamais privé de donner mon temps aux sciences
Par la science, j'ai dénoué les quelques nœuds d'obscur secret
Après soixante-douze années de réflexion sans jour de trêve
Mon ignorance, je la sais…

C'est ici une leçon d'humilité qu'il nous donne, humilité souvent caractéristique des grands « savants »

DU MODÈLE « DISCRET » AU MODÈLE « CONTINU »

Les nombres « raisonnables »

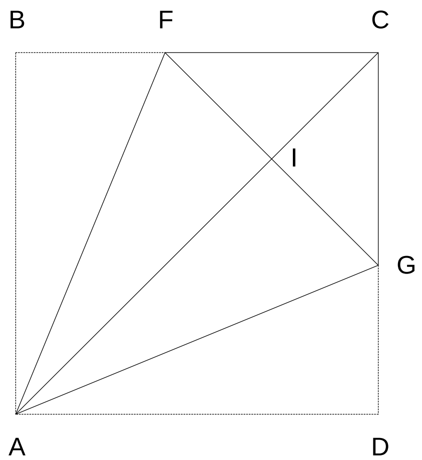
L'élève va quitter l'école primaire avec un « stock » de nombres que je qualifierai de « raisonnables » dans le sens suivant : ces nombres, convenablement « agrandis », redonnent des entiers naturels.

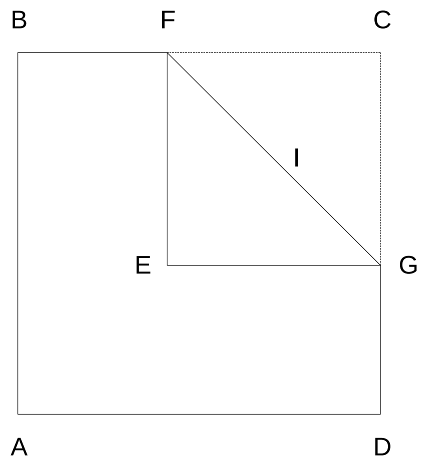
Ne sursautez pas à cette définition qui n'a rien de mathématique. Je veux indiquer par là que ces nombres sont obtenus à partir de mesures, et qu'en changeant d'unité, ces mesures peuvent s'exprimer par des nombres entiers : si on me demande ma taille, je répondrai 1,80 m, mais en changeant d'unité elle s'exprime par 18 dm.
Ce « stock » comprend :

- Les nombres entiers naturels
- Les fractions (ex 2/3 qui « agrandi » 3 fois donne 2)
- Les nombres décimaux (ex : 2,4 qui « agrandi » 10 fois donne 24)

$\sqrt{2}$ est-il « raisonnable » ?

Prenons un carré de côté l'unité…et faisons un grand raccourci historique : sa diagonale mesure $\sqrt{2}$.
Si $\sqrt{2}$ est « raisonnable », en « l'agrandissant » convenablement, il va « redonner » un entier.
Avec plus de rigueur mathématique, ceci se traduit par :
Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel, alors $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers. “ Agrandissons ” alors le carré de côté 1 avec un rapport q. On obtient un carré ABCD de côté entier q et de diagonale entière p.



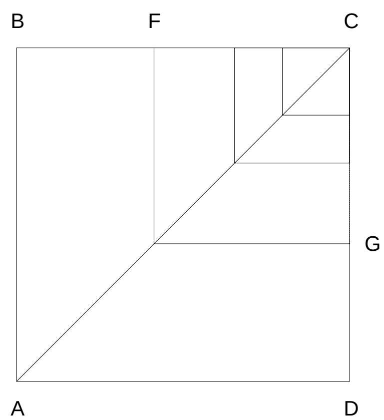


Faisons alors les pliages ci-dessus : deux pliages par rapport à (AF) et (AG) ramenant les côtés [AB] et [AD] sur la diagonale [AC], puis un pliage par rapport à (FG).

Déplions tout, revenons dans le monde des mathématiques et examinons la figure obtenue . Une démonstration élémentaire établit alors que la « petit carré » EFCG a pour côté 2p-q et pour diagonale 2q-2p, donc est aussi à côté et diagonale entiers.

Une “ descente infinie finie ” :

Le procédé est auto-reproductible :
On a donc une “ descente infinie ” de carrés de plus en plus petits.
Mais les côtés de ces carrés sont des entiers naturels.



Une suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.
C'est absurde !
Une seule marche :

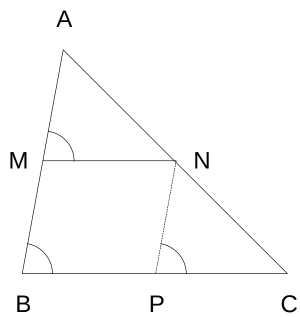
Pour ceux qui craignent les trop grandes descentes, ils peuvent se contenter d'une seule étape, en choisissant le plus petit agrandissement redonnant un nombre entier pour la diagonale, c'est-à-dire $\frac{p}{q}$ irréductible. Ils obtiennent alors une contradiction dans le carré EFCG de côté entier p'< p et de diagonale q'< q et qui vérifient $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$

L'accès à l'irrationalité de $\sqrt{2}$ passe donc par « l'infini » (descente infinie ») ou par « l'absurde » ? Ce type de démonstration apagogique va à l'encontre de la vision de la démonstration développée par Euclide et Platon pour lesquels la démonstration devait amener à une conclusion comme conséquence de propositions reconnues comme vraies et qui peuvent s'appuyer sur le visible. Elle est ici uniquement du domaine de la pensée, sans retour possible au « réel ».

Du discret au continu

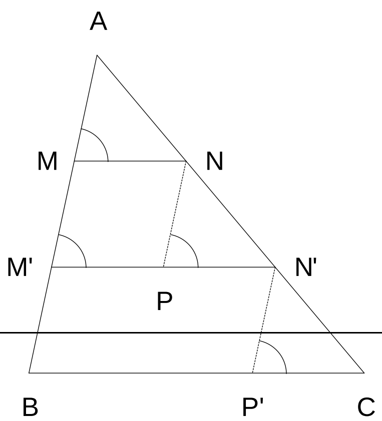
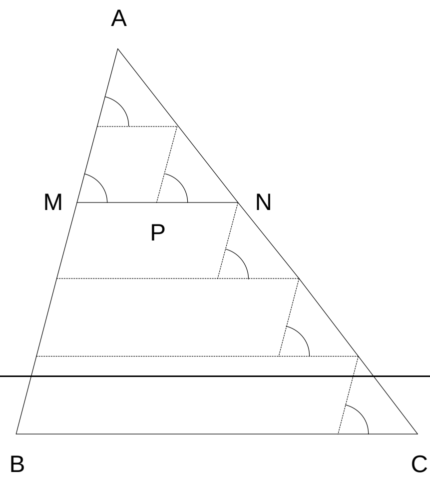
Abandonnons Euclide et Platon, et faisons un saut de 20 siècles, et suivons Clairaut dans ses « Elemens de Géométrie », où il reprend pour démontrer notre théorème de « Thalès » une argumentation d'Arnault (« Nouveaux éléments de géométrie ») :

Notre théorème des " milieux " :



M est le milieu de [AB], (MN) // (BC)
On construit (NP) // (AB)
Par parallélisme : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{NPC}$; $\widehat{ANM} = \widehat{NCP}$
En utilisant milieu et parallélogramme : AM = MB = NP.
Les triangles AMN et NPC sont « égaux »
Donc AN = NC, d'où N est le milieu de [AC]

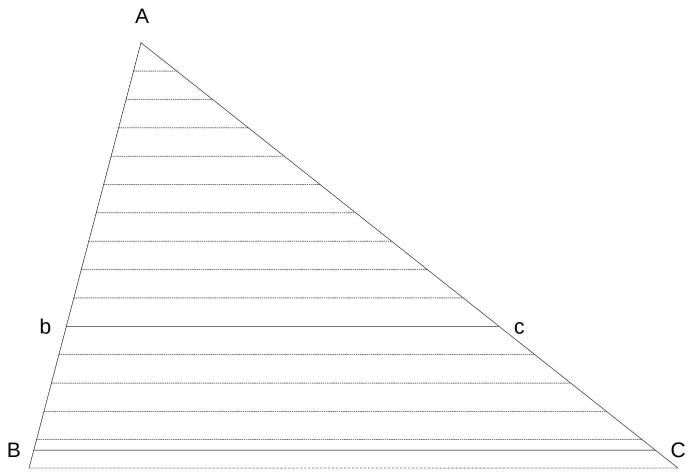
Au delà du fait que cette démonstration m'apparaisse comme particulièrement éclairante pour des élèves de collège s'ils disposaient des cas d'égalité des triangles, Clairaut vient de se construire une procédure auto-reproductible, et donc une méthode. Suivons le plus avant :

Notre théorème des tiers	***Deux fois et demie***
	

Je viens de résumer, avec une adaptation très moderne, et sans les nombreuses justifications de Clairaut, les pages 42 et 43 de ses « Elemens de Géométrie ». A partir de ces trois exemples, Clairaut laisse imaginer la généralisation du procédé, et considère achevée cette démonstration de Thalès.

Clairaut a des doutes **:**

Retrouvons Clairaut à la page 98 : « Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables…Il faut donc que nous revenions sur nos pas ».



Clairaut prend alors l'exemple suivant : soit un triangle ABC où AB = $\sqrt{2}$, soit b le point de [AB] tel que Ab = 1, et c le point de [AC] tel que (bc) // (BC). Il fait alors le raisonnement suivant :
« Supposons Ab divisé en 100 parties ; ce que AB contiendra de ces parties se trouvera entre 141 & 142. Contentons nous donc de 141 et négligeons le petit reste. Il est clair que AC contiendra aussi 141 des parties de Ac ».
J'ai exemplifié avec le dessin ci-dessus où j'ai choisi un partage en 10 parties. Les historiens noteront d'autre part que je n'ai pas comme Clairaut fait la distinction entre A et a, cela pour que ce soit clair aux non spécialistes.
Clairaut recommence alors en divisant Ab en 1000 parties, et dit alors :
« De plus, ces restes comme nous venons de l'observer, seront de part & d'autre d'autant plus petits que le nombre des parties de Ab sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de Ab poussée jusqu'à l'infini. »

Nous venons de passer dans le monde de l'analyse. Nous venons de passer du commensurable à l'incommensurable, du « rationnel » au « réel ». du « discret » au « continu ».

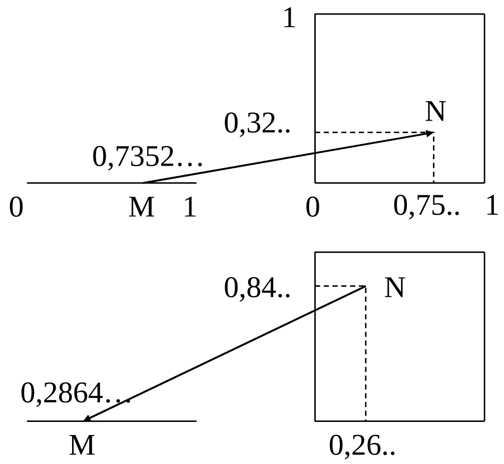
Le modèle « continu »

Ce modèle « continu » va devenir le modèle privilégié du traitement mathématique (les intégrales sont un outil de traitement et de calcul beaucoup plus efficace que les séries). Et même pour les problèmes, en général discrets, issus de la réalité, on va les « plonger » dans ce modèle continu pour une plus grande efficacité mathématique (j'illustrerai cela avec les probabilités).
On peut regretter que notre enseignement n'assume plus ce passage des nombres rationnels aux nombres réels, du discret au continu !

« Je le vois mais je ne peux le croire ! »

C'est le 19ème siècle qui verra la mise en forme mathématique de la « droite réelle ». Dedekind vient de formaliser l'approche des nombres réels par les « coupures », que je résumerai ici en disant que tout nombre réel peut s'écrire sous la forme d'un développement décimal illimité. Utilisant cette écriture, Cantor crée la bijection suivante entre un « segment » et un « carré », ce qui lui fera dire : « Je le vois mais je ne peux le croire ».

Ce geste, la bijection, est le même que celui du berger de Nuzi entre les animaux et les billes. Mais dans ce nouveau monde mathématique, il montre qu'il y a « autant de points » sur le segment que dans le carré, sur la droite réelle que dans le plan réel. Là encore nos sens, notre perception première refuse cette « bijection » entre deux objets qui dans l'espace physique n'ont pas la même dimension !



MODÉLISER L'INFORMATION…OU « UN MODÈLE PEUT EN CACHER UN AUTRE »

DEUX MODÈLES

Miracle

Voici un article paru dans le « Canard enchaîné » en juillet 2006 :

Sous le titre « Un bon cru au bac », « La République des Pyrénées »(13/7) s'extasie devant les résultats de la bonne ville de Lourdes : « 96% de mentions très bien, bien et assez bien ». Du jamais vu ! » Mazette ! La cité mariale serait-elle un paradis pour les surdoués ? En réalité, pour obtenir ces mirobolants 96%, le confrère a eu un recours à un calcul simple. Il a ajouté le pourcentage du lycée public de Sarsan (« toutes mentions confondues, 50%), à celui du lycée privé Peyramale (« 46% de mentions ». En *additionnant ces deux nombres, il faudrait donc compter « 96% de mentions » à Lourdes. Et ce n'est pas fini. Car un troisième lycée de la ville n'ayant pu être comptabilisé, la part de ces mentions au bac devrait, selon cette nouvelle arithmétique, dépasser largement les 100%. Lourdes, ville de tous les miracles !*

On peut dire que l'auteur de l'article incriminé maîtrise bien l'addition, mais qu'il s'est trompé de modèle !

Deux grands modèles dans l'enseignement

Deux grands modèles vont se construire entre l'école et le collège, avec leur mode de traitement et de calcul spécifiques :

- Le modèle « additif » : comparaison « absolue »
- Le modèle « proportionnel » : comparaison « relative

Et, comme l'auteur de l'article ci-dessus, nos élèves vont faire des confusions entre ces deux modèles, comme en témoignent ces situations vécues dans mes classes.

Doublants et doublements

Quand je proposais à mes élèves de sixième les résultats suivants sur le nombre de doublants en troisième dans deux collèges de l'agglomération troyenne (chiffres fictifs) :

- *Albert Camus : 15 redoublants en 3ème*
- *Paul Langevin : 12 redoublants en 3ème*

Leur première réaction était de dire que le collège Camus était meilleur que Langevin.

C'était une occasion de leur faire comprendre ces notions de comparaison « absolue » et « relative », en leur proposant de calculer le « taux de doublement » avec l'information ci-dessous sur la population de référence :*Albert Camus : 125 élèves en 3ème*

- *Paul Langevin : 80 élèves en 3ème*

Et ainsi de leur faire constater que leur conclusion s'inversait :

- *Taux de doublement à A.Camus : 12%*
- *Taux de doublement à P.Langevin : 15%*

Le sexe le plus fort !

Je leur proposais alors la situation suivante :
Dans une petite ville, tous les élèves de collège sont scolarisés dans l'un des deux collèges suivants, avec la proportion de garçons et filles correspondante :

- Pierre Brossolette : 45% de garçons, 55% de filles
- Gaston Bachelard : 60% de garçons, 40% de filles

A ma question « Y a-t-il plus de garçons ou de filles scolarisés en collège dans cette ville ? », il se trouvait toujours un certain nombre d'élèves pour répondre qu'il y avait plus de garçons, puisqu'il y en avait 105% contre 95% de filles !
C'était alors l'occasion de leur montrer que suivant les populations de référence, on pouvait aboutir à trois conclusions différentes :

- *A Brossolette : 420 élèves ; à Bachelard : 360 élèves*
  Soit 405 garçons et 375 filles

- *A Brossolette : 520 élèves ; à Bachelard : 260 élèves*
  Soit 390 garçons et 390 filles
- *A Brossolette : 740 élèves ; à Bachelard : 300 élèves*
  Soit 513 garçons et 527 filles

Dans un monde d'information chiffrée comme le nôtre, cet aller-retour entre ces deux modèles me paraît fondamental à développer, pour armer nos élèves dans leur vie de futur citoyen.

Le modèle « proportionnel »

Il y a différentes façons d'entrer dans un modèle, et le modèle « proportionnel » est particulièrement riche pour cela, avec la diversité des « registres » de représentations possibles d'une même situation :

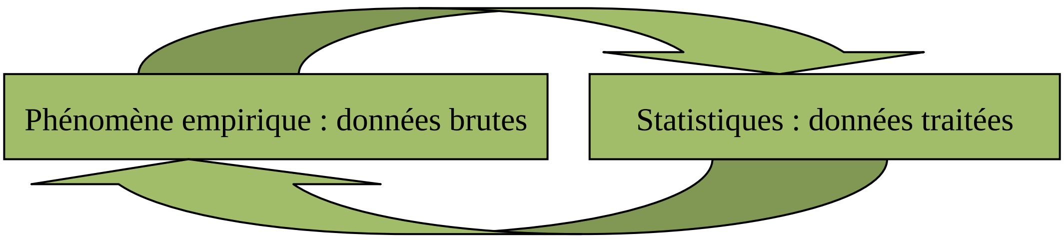
- ***Registre numérique*** : suites proportionnelles, tableaux, « règle de trois »…Ce registre est celui de l'entrée dans ce modèle à l'école primaire.
- ***Registre algébrique*** : « y = kx », propriétés de linéarité…On trouve ce registre dès l'école primaire avec l'utilisation en action des propriétés de linéarité.
- ***Registre fonctionnel*** : application linéaire, traduction graphique…Ce registre est plus spécifique du collège.
- ***Registre géométrique*** : théorème de Thalès, lien entre parallélisme et proportionnalité…Là encore ce registre est présent en action dès l'école primaire, avec par exemple le « guide-ânes » au cycle 3.

La conceptualisation, le traitement et la validation vont être spécifiques dans chacun de ces registres, et notre enseignement doit à la fois travailler au maximum ces spécificités et les passages d'un registre à l'autre pour donner des éclairages complémentaires d'une même situation.

LES STATISTIQUES

La statistique descriptive

Un premier niveau des statistiques développé dans notre enseignement est la statistique descriptive. Elle a pour objectif essentiel « la transformation synthétique » d'informations. En ce sens, son enseignement participe à la formation du citoyen : comprendre cette transformation, pouvoir analyser correctement, et donc prudemment la synthèse effectuée. De manière plus précise, il faut faire comprendre aux élèves que le problème fondamental de la statistique descriptive est de résoudre le dilemme résultant de la transformation de données « brutes » en une synthèse qui parvienne à concilier le mieux possible deux pôles antagonistes : la « fidélité » et la « clarté ».



Les statistiques constituent le modèle mathématique de traitement de l'information, et cette modélisation présente là encore un aller-retour entre le monde « réel » et ce monde mathématique comme l'illustre le schéma ci-dessus.
De la « réalité » vers les mathématiques, les statistiques vont transformer les données brutes en les représentant de façon « classée » pour pouvoir en faire des « résumés ».
En sens inverse, ces « résumés » vont donner des interprétations du phénomène empirique.
On pourrait caractériser leur enseignement par le vocable « mathématiques du citoyen », c'est à dire :

- une formation à l'analyse et au traitement de l'information,
- en développant des aptitudes à trier, ranger, transformer des informations,
- en s'appuyant sur de fréquents changements de registre : texte, tableau, graphique, résultat numérique…

Une question épineuse

A partir d'une question qui se pose dans le monde « réel », un premier travail sera de mettre en place une situation descriptive de cette question, et le passage aux statistiques va offrir un traitement mathématique qui permette de proposer une réponse à cette question.
Prenons la question ***« Les garçons sont-ils meilleurs en maths que les filles ? »***

Pour traiter cette question, on propose de faire passer un test à 700 garçons et 600 filles de troisième d'une petite ville de province (en prenant comme hypothèse que cet échantillon est représentatif !). On leur laisse le choix de passer ce test en algèbre ou en géométrie.
Voici les résultats à ce test, c'est à dire le nombre d'élèves qui ont réussi (avec par exemple comme indicateur une note supérieure à 10).

	Garçons	Filles
Algèbre	$\frac{23}{200}$	$\frac{85}{500}$
Géométrie	$\frac{400}{500}$	$\frac{90}{100}$

Les filles sont meilleures que les garçons !

Pour arriver à cette conclusion, on calcule le pourcentage respectif de réussite des garçons et des filles en algèbre et en géométrie :

	Garçons	Filles
Algèbre	11,5%	17%
Géométrie	80%	90%

Les filles sont meilleures à la fois en algèbre et en géométrie…donc meilleures en maths.

Quoique !

On regroupe maintenant les résultats pour établir le pourcentage de réussite au test :

	Garçons	Filles
Total	$\frac{423}{700}$	$\frac{85}{600}$
En %	60,5%	29,2%

On arrive à la conclusion contraire : les garçons sont meilleurs en maths.

On joue ici sur un effet de structure des sous-populations, mais le fait qu'un traitement statistique d'un même problème puisse conduire à deux réponses opposées pose à la fois la question de la complexité du modèle, et celle de la fiabilité des réponses pour une personne « non avertie » de ces « subtilités ».

Les « nombres » dans la société

Nous vivons dans un monde d'informations baigné de pourcentages, et le citoyen a beaucoup de peine à s'y repérer, à la fois par le manque de référence aux populations, et aussi parce qu'avec les mêmes données on peut arriver à deux conclusions contradictoire comme ci-dessus. Les statistiques apparaissent alors au mieux comme une science de la manipulation, au pire comme une science du mensonge, comme en témoignent les trois citations ci-dessous :

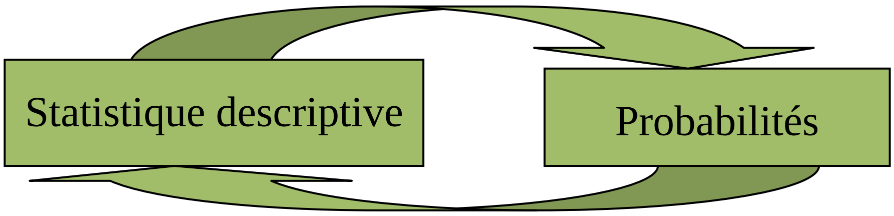
Interprétation manipulatoire des résumés du modèle :
« Il existe trois sortes de mensonges : les mensonges, les affreux mensonges, et les statistiques » (Benjamin DISRAELLI)
Rétention d'une partie de l'information :
« Les statistiques, c'est comme le bikini, ça montre tout, mais ça cache l'essentiel » (Louis ARMAND)
Caution intellectuelle :
« Les statistiques sont formelles : il y a de plus en plus d'étrangers dans le monde » (Pierre DESPROGES)

LE MONDE DE L'INCERTITUDE : LE MODÈLE PROBABILISTE

Nous vivons dans un « monde de hasard et d'incertitude ». Et pour modéliser ce monde, les mathématiques vont prendre comme hypothèse qu'il est « probable » : elles vont alors nous offrir avec le modèle probabiliste une représentation des informations pour les traiter et en tirer des conclusions « vraisemblables » et « probables » comme outils d'aide à la décision. Les mathématiques vont alors nous interroger sur la pertinence du modèle choisi, sur la fiabilité des affirmations qu'on peut produire à partir de cette modélisation, sur l'interprétation qu'on peut en tirer.

DES STATISTIQUES AUX PROBABILITES

La statistique descriptive est une première mathématisation et donc une première abstraction du monde. Les probabilités vont offrir une modélisation de cette « réalité abstraite » intégrant et mathématisant une dimension fondamentale du monde de l'incertitude : le hasard. Le schéma ci-dessous traduit bien ce passage des statistiques aux probabilités, appelées statistiques « inférentielles » ou « inductives ».



Données	Données calculées
Résultats	Résultats
Distribution de	Loi de probabilité
Moyenne	Espérance

Des statistiques aux probabilités : un problème historique

Le prince de Toscane demande à Galilée (1554-1642) pourquoi, alors que les nombres 9 et 10 ont autant de décomposition en somme de 3 chiffres compris entre 1 et 6, on obtient plus souvent 10 lorsqu'on lance 3 dés ?

9	10
1+2+6	1+3+6
1+3+5	1+4+5
1+4+4	2+2+6
2+2+5	2+3+5
2+3+4	2+4+4
3+3+3	3+3+4

Galilée fait alors un des premiers calculs probabilistes en considérant la notion « d'événement élémentaire ». Supposons qu'il y ait un dé vert, un dé jaune et un dé rouge. Il n'y a qu'une façon de réaliser 3+3+3, à savoir 3 quelle que soit la couleur du dé. Par contre il y a 6 façons de réaliser 1+3+5, suivant que ces nombres soient sur le dé vert, le dé jaune ou le dé rouge. Considérant alors l'ensemble des évènements élémentaires, il établit que 9 a 11,85% de « chance » de sortir, alors que 10 en a 12,5%.
Cette modélisation repose sur l'équiprobabilité de sortie des faces des dés et sur l'indépendance des jets de dés.
Mais ce qui m'a toujours fasciné, c'est le fait que le prince de Toscane ait pu émettre cette conjecture, alors que les résultats mathématiques sont si proches. Combien de fois avait-il du jouer à ce jeu là ! Et, quelque part, il pressentait la « loi des grands nombres », que je résumerai ici par une relative stabilisation d'une fréquence par

répétition d'évènements indépendants. Quand je dis ici « relative », je fais référence à la troisième approche de la mesure que j'ai donnée beaucoup plus avant dans mon exposé, à savoir un intervalle.

Des probabilités aux statistiques

Un calcul probabiliste montre que la probabilité que deux personnes soient nées le même jour de l'année devient supérieure à son contraire à partir d'un groupe de 23 personnes. Ce calcul repose sur l'équiprobabilité des jours d'une année pour les naissances.
Où trouver 23 personnes ? Sur un terrain de football avec les 22 joueurs et l'arbitre !
Robert Matthews, journaliste britannique et mathématicien, et Fiona Stones se sont intéressés aux matchs de première division du Royaume-Uni joués le 19 avril 1997. Sur 10 rencontres, six étaient avec coïncidences (deux personnes nées le même jour), et quatre sans.
On est ici avec la démarche inverse : vérifier un calcul probabiliste par des statistiques. On mesure ici la fonction justificative du modèle vers la réalité, et la formidable capacité d'anticipation qu'elle donne : sachant qu'il y a 365 jours dans une année, qui irait parier sur cette coïncidence dans les tribunes d'un stade…sinon les mathématiciens !

DES PISTES POUR TRAVAILLER L'ALÉATOIRE AU CYCLE 3

Que ce soit dans le domaine des statistiques ou dans celui des probabilités, notre enseignement français accuse un certain retard par rapport à d'autres pays, en particulier les pays anglo-saxons. Différentes raisons peuvent expliquer ce retard :

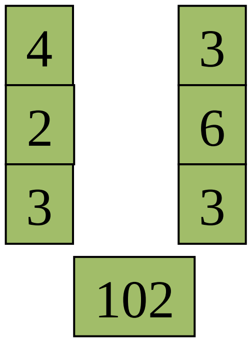
- *Impression que ce ne sont pas de " vraies mathématiques* **"** : si on se contente en effet de remplir des tableaux " tout prêts ", de faire des graphiques sans réfléchir à la pertinence de leurs choix en fonction du phénomène étudié, si on ne donne pas un sens profond à cette activité, les statistiques n'apparaissent que comme une suite de recettes.
- *Manque de formation des enseignants* : c'est une des raisons principales, car donner du sens à un enseignement de statistiques suppose une solide formation, débordant le cadre des contenus du collège, formation qui n'a jamais été vraiment assurée.
- *Manque de temps* : devant la difficulté à " boucler " les programmes, grande est la tentation de reléguer cette partie en fin de programme, s'il reste du temps ; ce choix est souvent argumenté par le fait que l'absence, ou la faible part accordée à ce domaine sera sans conséquence pour les élèves pour suivre en mathématiques dans les années ultérieures.

Et pourtant dès l'école primaire on peut mener des activités mettant en jeu l'aléatoire, comme en témoigne cette situation proposée par Claudine Schwartz et Catherine Houdement :

Qui peut le plus ?

Règles du jeu :

1. Dans chaque binôme, un élève lance un dé. Chaque élève du binôme choisit de placer le nombre obtenu dans une des deux cases de la première ligne (à gauche ou à droite).
2. Puis c'est au tour du second élève du binôme de lancer. Chaque élève place alors le nombre dans la case restée vide de la première ligne.
3. On recommence pour la deuxième et la troisième ligne.
4. On additionne les trois nombres obtenus et on met le résultat dans la case du bas.



Objectif :
Il s'agit d'obtenir le plus grand nombre possible dans la case inférieure. Ce nombre est obtenu comme la somme de trois nombres à deux chiffres (cases au-dessus).

Du hasard aux stratégies

Nous avons pu observer des classes sur cette activité, et assez vite se dégagent trois catégories de stratégies :

- des stratégies toujours gagnantes : le 6 à gauche et le 1 à droite,
- des stratégies fortement gagnantes : le 5 à gauche et le 2 à droite,
- des stratégies plus souvent gagnantes : le 4 à gauche et le 3 à droite.

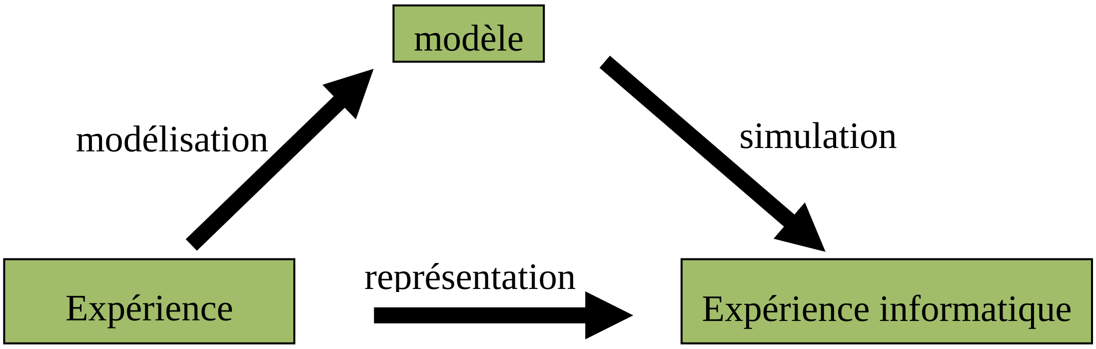
S'appuyant sur l'hypothèse de l'équiprobabilité de sortie des faces d'un dé, ces élèves comme Galilée, dénombrent le nombre d'évènements favorables.
On peut donc s'appuyer sur cette conceptualisation précoce pour sensibiliser les élèves à l'entrée mathématique dans le monde de l'aléatoire.

LES SPAGHETTIS : LE RETOUR !

Je vais maintenant revenir sur mes problèmes de spaghettis du début de mon exposé pour entrer encore plus avant dans ce processus de modélisation. Et je vais pour cela utiliser la « simulation », qui, comme son nom l'indique, est une façon de représenter le problème de façon analogique, mais avec des outils mathématiques.

La place de la simulation :

Pour comprendre la place de la simulation, j'utiliserai ce schéma ternaire que Bernard Parzysz propose dans son article « Expérience aléatoire et simulation » (Repères-IREM n° 66).

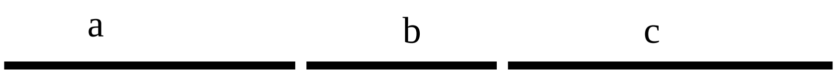


Pour simuler, il est nécessaire d'avoir modélisé le problème, c'est à dire d'en avoir fait une représentation qui permette de travailler avec des outils comme les calculatrices ou l'ordinateur. Mais cela ne veut pas dire qu'on connaisse une « loi mathématique » qui explique le phénomène étudié.
La simulation repose sur les générateurs aléatoires qui doivent avoir pour qualité essentielle l'équirépartition des nombres.

Mes spaghettis de quatrième

Mon expérience malheureuse de quatrième consistait à couper un spaghetti en trois « au hasard ». Je suis bien incapable de modéliser cette expérience réelle. Mais elle va m'éclairer pour simuler. En observant les élèves, on constate deux grandes façons de faire : soit ils essaient de couper le spaghetti d'un « seul coup » en trois, avec peu de chances d'obtenir trois morceaux, soit ils font une première cassure aléatoire, puis recasse l'un des deux morceaux obtenus.
Pour simuler cette expérience, je prends mon spaghetti mathématique de troisième (de longueur 1 et avec équiprobabilité de cassure), et je décris en langage « informatique » chacune des deux expériences :

Couper un spaghetti « au hasard » en 3 morceaux « simultanément »

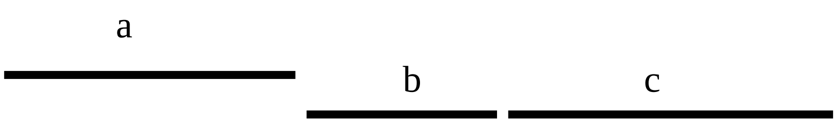


- x = rnd ; y = rnd
- a = min (x, y) ; b = max(x, y) – a ; c = 1 – (a+b)
- Test : max {a, b, c} < $\frac{1}{2}$ (la somme des trois longueurs étant 1)

On peut alors :
- soit faire des « échantillons » (par exemple de 100 tirages), et on trouve comme fréquences de triangles : 0,26 ; 0,23 ; 0,25 ; 0,27 ; 0, 24…
- soit programmer et laisser tourner l'ordinateur, et constater une certaine stabilisation de la fréquence dans l'intervalle [0,24, 0,26]

Les probabilités traitent avec le même modèle ces deux approches (voir mon article « *L'apprenti fréquentiste* »).

Couper un spaghetti « au hasard » en 2 morceaux, puis « le morceau restant » en 2



x= rnd ; y = rnd
a = x ; b = (1 – x)y ; c = 1 – (a+b)
Test : max {a, b, c} < $\frac{1}{2}$

- Le tirage d'échantillons donne comme fréquences de triangles : 0,22 ; 0,18 ; 0,19 ; 0,20 ; 0,21 ; 0,17 ; 0,17…..
- La suite obtenue en faisant tourner l'ordinateur a une certaine stabilisation dans l'intervalle [0,18, 0,21]

Au-delà de montrer que la mesure de la fréquence est ici un intervalle (voir la typologie que je vous avais proposée), cette double expérience met en évidence que « au hasard » mérite d'être précisé. Dans les deux cas on a coupé un spaghetti au hasard, mais ce sont les conditions de l'expérience qui permettent de modéliser ce hasard (cf « le paradoxe de Bertrand »).

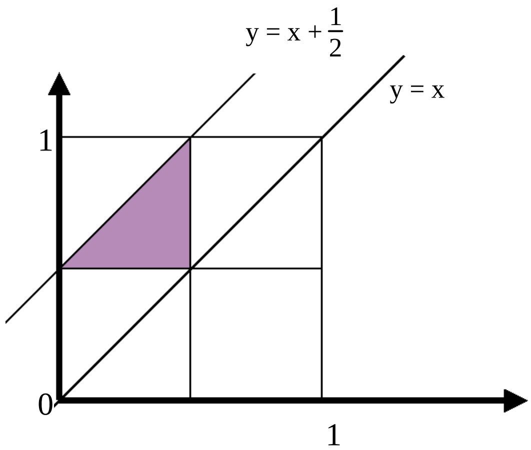
Modélisation géométrique

Comment alors trouver un modèle mathématique qui permette de calculer « la » « probabilité » d'obtenir un triangle dans les conditions d'expérience ci-dessus ? Il faut passer du modèle discret au modèle continu, et de l'équiprobabilité à la probabilité uniforme.
Chacun des tirages me donne un couple (x, y) qui peut être représenté par un point dans un repère. La probabilité cherchée est donc le rapport du nombre de points satisfaisant à l'obtention d'un triangle par rapport au nombre de points possibles.
En plongeant dans le modèle continu, cela va se traduire par le rapport de l'aire de la surface où se trouvent ces points solutions à l'aire totale possible qui est ici celle du carré [0,1] × [0,1], c'est à dire 1 (la notion d'ouvert et de fermé n'ayant pas d'importance compte tenu de la modélisation).

Couper un spaghetti « au hasard » en 3 morceaux « simultanément »

Distinguons les deux cas x < y et x > y

Si x < y



L'aire de la surface « solution » et donc la probabilité est 1/8

Si x > y

On trouve comme surface « solution » le triangle symétrique de celui ci-dessus par rapport à la diagonale du carré « y = x », donc de nouveau une probabilité de $\frac{1}{8}$

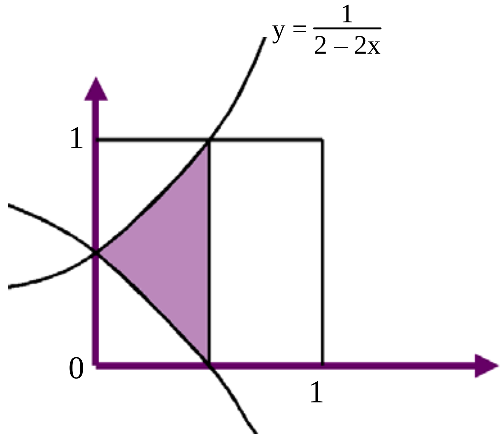
Ces deux cas étant exclusifs, la probabilité cherchée est donc :

$$p = \frac{1}{4}, \text{ soit } 0{,}25$$

…ce qu'on aurait pu « pronostiquer » compte tenu des fréquences obtenues !

Couper un spaghetti « au hasard » en 2 morceaux, puis « le morceau restant » en 2

La modélisation géométrique donne :



Le calcul de l'aire de la « surface solution » donne, via le calcul intégral, la probabilité :

$$p = \ln 2 - \frac{1}{2}, \text{ soit environ } 0{,}1931$$

Là, c'était beaucoup plus difficile de « pronostiquer » à partir des fréquences !

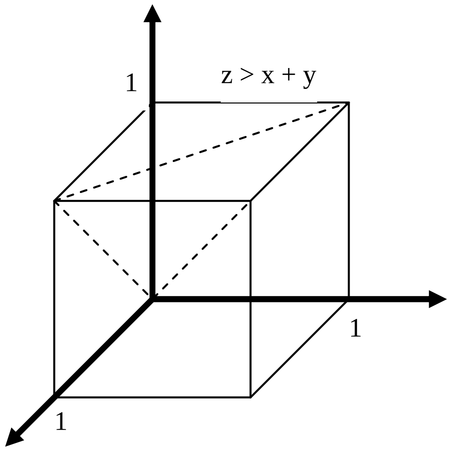
Et mes spaghettis de troisième ?

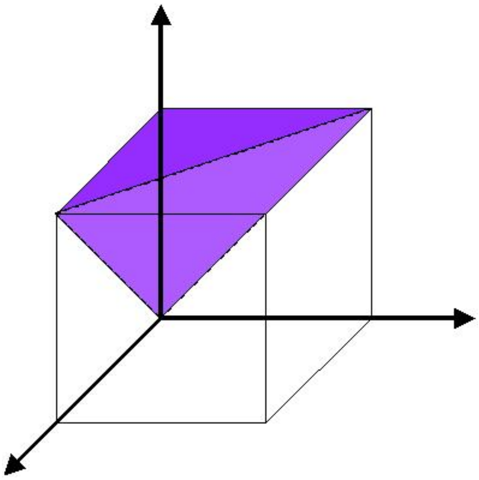
Il m'a fallu un certain temps pour « quitter le plan », et comprendre que je travaillais avec trois spaghettis indépendants, et que les trois « cassures » pouvaient être représentées par un triplet (x, y, z) coordonnées d'un point de l'espace. La modélisation géométrique donne alors comme solution le rapport du volume du « solide solution » par le volume du « solide possible », ici le cube [0,1] × [0,1] × [0,1], soit 1.

Pour trouver ce solide solution, il suffit d'enlever le solide non solution.
Celui-ci se découpe en trois solides élémentaires du cube donné par les conditions :

$$z > x+y \; ; \; y > x+z \; ; \; x > y+z$$

Le cas z > x+y





On trouve un tétraèdre de volume $\frac{1}{6}$

Les deux autres cas donnent chacun un tétraèdre de volume $\frac{1}{6}$, et n'ont pas de points communs.
La probabilité de non solution est donc $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$, soit $\frac{1}{2}$

Donc la probabilité d'obtenir un triangle dans mon expérience de troisième est :

$$p = 1 - \frac{1}{2}, \text{ soit } p=\frac{1}{2}$$

Lorsque j'ai trouvé cette modélisation et ce résultat, j'étais heureux ! Ma pensée était devenue libre par rapport à ce problème, et c'est avec confiance que je regardais tourner mon ordinateur, ou répétais cette expérience par échantillon avec mes élèves.
Ce qu'apportent les mathématiques, c'est cette merveilleuse compétence d'anticipation et de contrôle !

LA LOI DE BENDFORD

Supposons une situation qui nous donne une grande quantité de nombres qui nous apparaissent tout à fait aléatoires, et que l'on nous pose la question suivante :
« Prenons le premier chiffre de chacun de ces nombres : quelle est la répartition des 1, des 2, …, des 9 ? ».
En absence de toute autre connaissance, notre réflexe sera l'équiprobabilité, c'est à dire de dire que chaque chiffre a une probabilité d'apparition de 1/9.

Trois références de données

La situation suivante nous a été proposée par Claudine Schwartz lors d'une réunion de la CREM.

Le tableau ci-dessous donne la fréquence d'apparition du premier chiffre de nombres pris respectivement :

- Colonne 2 : 1000 nombres du Monde daté du vendredi 23 avril 1999 ;
- Colonne 3 : 914 nombres d'un historique de compte de la société Gilibert ;
- Colonne 4 : nombres d'habitants de 1229 communes obtenus lors du recensement de 1992.

Premier chiffre	Le monde	Gilibert	Commune
1	0,322	0,317	0,321
2	0,151	0,161	0,168
3	0,108	0,142	0,133
4	0,099	0,088	0,081
5	0,073	0,070	0,087
6	0,081	0,061	0,067
7	0,055	0,070	0,055
8	0,065	0,040	0,045
9	0,046	0,050	0,044

Deux constats s'imposent :

- On est bien loin de l'équiprobabilité (qui est pourtant notre premier réflexe).
- Les trois expériences donnent des résultats vraiment proches.

La loi de Bendford

Claudine Schwartz, en s'appuyant sur le constat que les résultats étaient invariants par changement d'échelle, a « modélisé » ces situations en utilisant la loi de Bendford :

« La probabilité que le premier chiffre à gauche dans l'écriture en base 10 soit i = 1,….,9 est log (1 + 1/i) (logarithme décimal) »

La dernière colonne du tableau ci-dessous donne les fréquences théoriques obtenues par calcul avec cette loi. La modélisation par cette loi apparaît comme très bonne d'un point de vue qualitatif.

Premier chiffre	Le monde	Gilibert	Commune	Loi de Benford
1	0,322	0,317	0,321	0,301
2	0,151	0,161	0,168	0,176
3	0,108	0,142	0,133	0,125
4	0,099	0,088	0,081	0,097
5	0,073	0,070	0,087	0,080
6	0,081	0,061	0,067	0,067
7	0,055	0,070	0,055	0,058
8	0,065	0,040	0,045	0,051

9	0,046	0,050	0,044	0,046

Mais avoir modélisé mathématiquement nous donne-t-il le sens profond du phénomène ? Cette question m'a conduit à deux pistes de réflexion :

Comment Bendford a-t-il eu l'idée d'une telle loi ?

Celle-ci repose sur le fait que les logarithmes des nombres sont uniformément distribués, ce qui peut se traduire par : un nombre a autant de chances d'être entre 100 et 1000 (log 2 et log 3) qu'entre 10 000 et 100 000 (log 4 et log 5). Cette répartition va s'appliquer aux phénomènes de type exponentiels.
Bendford a établi cette loi en 1938, à la suite d'étude de nombreuses données ; il s'appuyait sur les travaux d'un astronome américain, Simon Newcomb, qui en avait donné les prémisses en 1881 en s'appuyant sur un constat : la forte usure des premières pages des tables de logarithme !

Comment donner du sens à cette loi ?

Nous sommes devant des phénomènes « évolutifs ». Pour donner du sens à cette modélisation, j'ai essayé d'imaginer une simulation (qui ne peut reposer sur le tirage « au hasard » de nombres) : j'écris la suite des entiers naturels en déclenchant un chronomètre ; le chronomètre s'arrête « au hasard », et je fais mes comptes ! Il y a donc bien du hasard là-dedans, mais pas là où on le croit.

Connaître le bon modèle, ça sert !

Tout cela me direz-vous n'est que jeu de mathématicien ! Ceux qui se sont fait « épinglés » par le fisc qui utilisait cette loi pour vérifier leur comptabilité n'en sont pas complètement convaincus !

CONCLUSION

Comme je vous l'avais annoncé, j'ai essayé dans cet exposé de « revisiter » un certain nombre de « mondes mathématiques » de notre enseignement sous l'angle du rapport au réel et de la modélisation. Compte tenu de l'ampleur du sujet et du temps dont je disposais, cela a pu apparaître comme un survol.
S'il fallait garder une idée forte, c'est que les mathématiques sont au regard de l'histoire un formidable outil intellectuel pour penser le monde qu'a créé l'homme, qu'il a enrichi au fil des siècles et des civilisations ! Et si nous pouvions persuader nos élèves de cela, peut-être notre enseignement produirait-il moins « d'écorchés vifs des mathématiques » !
Nous avons le devoir de transmettre ce patrimoine de l'humanité, et Joseph Fourier résume bien cela en disant des mathématiques qu'elles sont ***« une faculté de la raison humaine, destinée à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens ».***

BIBLIOGRAPHIE

BARROW J.D. (1996) Pourquoi le monde est-il mathématique ? ; éditions Odile Jacob

BRISSIAUD R. (2007) « C*alcul mental, symbolisme arithmétique et résolution de problèmes » ;* Bulletin APMEP n°469.

DUPERRET JC (1995) *« L'apprenti fréquentiste »* ; Repères-IREM n°21

DUPERRET et JC FENICE JC. (1999) *« L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu du collège »* ; Repères-IREM n° 34

DUPERRET JC (2001) *« Le geste géométrique ou l'acte de démontrer »* ; Repères-IREM n° 43

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A (2006) « *Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie »* Annales de didactique et de sciences cognitives, vol 11, IREM de Strasbourg

HOUDEMENT C ; (2007) *«A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège »* ; Repères-IREM n° 67

IREM de Montpellier (2002) Les narrations de recherche ; Brochure APMEP n° 151

KAHANE JP. (1997) *« Le théorème de Pythagore, l'analyse multifractale et le mouvement brownien »* ; Repères-IREM n° 29

KAHANE JP et al (2002) L'enseignement des sciences mathématiques : rapport de la CREM ; éditions Odile Jacob

PARZYSZ B (2007) « *Expérience aléatoire et simulation* » ; Repères-IREM n° 66