∽ Entrée École de santé Bron avril 2006 ∾

Durée : 1 heure 30 minutes   Coefficient : 3

Avertissement : L'utilisation de calculatrices, de règles à calcul, de formulaires et de papier millimétré n'est pas autorisée. Il ne sera pas fait usage d'encre rouge. Il sera tenu compte de la qualité de la présentation des copies et de l'orthographe.
Le candidat traitera les trois exercices en respectant les notations du texte et la numerotation des questions.
Aucun document ne sera rendu avec la copie.

EXERCICE 1 : **8 points**

Dire si les propositions des parties A cl B (qui sont indépendantes) sont vraies ou fausses.
Chaque réponse juste rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point.
Une absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée a 0.
Aucune justification n'est demandée.

Partie A

Soient f et g deux fonctions quelconques continues et positives sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. La fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $x \longmapsto \displaystyle\int_5^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f.
2. La fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $x \longmapsto \displaystyle\int_5^x f(t)\mathrm{d}t$ prend des valeurs toutes positives ou nulles.
3. Pour tous réels a et b de $[0\,;\,+\infty[$, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)$

Partie B

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \cos x\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$
3. $\displaystyle\int_0^{-\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x.$

EXERCICE 2 : **8 points**

z étant un complexe, on note (S) le système $\left\{\begin{array}{lcl} |z| & = & |z-6| \\ \arg\left(z^2\right) & = & \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

1. Donner le module et un argument des trois complexes suivants :

$$a = \sqrt{3} + \mathrm{i} \quad b = -2 + 2\mathrm{i} \quad c = 3 + 3\mathrm{i}.$$

2. Parmi les complexes a, b et c quels sont ceux qui sont solutions du système (S) ? (on justifiera la réponse).
3. M étant le point d'affixe z et A etant le point d'affixe 6, traduire géométriquement les deux contraintes de (S).
4. Résoudre le systeme (S) par la méthode de votre choix.

EXERCICE 3 : **6 points**

On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et préciser sa limite.
3. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.
4. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$ en fonction de n.

   En déduire le calcul de $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ en fonction de n.