Concours contrôleur des douanes
Branche surveillance – session 2022

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

— **Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.**

— **Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.**

Exercice 1

Une entreprise doit réduire la quantité de déchets qu'elle rejette pour respecter une nouvelle norme environnementale. Elle s'engage, à terme, à rejeter moins de 30 000 tonnes de déchets par an.
En 2010, l'entreprise rejetait 40 000 tonnes de déchets.
Depuis cette date, l'entreprise réduit chaque année la quantité de déchets qu'elle rejette de 5 % par rapport à la quantité rejetée l'année précédente, mais elle produit par ailleurs 200 tonnes de nouveaux déchets par an en raison du développement de nouvelles activités.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en tonnes, de déchets pour l'année $(2010+n)$. On a donc $u_0 = 40000$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.
3. On considère la suite (s_n) définie, pour tout naturel n, par $s_n = u_n - 4000$.
   Démontrer que la suite (s_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.
4. Pour tout entier naturel n, exprimez s_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 36000 \times 0,95^n + 4000$.
5. Déterminer la limite de u_n en $+\infty$ et commenter.
6. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise réussira-t-elle à respecter son engagement ? On notera que :

$$\frac{13}{18} \approx 0,722; \quad 0,95^5 \approx 0,774; \quad 0,95^6 \approx 0,735; \quad 0,95^7 \approx 0,698, 0,95^8 \approx 0,663$$

Exercice 2

Une entreprise vend des calculatrices de marque Calculmax.
Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défauts, l'un lié au clavier et l'autre à l'affichage.
Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :
La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.
En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
En l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.

On notera A l'évènement « la calculatrice présente un défaut d'affichage » et
C l'évènement « la calculatrice présente un défaut de clavier ».

1. Établir l'arbre pondéré décrivant cette situation.
2. Préciser les probabilités suivantes :

$$P_C\left(\overline{A}\right),\quad P_C(A)\quad \text{et}\quad P(C)$$

3. On choisit au hasard une calculatrice de la marque Calculmax.
   Pour cette question 3., les résultats seront donnés sous forme décimale au dix millième près.
   a. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.
   b. Calculer la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.
   c. Montrer que la probabilité que la calculatrice présente le défaut d'affichage est 0,058 8.
4. On choisit une calculatrice de la marque Calculmax qui présente le défaut d'affichage.
   Calculer la probabilité qu'elle présente aussi le défaut de clavier.
   Pour cette question 4. le résultat sera donné sous forme de fraction.

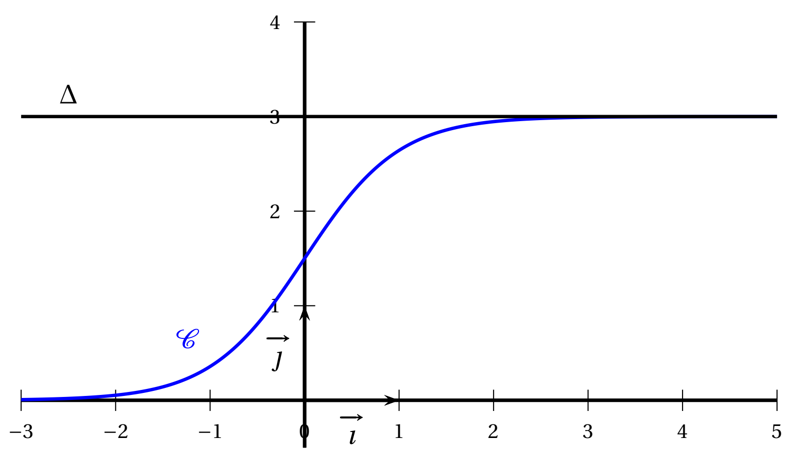
Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

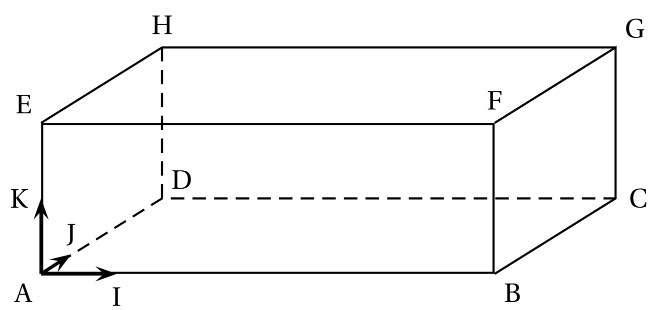
a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$.

c. On note D l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par $x \geqslant 0$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 3$.
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine D.

Exercice 4

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.
I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AK}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\mathrm{AI}},\ \overrightarrow{\mathrm{AJ}}, \overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)$.

1. Donner les coordonnées du point G dans ce repère.

2. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,-9)$ est normal au plan (IJG).

3. Déterminer une équation du plan (IJG).

4. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v}$ normal au plan (BCG) et en déduire une équation de ce plan.