Economie, finance et mathématiques
de la réalité à la modélisation

Conférence de l'APMEP

Laon 2015

Laurence Carassus

URCA

Plan de l'exposé

- Les produits financiers
- Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage
- Quelques problèmes économiques
- Quelques métiers en finance/économie

Produits financiers
Sous-jacents : action, obligation

- Action : une action est un titre de propriété qui donne deux droits à son détenteur au près de le l'entreprise :
  - Droit sur les bénéfices de l'entreprise : les dividendes
  - Droit sur la direction de l'entreprise : participation à l'AG et droit de vote.
- Exemples : France telecom, société générale,…

NYSE Euronext Data Solutions

Last -2.57%

21.64

€ 10/01/11 17:35:40 CET

[Realtime data]

Open	High	Low
22.235	22.235	21.555

VIE LISTED NYSE EURONEXT

Codes and classification

ISIN	FR0000124141	Mnemo	VIE	CFI	ESVUFB

Market	EURONEXT PARIS - Euronext - Local Securities	
Type	Stock - Ordinary stock - Continuous	Compartment A (Large Caps)

DLY			10/01/11 17:39 CET
Bid (€)	21.64	Ask (€)	21.645
Limit ↗	22.935	Limit ↘	20.345

Market data DLY		10/01/11 17:35 CET
Last (€) (1)		21.64
Change D/D-1 (%) (2)		-2.57
Volume		1,744,453
Turnover		37,891,539
Capitalisation		10,799,555,697
Day		
First (€)	09:00	22.235
High (€)	09:00	22.235
Low (€)	14:06	21.555
/31-12		
Change (%)		-1.05
High (€)	06/01/11	22.535
Low (€)	10/01/11	21.555

Produits financiers

Sous-jacents : action, obligation

- Obligation : titre de créance et non de propriété. Donne le droit au
  - Remboursement du capital
  - À la perception d'intérêt, les coupons.
- Exemples : OAT, Bund,….

OAT4%25APR13

Add to My Euronex

[Realtime dat

NYSE Euronext Data Solutions

106.36	Open	High	Low
% 10/01/11 17:02:42 CET	106.35	106.36	106.30

Bond Type : **Bonds** / Coupon rate % : **4.00**
Repayment date : **25/04/2013** / Issue amount : **- ()**

Valuation calculat

Codes and classification

ISIN	FR0000188989	Mnemo	ETADT	CFI	DBFTFB
Market	EURONEXT PARIS				
Type	Bond - Bonds - Continuous				

DLY		10/01/11 17:21 CET	
Bid (%)	106.37	Ask (%)	106.47
Limit ↗	107.00	Limit ↘	105.00

Market data DLY	10/01/11 17:02 CET	
Last (%)		**106.36**
Accrued coupon %		2.871
Volume		27,493
Turnover		29,231
Day		
First (%)	09:00	106.35
High (%)	17:02	106.36
Low (%)	11:37	106.30
/31-12		
Change (%)		-0.01
High (%)	04/01/11	106.55
Low (%)	07/01/11	106.28

Produits financiers
Sous-jacents : quid des mathématiques

- Sous-jacents : quid des mathématiques
  - Modélisation des processus gouvernant les cours des sous-jacents
  - Une fois ces processus choisis, estimation de leurs coefficients :
    - statistiques paramétriques, non paramétriques.
  - Prévisions
    - L’estimation des taux à très long terme est devenu un enjeu très important, on parle de risque de longévité

Produits financiers

Produits dérivés : introduction

- Produit dérivé (actif, instrument, …)

  « un produit dérivé est un instrument dont la valeur (les flux, les paiements) dépend (est dérivée) de la valeur d'une autre (d'autres) variable(s) plus fondamentale(s). »
- Exemples de variables (sous-jacent) :
  - Matières premières
    - denrées alimentaires, métaux précieux, pétrole, …
  - Taux d'intérêt
    - titres à revenus fixes à court ou long termes : T-bills, OAT…
  - Taux de change
    - dollars contre euros, yens, livres sterling, …
  - Valeurs mobilières de placement
    - actions, indices boursiers
  - Et aussi : inflation, températures, ouragans…

Produits financiers
Produits dérivés : introduction

- Existe depuis très longtemps
  - exemple d’achat à terme et d’options au 17eme siècle en Hollande sur les tulipes.
- Les transactions à terme se font régulièrement depuis le 19ème siècle :
  - Chicago, 1860, céréales et bétail
  - Londres, 1880, métaux.
- Limite de ces échanges dits de de gré à gré ou OTC:
  - les échanges sont sujets au risque de contrepartie
  - le marché est peu liquide (peu d’achat et de ventes).
- Standardisation des produits et création de marchés organisés permet d’assurer la liquidité du marché et la sécurité des transactions et lance le développement de ces produits.

Produits financiers
Description des produits

- **Futures** : engagement à acheter (long) ou à vendre (short) un actif à une date ultérieure pour un prix fixé aujourd'hui appelé prix « futures »
  - cela contraste avec le prix au comptant (« spot »)
  - le prix « futures » est le prix fixé aujourd'hui auquel l'accord d'achat ou de vente sera exécuté dans le futur.

Produits financiers
Description des produits

- Exemple :
  - Le 11/10/15 position longue sur le contrat cacao décembre 2015 au prix « futures » de 2086 £ la tonne pour 10 tonnes
    - Engagement à acheter en décembre 2015, 10 tonnes de cacao au prix de 2086 £ la tonne
    - Valeur totale du contrat : 10* 2086 = 20 860 £
- Flux terminaux
  - Dans le cas d'un cours spot final à 2000 £ à 2100 £?
  - Gain maximal : ?
  - Perte maximale : ?

Produits financiers
Description des produits

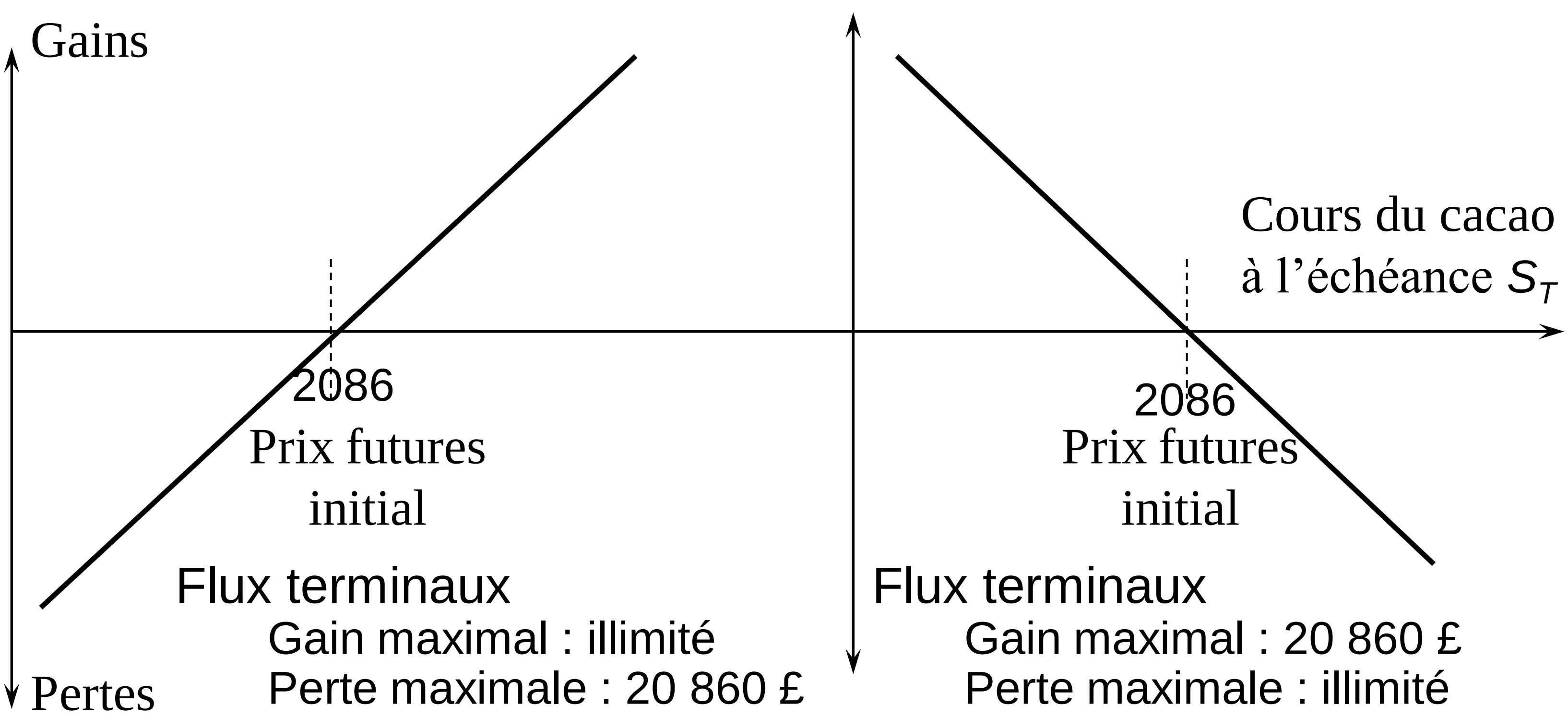
Deux exemples de situation finale :

- Le 25 décembre, cours spot du cacao 2100 £
  - Via le contrat future, achat de 10 tonnes de cacao à 2086 £ la tonne et revente sur le marché à 2100 £
  - flux : (2100-2086)*10=140 £
  - Profit de 140 £ moins commissions et frais.
- Le 25 décembre, cours spot du cacao 2000 £
  - Via le contrat future, achat de 10 tonnes de cacao à 2086 £ la tonne et revente sur le marché à 2000 £
  - flux : (2000- 2086)*10=-860£
  - Perte de 860 £ plus commissions et frais.

Produits financiers

Description des produits

- Profils de gains/pertes
  - de la position longue
  - de la position courte



Flux terminaux
Gain maximal : illimité
Perte maximale : 20 860 £

Flux terminaux
Gain maximal : 20 860 £
Perte maximale : illimité

Produits financiers
Description des produits

- Notion de couverture
  - vous allez avoir besoin de 10 tonnes de cacao pour votre chocolaterie en décembre et vous craignez une hausse des cours du cacao:
    - acheter des contrats futures sur Cacao (prendre une position longue)
  - vous allez produire 10 tonnes de cacao en décembre et vouloir les vendre sur les marchés et vous craignez une baisse des cours du cacao:
    - Vendre des contrats futures sur Cacao (prendre une position courte)

Produits financiers
Description des produits

- **Le future** est un contrat simple qui n'a pas de coût immédiat mais qui ne permet pas de bénéficier uniquement des bonnes fluctuations du marché.
- **Option** : droit d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif à une date ultérieure et un prix fixés aujourd'hui (strike)
  - au contraire des futures, le détenteur de l'option n'a pas l'obligation d'acheter ou de vendre
  - Pour cela il faut donc payer une prime versée aujourd'hui au vendeur de l'option par l'acheteur.

Produits financiers

Description des produits

ACHETEUR

Option d'achat (CALL)

Option de vente (PUT)

VENDEUR

A la signature du contrat

PAYE LA PRIME

ENCAISSE LA PRIME

Le jour de l'échéance

GAIN sûr entre 0 et l'infini

PERTE sûre entre 0 et l'infini

La disymétrie de situation justifie le paiement d'une PRIME que l'acheteur paye au vendeur dès la signature du contrat.

Produits financiers
Description des produits

- Exemple : Air Liquide (2015 Dec 109.09 Call)
  - Call → option d'achat
  - Air Liquide → sous-jacent : titre coté sur Euronext Paris (cours le 11/10/15 : 110,45 €)
  - Quotité : 100 titres
  - jan → échéance : dec 2015
  - 109.09 → prix d'exercice : prix auquel les titres pourront être achetés
  - prime le 11/10/15 : 5,19 € (en € par titre)
- Achat du call Air Liquide le 11/10/15 de strike 109,9
  - Le 11/10/15, on paye la prime 5,19 x 100 = 519 euros

Produits financiers
Description des produits

- Achat du call Air Liquide le 11/10/15 de strike 109,9
  - si Air liquide vaut 108 € le 18/12/15 :
    - flux en cas d'exercice (pour un titre) :

Achat Air liquide au prix d'exercice	- 109,9 €
Revente Air liquide sur Euronext	+ 108 €
Flux Total	- 1,9 €

    - flux en cas d'abandon de l'option : 0 €
    - Décision ?

Produits financiers

Description des produits

- si l'action Air liquide vaut 111 € le 18/12/15 :
  - flux en cas d'exercice (pour un titre) :

Achat Air Liquide au prix d'exercice	- 109,9 €
Revente Air Liquide sur le Euronext	+ 111 €
Flux Total	+ 1,1 €

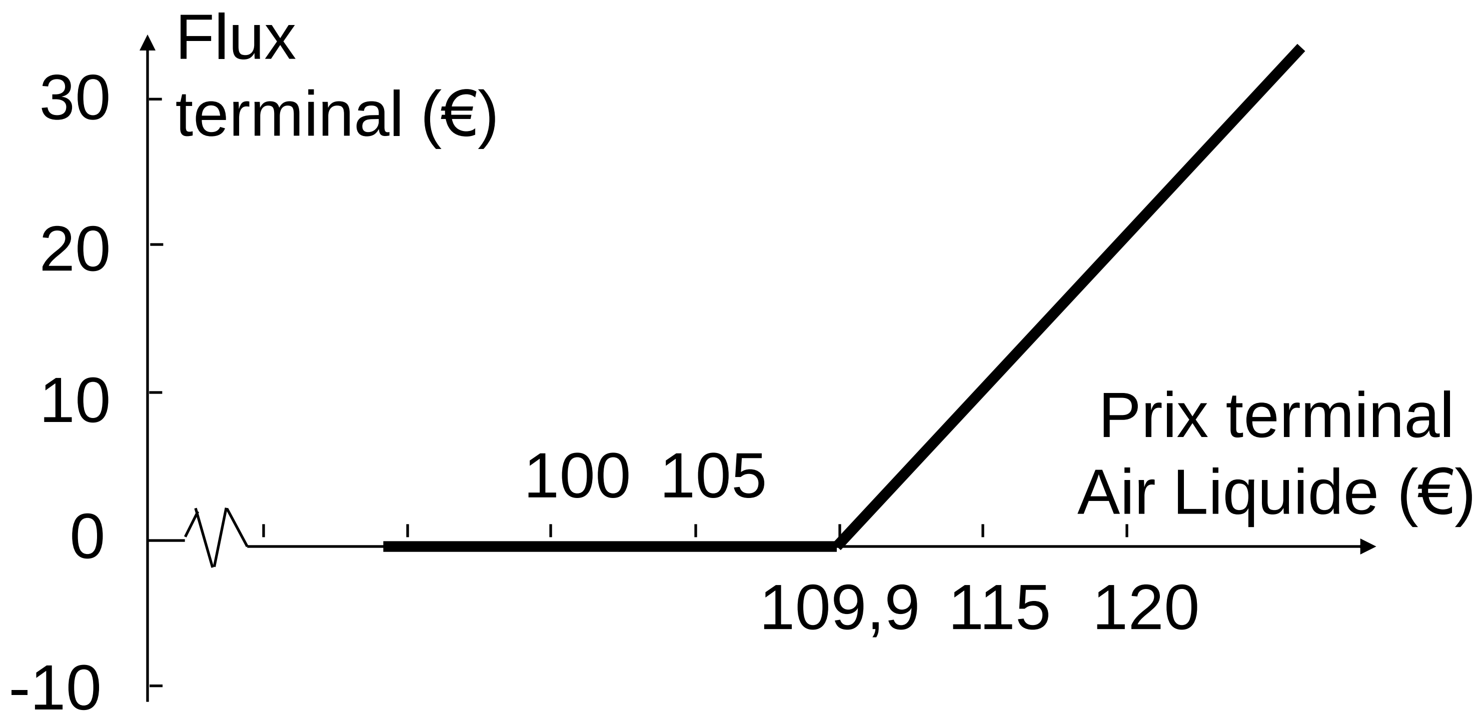
  - flux en cas d'abandon de l'option : 0 €
  - Décision ?
- à partir de quel prix faut-il exercer l'option ?

Dès que le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice, l'exercice du call est profitable

Produits financiers

Description des produits

- Flux terminaux : $C_T = \max(S_T - K\ ;\ 0)$



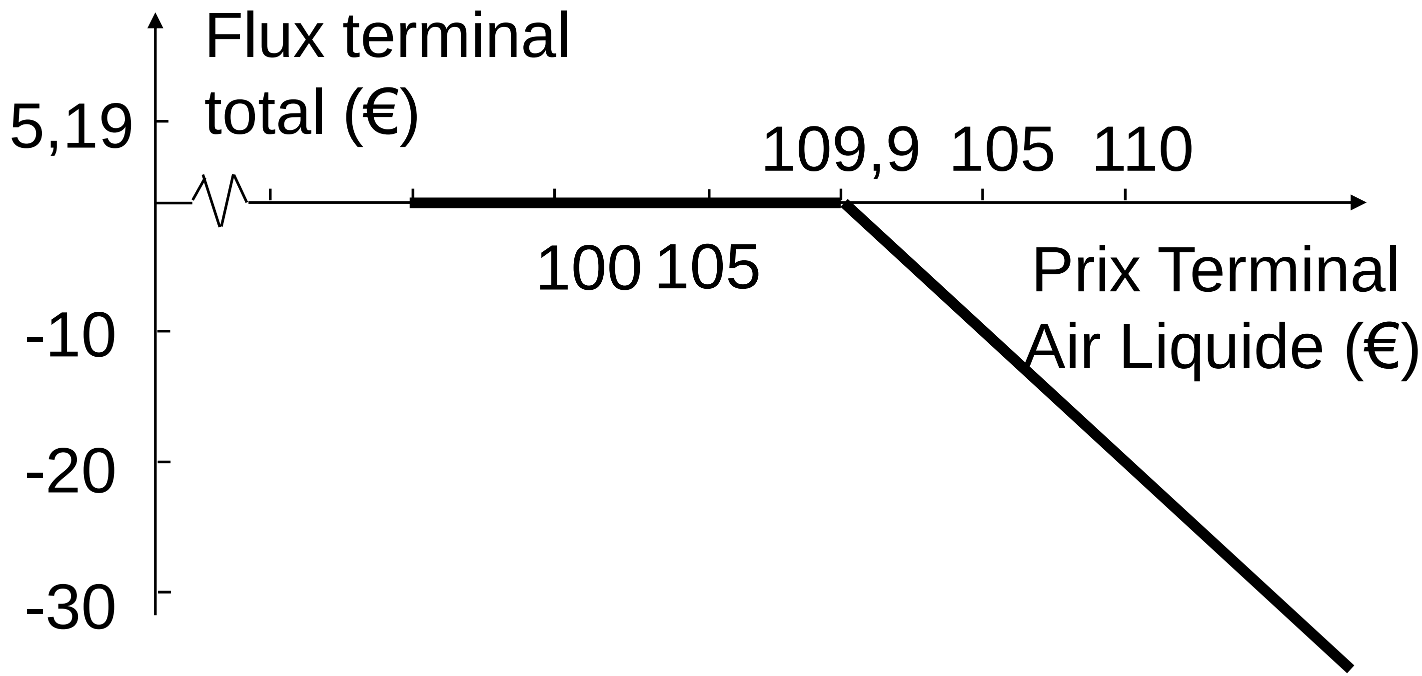
Produits financiers
Description des produits

– A quoi s’engage (s’expose) un investisseur prenant ces positions ?
  - les flux dégagés par l’achat d’une option sont toujours positifs ou nuls à l’échéance
  - la perte potentielle d’un acheteur d’option se limite donc à la prime versée initialement

Produits financiers

Description des produits

– Les pertes d’un vendeur d’option (call) peuvent être très importantes (potentiellement illimitées pour le vendeur d’un call). Le gain est limité à la prime.

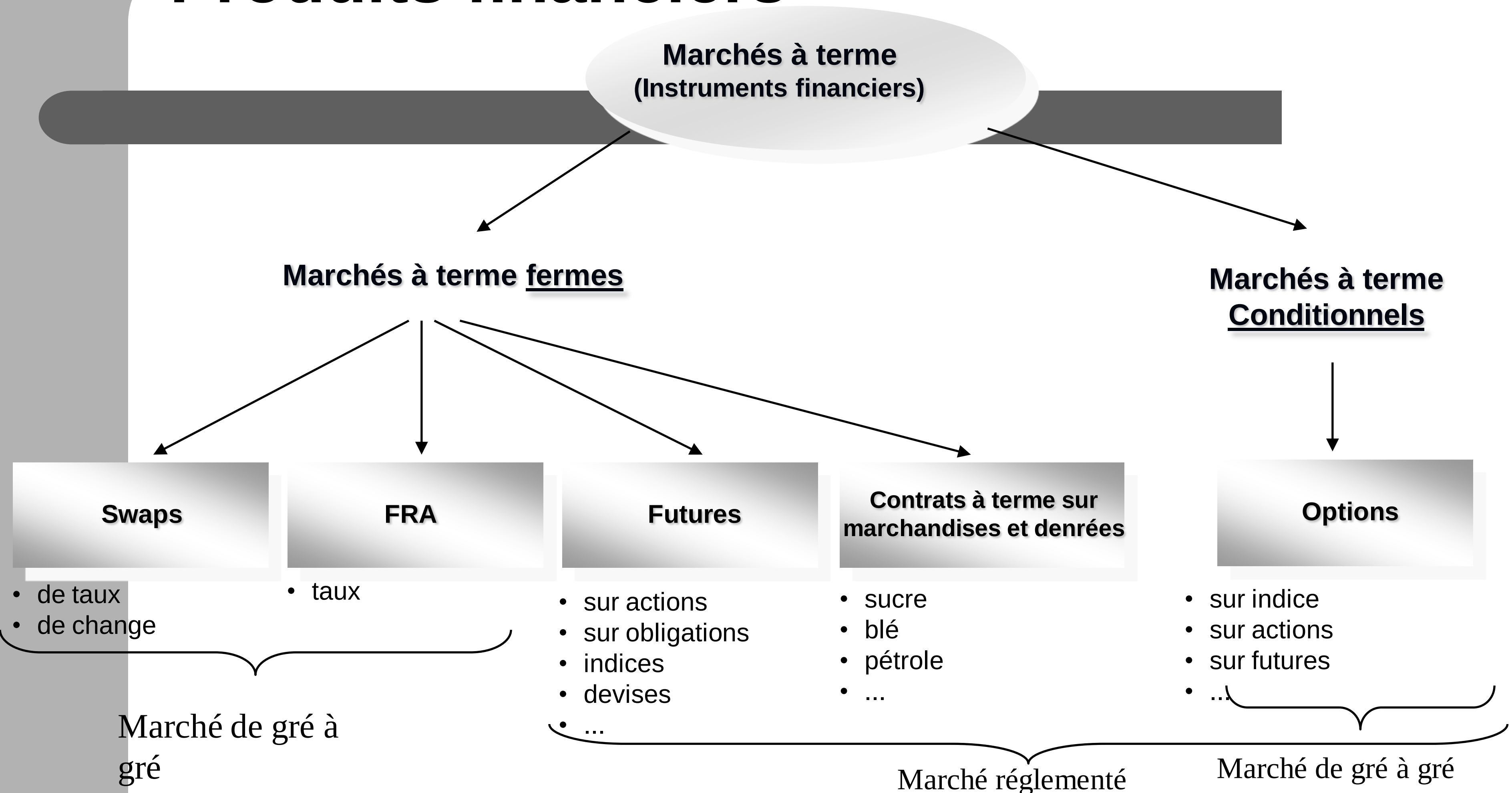


Produits financiers

Description des produits

- Notion de couverture
  - vous détenez des actions air liquide dont la valeur est aujourd'hui de 110,45 euros et vous voulez couvrir cette position contre la baisse des cours. Vous pouvez:
    - acheter de puts, prix d'exercice 110 et d'échéance 12/2015
      - permet de vous assurer contre la baisse des cours en deçà de ce seuil
    - vendre des contrats futures sur action air liquide (prendre une position courte)
- Action duale, du spéculateur :
    - le vendeur des puts, prix d'exercice 110 et échéance décembre anticipe une hausse des prix : gain de la prime

Produits financiers



Les instruments optionnels : options, warrants, cap, floor, collar, options sur swaps, instruments plus complexes sont traités en gré à gré

Produits financiers
Exemples

Agricultural Products Homepage

CME ClearPort
Agricultural Product Slate

Block Trades
Agricultural Block Trades

Grains and Oilseeds (CBOT)

Corn	FUT | OPT
Mini-Sized Corn	FUT
Corn Calendar Spread Options	OPT
Distillers Dried Grain	FUT
Wheat	FUT | OPT
Mini-Sized Wheat	FUT
Wheat Calendar Spread Options	OPT
Soybeans	FUT | OPT
Mini-Sized Soybeans	FUT
Soybean Calendar Spread Options	OPT
Soybean Meal	FUT | OPT
Soybean Meal Calendar Spread Options	OPT
Soybean Oil	FUT | OPT
Soybean Oil Calendar Spread Options	OPT
Soybean Crush	FUT | OPT
Oats	FUT | OPT
Rough Rice	FUT | OPT
Wheat-Corn Intercommodity Spread Options	OPT
Soybean - Corn Price Ratio Option	OPT

Grains and Oilseeds (CME)

Crude Palm Oil	FUT

Livestock (CME)

Live Cattle	FUT | OPT
Live Cattle Calendar Spread Options	OPT
Lean Hogs	FUT | OPT
Lean Hogs Calendar Spread Options	OPT
Feeder Cattle	FUT | OPT
Frozen Pork Bellies	FUT | OPT

Dairy (CME)

Class III Milk	FUT | OPT
Class IV Milk	FUT | OPT
International Skimmed Milk Powder	FUT | OPT
Nonfat Dry Milk	FUT | OPT
Dry Whey	FUT | OPT
Cash-Settled Butter	FUT | OPT
Butter Spot Call	
Cheese	FUT | OPT
Cheese Spot Call	
Nonfat Dry Milk Spot Call	

Forest (CME)

Random Length Lumber	FUT | OPT
Softwood Pulp	FUT | OPT
Hardwood Pulp	FUT | OPT

Commodity Indexes (CME)

DJ-UBS Commodity Index	FUT
S&P-GSCI	FUT | OPT
S&P-GSCI Excess Return Index	FUT

Softs (NYMEX)

Cocoa	FUT
Coffee	FUT
Cotton	FUT
No. 11 Sugar	FUT

Produits financiers

Exemples

Weather Products Homepage

Block Trades

Weather Block Trades

Temperature (CME)

U.S. Cooling Monthly	FUT | OPT
U.S. Cooling Seasonal	FUT | OPT
U.S. Heating Monthly	FUT | OPT
U.S. Heating Seasonal	FUT | OPT
U.S. Weekly Weather	FUT | OPT
Canada CAT Monthly	FUT | OPT
Canada CAT Seasonal	FUT | OPT
Canada Cooling Monthly	FUT | OPT
Canada Cooling Seasonal	FUT | OPT
Canada Heating Monthly	FUT | OPT
Canada Heating Seasonal	FUT | OPT
Europe CAT Monthly	FUT | OPT
Europe CAT Seasonal	FUT | OPT
Europe Heating Monthly	FUT | OPT
Europe Heating Seasonal	FUT | OPT
Asia-Pacific Monthly	FUT | OPT
Asia-Pacific Seasonal	FUT | OPT
Australia Cooling Monthly	FUT | OPT
Australia Cooling Seasonal	FUT | OPT
Australia Heating Monthly	FUT | OPT
Australia Heating Seasonal	FUT | OPT

Hurricanes (CME)

Hurricane	FUT | OPT
Hurricane Seasonal	FUT | OPT
Hurricane Seasonal Maximum	FUT | OPT

Frost (CME)

Frost Monthly	FUT | OPT
Frost Seasonal	FUT | OPT

Snowfall (CME)

Snowfall Monthly	FUT | OPT
Snowfall Seasonal	FUT | OPT

Rainfall (CME)

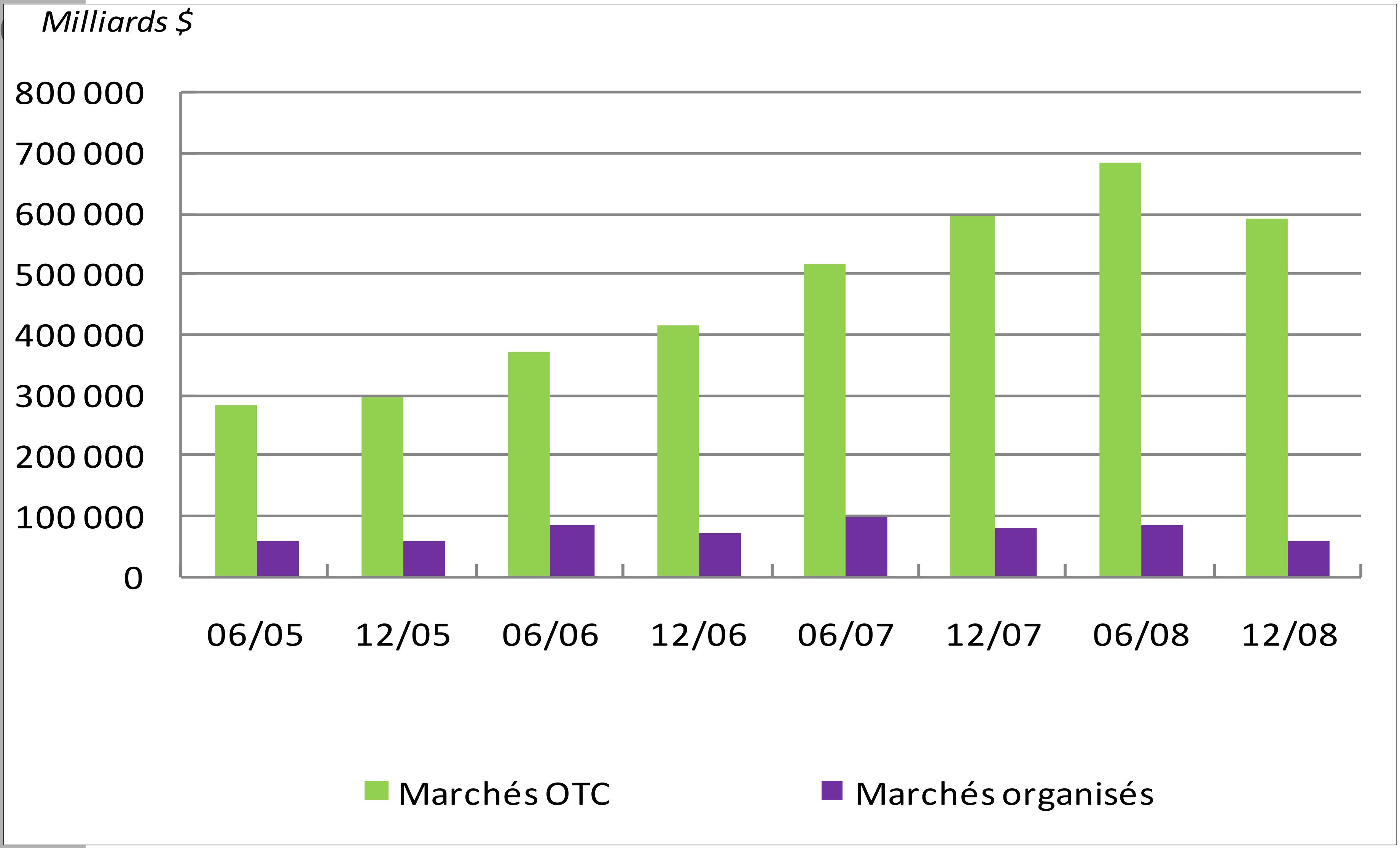
Rainfall Monthly	FUT | OPT
Rainfall Seasonal	FUT | OPT

Produits financiers
Synthèse

- Les produits dérivés n’ont pas d’existence propre :
  - accord ou contrat entre deux parties : il y a toujours un acheteur (long) et un vendeur (short)
- Il n’y a pas de création de valeur directe
  - jeu à somme nulle : les flux touchés par l’une des parties sont versés par l’autre partie
- Leur utilité (et donc leur valeur) provient de leur capacité à transférer les risques
- ….ou à spéculer

Produits financiers

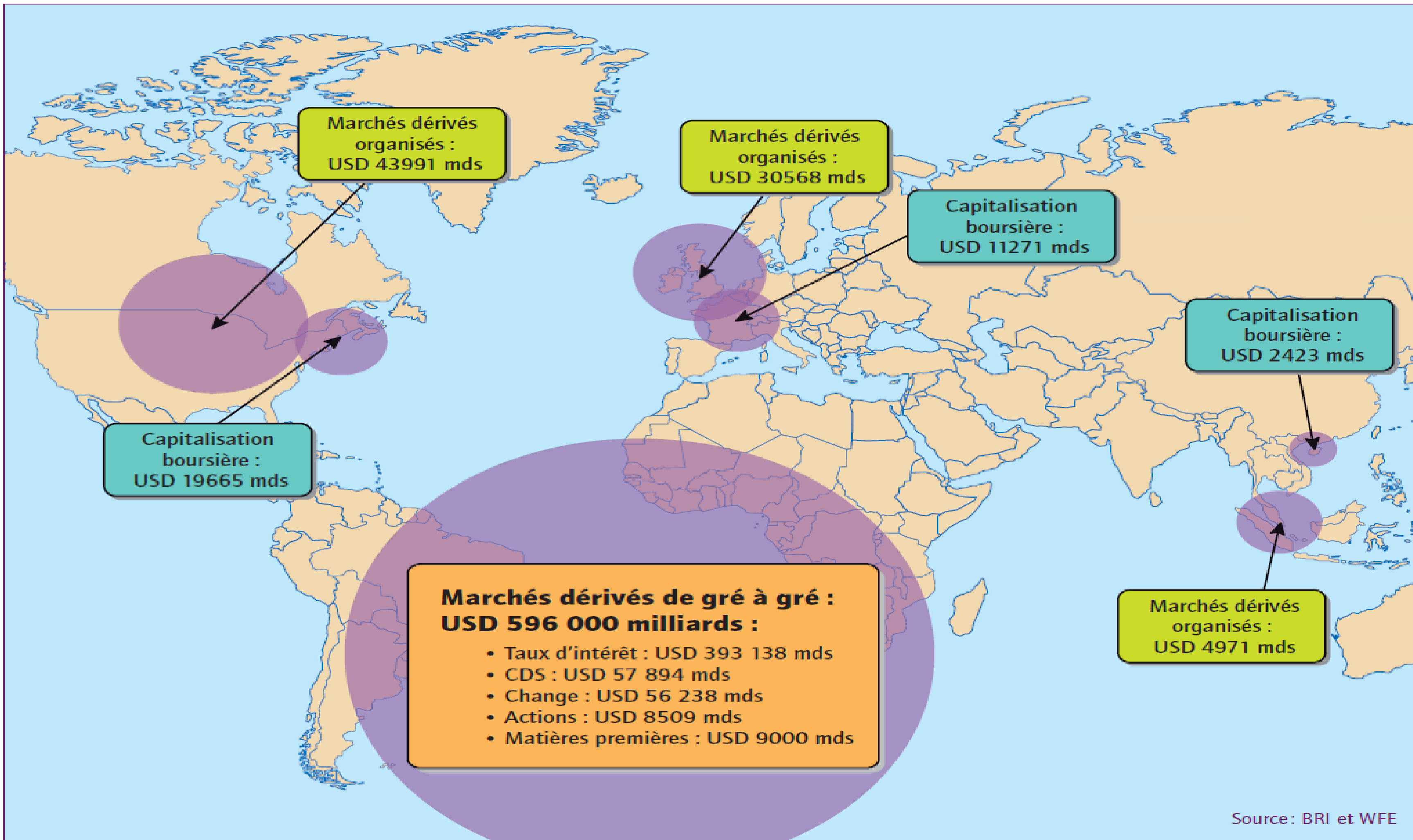
Quelques chiffres



Produits financiers

Quelques chiffres

Taille respective des marchés des titres au comptant et des marchés de dérivés organisés et de gré à gré (fin décembre 2007)



Plan de l’exposé

- Les produits financiers
- Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage
- Quelques problèmes économiques
- Quelques métiers en finance/économie

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Notion d'arbitrage:
  - Une opportunité d'arbitrage est une stratégie financière permettant pour un coût initial nul
    - d'acquérir une richesse positive ou nulle
    - et strictement positive avec probabilité strictement positive

  à une date future.

- De tel gain devrait être exploiter et disparaitre dans un marché à l'équilibre: principe de non arbitrage.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Exemple d'arbitrage:
  - une action vaut 155 € à Paris et 180 $ à New-York
  - le change EUR/US$ est de 1,136
  - opportunité d'arbitrage ?
  - vente 100 unités du titre à New-York et
  - achat de la même quantité à Paris,
  - gain immédiat de :
    100 x(180 USD/1,136 -155 €) = 345 €

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- On cherche à évaluer une option d'achat selon le principe de non arbitrage dans un cadre très simple :
  - Une seule période
  - Deux actifs :
    - Un actif sans risque : il est possible d'emprunter et de placer au même taux r
    - Un actif risque S : à t=0 le cours vaut S_0 et t=1, il n'y a que deux possibilités :
      - Soit le cours monte et il vaut $S_0 u$
      - Soit il descend et vaut $S_0 d$
      - avec $d<u$
  - L'option d'achat de maturité 1 a un strike égale à K et on cherche à calculer sa prime c.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Exemple:
  - prix du sous-jacent u=1,2 et d=0,9

$$S_0=1000 \;\begin{cases} \nearrow\; S_0u = 1200 \\ \searrow\; S_0d = 900 \end{cases}$$

- Actif sans risque r=4%

$$1 \;\begin{cases} \nearrow\; e^{0,04} \\ \searrow\; e^{0,04} \end{cases}$$

- Option K=1000

$$\text{Prime?} \;\begin{cases} \nearrow\; (\mathrm{S_0u} - \mathrm{K})_+ = 200 \\ \searrow\; (\mathrm{S_0d} - \mathrm{K})_+ = 0 \end{cases}$$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Nous allons calculer c par raisonnement d'absence d'opportunité d'arbitrage :
  - nous allons construire un portefeuille
    - d'actif sans risque et d'actif risqué
    - qui a les même paiements que le call à t=1 (on parle de portefeuille de réplication)
  - nous en déduirons que la prime est égale à la valeur initiale du portefeuille.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

Opérations à la date t=0	**Flux**
1. Achat de Δ actions 2. Emprunt 3. Vente de l'option	-1000Δ $+1000\Delta - c$ c
Flux total date initiale	0

Opérations à la date t =1	**Flux**
1. Vente des actions 1.a Cas up 1.b Cas down 2. Remboursement de l'emprunt + intérêts 3. Exercice de l'option 3.a Cas up 3.b Cas down	 $+1200\Delta$ $+900\Delta$ $-(1000\,\Delta - c)e^{0,04}$ -200 0
Flux total date t + 1 mois Cas up Cas down	 $1200\Delta-(1000\Delta - c)e^{0,04}-200$ $900\Delta-(1000\Delta - c)e^{0,04}$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

On cherche donc Δ et c tels que

$V_1(u)=1200\Delta-(1000\Delta-c)e^{0,04}-200=0$

$V_1(d)=900\Delta-(1000\Delta-c)e^{0,04}=0$

En faisant (1)-(2) on obtient

$$\Delta=\frac{200}{1200-900}=\frac{2}{3}$$

$$c=\frac{2}{3}\left(1000-900e^{-0,04}\right)=90,19$$

Si $c\neq 90,19$, par exemple 90 ou 91, on peut faire un arbitrage:

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

Cas c=90

Opérations à la date t=0	**Flux**
1. Vente de Δ actions 2. Placement 3. Achat de l'option	+1000*2/3 -1000*2/3+90 -90
Flux total date initiale	0

Opérations à la date t =1	**Flux**
1. Achat des actions 1.a Cas up 1.b Cas down 2. Restitution du placement+ intérêts 3. Exercice de l'option 3.a Cas up 3.b Cas down	 -1200*2/3 -900*2/3 $+(1000 *2/3-90)e^{0,04}$ +200 0
Flux total t + 1 mois Cas up Cas down	 $-1200*2/3+(1000*2/3 -90)e^{0,04}$ +200=0,201 $-900*2/3+(10002/3 -90)e^{0,04}=0,201$

2.3. Evaluation
Temps discret : une période

- On s’assure un gain certain qui vaut la valeur capitalisée de la différence de la prime et du portefeuille de réplication.
- Nous allons généraliser ce raisonnement et faire apparaître la notion de probabilité risque neutre.

2.3. Evaluation
Temps discret : une période

- prix du sous-jacent, S

$$S_0 \begin{cases} \nearrow S_T(u) = S_0 u \\ \searrow S_T(d) = S_0 d \end{cases}$$

- Actif sans risque, S^0

$$S^0{}_0 = 1 \begin{cases} \nearrow S^0{}_T(u) = e^{rT} \\ \searrow S^0{}_T(d) = e^{rT} \end{cases}$$

- Option strike K, C

$$C_0 = \text{Prime?} \begin{cases} \nearrow C_T(u) = (S_0 u - K)_+ \\ \searrow C_T(d) = (S_0 d - K)_+ \end{cases}$$

2.3. Evaluation
Temps discret : une période

- Tout d'abord, sous la condition absence d'opportunité d'arbitrage :

$$d < e^{rT} < u$$

  - Supposons que $e^{rT} \leq d < u$ alors t=0, on achète l'action en empruntant S_0 puis que l'on liquide la position en T, on a les flux suivants

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & +S_0 u - S_0 e^{rT} > 0 \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & +S_0 d - S_0 e^{rT} \geq 0
\end{tikzcd}$$

  - C'est bien un portefeuille de coût nul produisant des flux futurs toujours positifs ou nuls et strictement positifs dans au moins un état de nature et donc une opportunité d'arbitrage. On a une contradiction!

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

Opérations à la date t=0	**Flux**
1. Achat de Δ actions 2. Emprunt 3. Vente de l'option	$-\Delta S_0$ $+\Delta S_0-c$ c
Flux total date initiale	0

Opérations à la date t =T	**Flux**
1. Vente des actions 1.a Cas up 1.b Cas down 2. Remboursement de l'emprunt + intérêts 3. Exercice de l'option 3.a Cas up 3.b Cas down	 $+\Delta S_0\, u$ $+\Delta S_0\, d$ $-(\Delta S_0 - c)e^{rT}$ $-(S_0u - K)_+$ $-(S_0d - K)_+$
Flux total date t + T mois Cas up Cas down	 $V_T(u)=\Delta S_0\, u-(\Delta S_0 - c)e^{rT}-(S_0u - K)_+$ $V_T(d)=\Delta S_0\, d-(\Delta S_0 - c)e^{rT}-(S_0d - K)_+$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

On cherche donc Δ et c tels que

$V_T(u)=\Delta S_0\, u-(\Delta S_0 - c)e^{rT}-(S_0 u - K)_+=0$

$V_T(d)=\Delta S_0\, d-(\Delta S_0 - c)e^{rT}-(S_0 d - K)_+=0$

En faisant (1)-(2) on obtient

$$\Delta = \frac{\left(S_0 u - K\right)_+ - \left(S_0 d - K\right)_+}{S_0\left(u-d\right)}$$

$$c = e^{-rT}\left(S_0 u - K\right)_+ + \Delta S_0\left(1 - u e^{-rT}\right)$$

$$= e^{-rT}\left(\frac{e^{rT}-d}{u-d}\left(S_0 u - K\right)_+ + \frac{u-e^{rT}}{u-d}\left(S_0 d - K\right)_+\right)$$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Si on définit la probabilité P* sur l'espace (Ω={u,d},P(Ω)) par
- P*(S_T/S_0=u)=π et P*(S_T/S_0=d)=1-π avec

$$\pi = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \in \left]0,1\right[$$

- En notant E* l'espérance sous P*

$$c = e^{-rT}\left(\pi\left(S_0 u - K\right)_+ + \left(1-\pi\right)\left(S_0 d - K\right)_+\right) = E^*\left(\frac{\left(S_T - K\right)_+}{S_T^0}\right)$$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- P* est appelée probabilité risque-neutre ou martingale.
  - Le nom de risque neutre provient de :

$$E^{*}\left(\frac{S_T}{S_0}\right)=u\pi+(1-\pi)d=\pi(u-d)+d=e^{rT}=S_T^0=E^{*}\left(\frac{S_T^0}{S_0^0}\right)$$

  - Le nom de martingale provient de

$$E^{*}\left(\frac{S_T}{S_T^0}\right)=\frac{S_0}{S_0^0}$$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Le prix est donc l'espérance sous la probabilité risque neutre (ou probabilité martingale) des flux futurs de l'option, actualisés par l'actif sans risque.
- Cette prime a été calculée par absence d'opportunité d'arbitrage en évaluant une stratégie répliquant ou couvrant l'option.
- Ces notions sont générales et s'appliquent à des marchés et des instruments financiers plus complexes: c'est ce que l'on nomme l'évaluation par arbitrage.
- La notion de probabilité risque neutre est très utile dans le calcul de prime et souvent on se place directement sous cette probabilité.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- L'évaluation d'une option peut se faire sur un nombre arbitraire de périodes
  - les paramètres observés pour une action sont :

    $S_0 = 50$; $r = 10\%$; $\sigma = 40\%$;

    T = 5 mois = 0,4167 années

    dt = 1 mois = 0,0833 années
  - en suivant la paramétrisation du modèle binomial de CRR, on obtient 5 périodes avec pour chacune :

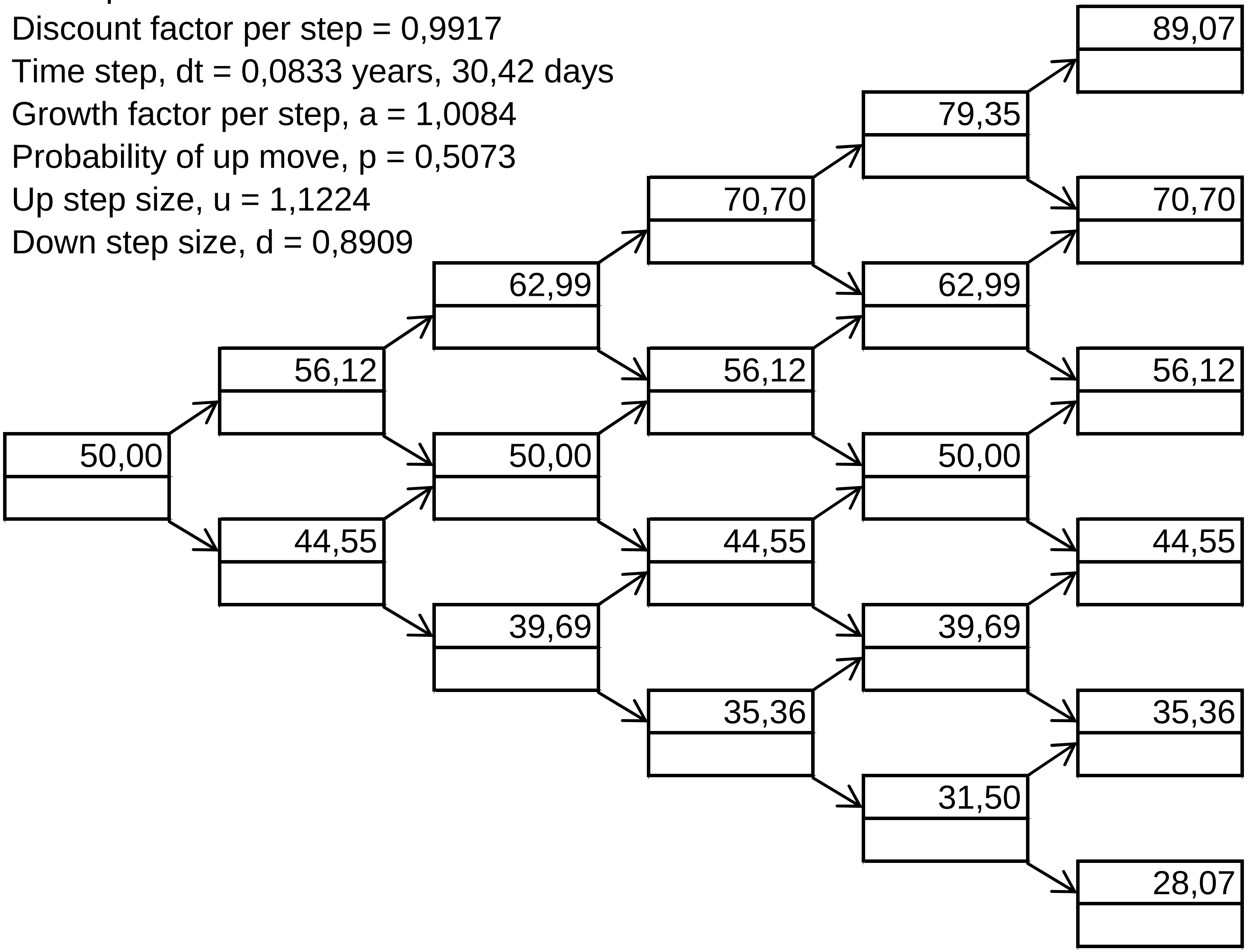
    $u = 1{,}1224$; $d = 0{,}8909$;

    $e^{rdt} = 1{,}0084$; $\pi = 0{,}5076$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

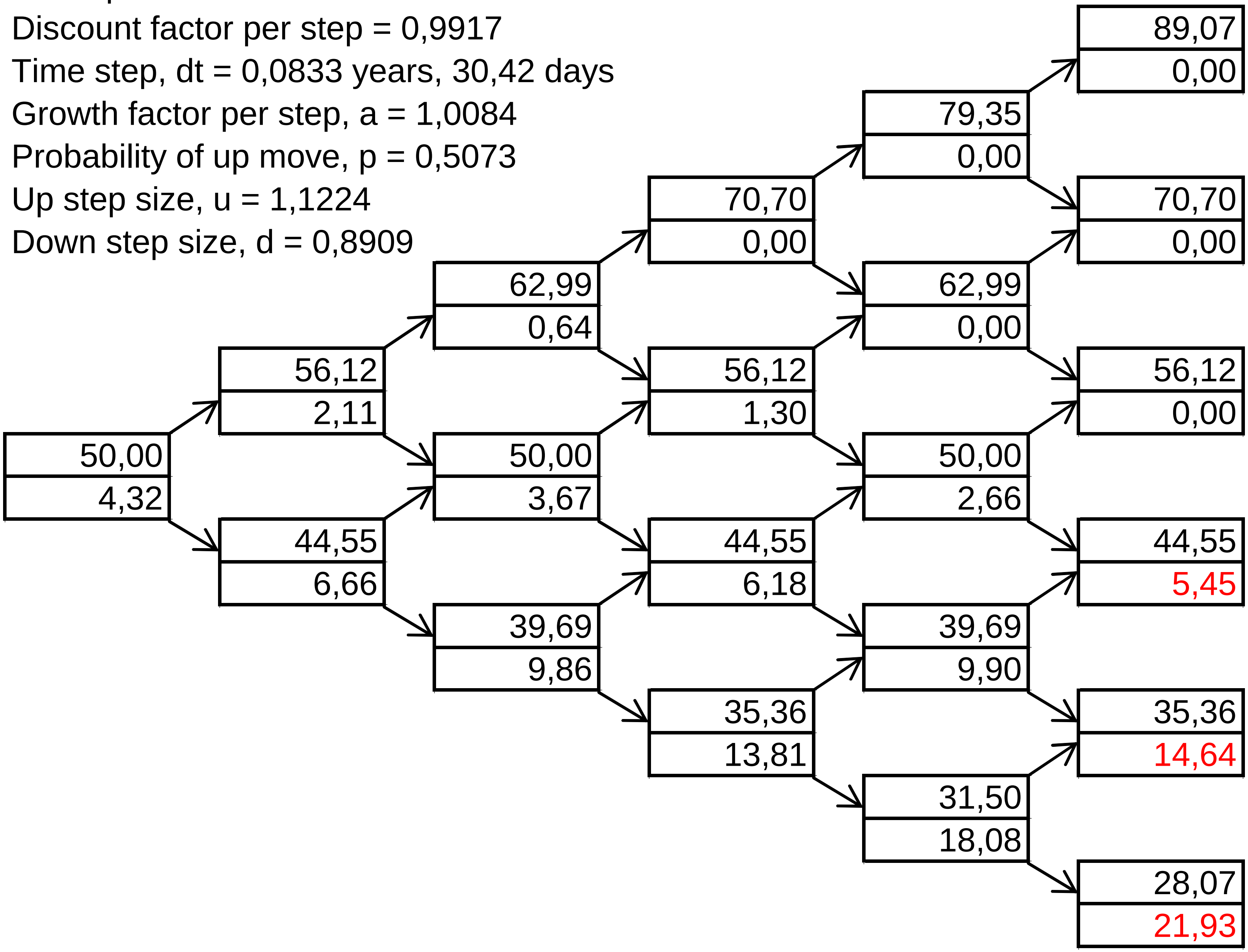
- Le procédé d' évaluation reste le même :
  - 1ère étape : construction de l'arbre d'évolution des prix du sous-jacent
    - Forward: du prix initial vers les prix terminaux en appliquant les paramètres *u* et *d*
  - 2ème étape : calcul à chaque nœud de la valeur de l'option (ici un put)
    - Backward : des prix terminaux vers le prix initial
    - par la détermination du portefeuille de réplication et le calcul de son coût
    - ou par l'application de la probabilité risque-neutre période par période

Strike price = 50
Discount factor per step = 0,9917
Time step, dt = 0,0833 years, 30,42 days
Growth factor per step, a = 1,0084
Probability of up move, p = 0,5073
Up step size, u = 1,1224
Down step size, d = 0,8909



Node Time:
0,0000 0,0833 0,1667 0,2500 0,3333 0,4167

Strike price = 50
Discount factor per step = 0,9917
Time step, dt = 0,0833 years, 30,42 days
Growth factor per step, a = 1,0084
Probability of up move, p = 0,5073
Up step size, u = 1,1224
Down step size, d = 0,8909



Node Time:

0,0000	0,0833	0,1667	0,2500	0,3333	0,4167

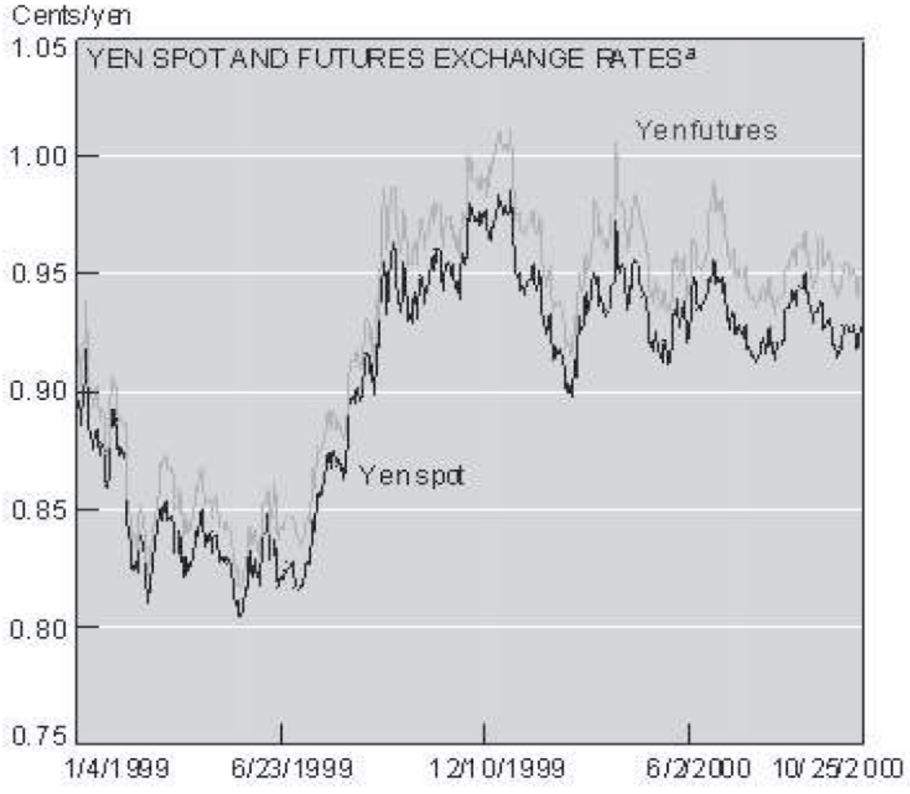
Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

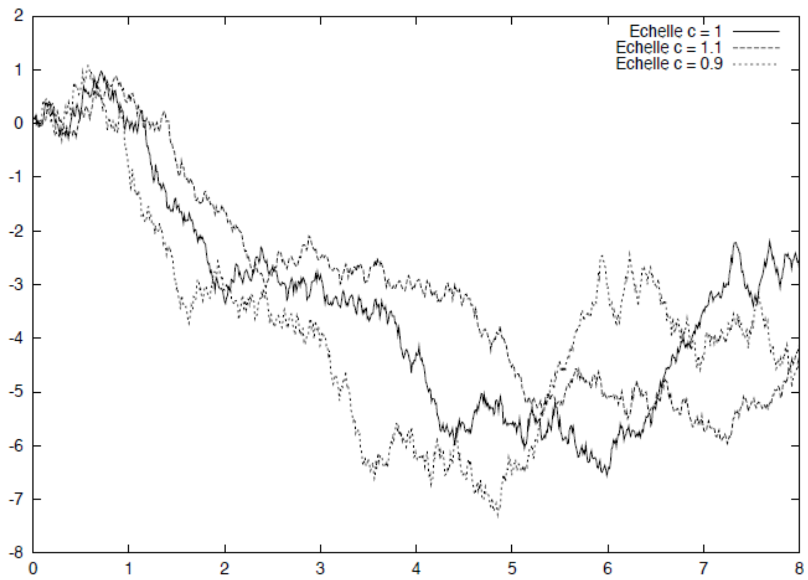
- Louis Bachelier (1870-1946)
  - 1895 : licence es Sciences
  - 1900 : thèse à Paris sous la direction d'Henri Poincaré « Théorie de la spéculation »
  - première théorie mathématique du mouvement brownien (cinq ans avant Einstein)
    - processus à accroissements indépendants, stationnaires et gaussiens, dont les trajectoires sont continues,
    - processus à temps continu limite de marches au hasard symétriques.
  - et pourtant premier poste fixe à l'université (de Besançon) à 57 ans
  - … et ne devint célèbre que 20 ans après sa mort.

.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Cours versus mouvement Brownien





Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

Myron Scholes (1941,.)

1997 Prix Nobel d'Economie pour avoir trouvé une nouvelle méthode pour évaluer les produits dérivés.

Education : Ph.D.'69 à l'Université de Chicago, USA

Affiliation : Stanford University, Stanford, USA

Hedge Fund, Long Term Capital Market

Fisher Black (1938-1995)

Education : 1964, Ph.D. à Havard en Mathématiques Appliquées

Affiliation : 1971, Professeur à l'University de Chicago, Graduate School of Business.

19XX : Professeur au MIT

1984 : Quitte le MIT pour Goldman Sachs & Co.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Robert Merton (1944,.)
  - 1997 Prix Nobel en Economie pour avoir proposé des méthodes nouvelles pour la valeur de produits dérivés.
  - Diplôme : Ph.D.'70 in Economics from MIT (Cambridge, MA, USA)
  - Professeur à Harvard Business School, Harvard University, Cambridge

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Le modèle de Black-Scholes-Merton permet d'évaluer les options dans un cadre où les prix évoluent en temps continu
- Le prix d'un produit dérivé est le prix de sa couverture.
  - hypothèses :
    - le marché est parfait
    - le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique (distribution log-normale des prix) dont les paramètres sont constants

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Modélisation du prix du sous-jacent S pour une distribution log-normale

$$d\ln S_t = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

- Les prix sont toujours positif.
  - Le drift ou dérive est noté mu et l'écart type sigma.

- W est un mouvement brownien standard i.e.

  - accroissements indépendants :

    W_t-W_s est indépendant de $(W_u)_{0<u<s}$

  - accroissements stationnaires et gaussiens :

    W_t-W_s suit une loi normale centrée d'écart type $\sqrt{t-s}$

  - $(W_u)_{u>0}$ est presque sûrement continu et $W_0=0$.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

– Grâce au calcul d'Itô le sous-jacent S s'écrit

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

où W_t suit une loi normale centrée d'écart type $\sqrt{t}$

– Le prix est l'exponentiel d'une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ et d'écart type $\sigma\sqrt{t}$

– le principe d'évaluation est le suivant :

- il existe une suite continue de portefeuilles qui délivre un flux terminal certain (indépendant de la trajectoire suivie)
- en l'absence d'arbitrage, la rentabilité de cette stratégie doit être le taux sans risque

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

$$c = e^{-rT} E^{*}(S_T - K)_{+}$$

– sous ces hypothèses, le prix des options d'achat (*c*) et de vente (*p*) européennes est égal à :

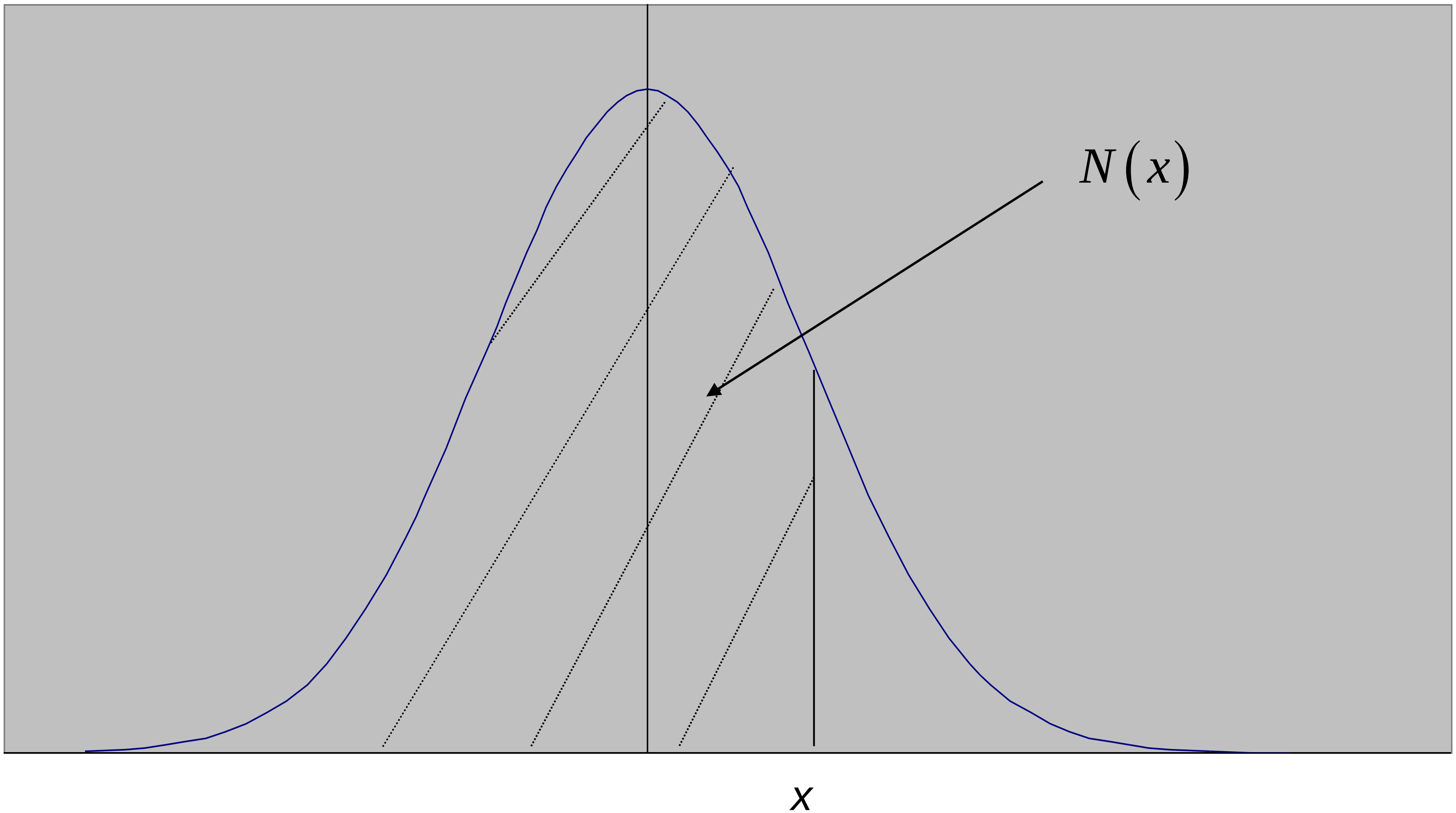
$$c = S_0 \; N(d_1) - K \; e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K \; e^{-rT} \; N(-d_2) - S_0 \; N(-d_1)$$

avec $$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage



Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Le calcul de la valeur des options européennes est immédiat dès que l'on connait pour l'intervalle de temps [0;*T*] :
  - la volatilité : σ et le taux sans risque : *r*
- Exemple : évaluation d'un call européen de maturité 9 mois et de prix d'exercice 49 sachant que :
  - $S_0 = 50$; $K = 49$; $r = 4\%$; $\sigma = 30\%$

$$d_1 = \frac{\ln(50/49) + \left(0{,}04 + 0{,}3^2/2\right) \times \left(9/12\right)}{0{,}3\sqrt{\left(9/12\right)}} = 0{,}3231$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}3231 - 0{,}3\sqrt{\left(9/12\right)} = 0{,}0633$$

$$\boxed{\begin{aligned} c &= 50N(0{,}3231) - 49e^{-0{,}04\times 9/12}N(0{,}0633) \\ &= 6{,}359 \end{aligned}}$$

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Les outils mathématiques
  - Probabilité et calcul stochastique (calcul de prix d'options dites exotiques)
  - Optimisation/contrôle
  - Méthodes numériques prépondérantes: les produits financiers sont trop complexes par pouvoir avoir un prix donné par une formule fermée
    - Equations aux dérivés partielles (les prix sont solutions d'EDP souvent déjà étudiés)
    - Monté Carlo (les prix sont données sous forme d'espérance)

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Les outils mathématiques
  - Savoir programmer est primordial
    - C, C++
    - C #
    - VBA
  - Statistiques:
    - Estimation des lois des actifs financiers et des paramètres induits
    - Prévision
    - Trading haute fréquence
    - Gestion des risques : évènements rares

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- Hull, J. : « Options, Futures and Other Derivatives », Prentice Hall

ou la traduction française :

- Hull, J. : « Options, futures et autres actifs dérivés », Pearson Education
- D. Lamberton et B. Lapeyre, « Introduction au calcul stochastique appliquée à la finance », Ellipses
- R. Dana et M. Jeanblanc « Marches Financiers en temps Continu, Valorisation et Equilibre », Economica.
- G. Demange et J-C Rochet « Méthodes mathématiques de la finance » , Economica.

Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage

- D. Revuz et M. Yor « Continuous Martingales and Brownian Motion »
- I. Karatzas et S. Shreve « Brownian Motion and Stochastic Calculus »
- I. Karatzas et S. Shreve « Methods of Mathematical Finance (Stochastic Modelling and Applied Probability)»
- S. Shreve « Stochastic Calculus for Finance I et II »
- H. Föllmer et A. Schied « Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time »
- L. Carassus et G. Pagès « Finance de marché - Modèles mathématiques à temps discret »

Plan de l'exposé

- Les produits financiers
- Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage
- Quelques problèmes économiques
- Quelques métiers en finance/économie

Quelques problèmes économiques

- Modélisation du comportement des agents économiques
- Maximisation d’espérance d’utilité
- Voir l’autre support.

Plan de l’exposé

- Les produits financiers
- Formalisation mathématique et évaluation par arbitrage
- Quelques problèmes économiques
- Quelques métiers en finance/économie

Quelques métiers en finance économie

- La finance n'est pas un métier réservé aux banques.
- Toutes les entreprises ont une fonction finance.
- Cette fonction est très large:
  - Gestion de la trésorerie, salle de marché
  - Fonction risque
  - Comptabilité
  - Cash management
- La plupart de métiers de la finance ne sont pas quantitatifs

Métiers quantitatifs

Quelques métiers en finance économie

- Dans les banques, s'ajoutent d'autres métiers quantitatifs:
  - Fonction recherche
  - Dans les salles des marché, les traders sont en lien avec des quantitatifs
  - La fonction risque se développe de plus en plus depuis la crise

Quelques métiers en finance économie

- Formation en mathématiques financières
  - Beaucoup d'offres
    - Universités
      - Dauphine, Universités Paris 1, 6 et 7 (2 masters chacune)
      - Marne la Vallée, Evry, …
      - Lyon, Brest, Rouen, Nancy, Le Mans,…
    - Grandes écoles
      - ENSAE, X, Centrale, Ponts, Ensimag, Sup'aero, ENSTA
      - Ecole de commerce: HEC,..

Quelques métiers en finance économie

- Les statistiques permettent de travailler également en finance/économie
  - Chargé d’études statistique risque de crédit, marché ou opérationnel
  - Chargé d’étude économique
  - Marketing, publicité pour l’analyse des comportements des clients
  - Actuaire