∽ Concours d'entrée à l'École de Santé de Lyon-Bron ∽

Avertissement : L'utilisation de calculatrice, de règle de calcul, de formulaire et de papier millimétré n'est pas autorisée.
Il ne sera pas fait usage d'encre rouge.
Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
Les candidats traiteront les trois exercices.

Année 2012

EXERCICE 1 **6 points**

Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations A, B, C ou D est exode.
On demande au candidat de signaler **sans justification** la réponse qui lui paraît exacte en cochant la case sur la grille prévue à cet effet (voir l'annexe).
Toute réponse juste est comptée + 1 point. Toute réponse fausse est comptée 0,5 point.
Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Question n° 1 : On considère, dans le plan complexe, les points M et N d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2} + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{N}} = \frac{3}{2} + \mathrm{i}.$$

le milieu I du segment [MN] a pour image, par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, le point J. L'affixe de J est :

A : $z_{\mathrm{J}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ B : $z_{\mathrm{J}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ C : $z_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ D : $z_{\mathrm{J}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

Question n° 2 : Un élève se présente à deux concours C_1 et C_2. Ces deux concours sont indépendants. Il a une chance sur trois de réussir au concours C_1 et une chance sur trois de réussir au concours C_2.
La probabilité P pour que l'élève réussisse au moins un concours est :

A : $\frac{5}{9}$ B : $\frac{2}{3}$ C : $\frac{1}{9}$ D : $\frac{2}{9}$

Question n° 3 : On considère l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x^2 + 2x + 1}\,\mathrm{d}x$.

A : $I = -1$ B : $I = 0$ C : $I = 1$ D : $I = 2$

Question n° 4 : Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln(x-1)}$ est,

A : $]0\,;\,+\infty[$ B : $]1\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$ C : $]1\,;\,+\infty[$ D : $]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$

Question n° 5 : Toute suite (u_n) avec $n > 0$ telle que : $\dfrac{2}{n^2} \leqslant u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ est :

A : croissante B : bornée C : convergente D : divergente

Question n° 6 : Une solution de l'équation différentielle $y' = -3y + 4\mathrm{e}^{-2x}$ est :

A : $\mathrm{e}^{-3x} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{2x}$ B : $4\mathrm{e}^{-3x} - 1$ C : $4\mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{3}$ D : $4\mathrm{e}^{-2x}$

EXERCICE 2 **6 points**

On considère le nombre complexe $z = 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique.
2. Déterminer le module et un argument de z^2.
3. En utilisant les propriétés du module et de l'argument d'un produit déterminer la forme trigonométrique de z.

4. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

EXERCICE 3 **8 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unité graphique : 2 cm). Vous justifierez chacune de vos réponses.

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x

3. Donner le signe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 5x - 4$.

4. En déduire le signe de la fonction f'.

5. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant soigneusement

6. Déterminer les variations de f et dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

7. Montrer que $I_1 = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$.
On admet que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

8. Déterminer la valeur exacte de I_2 et I_3.

9. Déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.