∽ Concours contrôleur des douanes session 14 mars 2011 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet.
Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-3x} \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
La courbe représentative de la fonction f est notée $(\mathscr{C})$, la droite d'équation $y = x$ est notée (D).

1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On note g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ pour tout x réel.
   a. Calculer $g'(x)$, où g' ,désigne la fonction dérivée de la fonction g.
   Montrer que $g'(x) < 0$ équivaut à $x > \dfrac{\ln 3}{3}$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   L'étude des limites de la fonction g n'est pas demandée mais on précisera les valeurs exactes de $g(0)$, $g(1)$.
   c. On note α l'unique nombre réel non nul tel que $g(\alpha) = 0$,avec $\alpha \in]0,94\,;\,0,95[$.
   Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du nombre x réel.
   En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite (D).
3. Donner une équation de la droite (T) tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point O.

Exercice 2

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

On pose $v_n = u_n - 3$.

1. **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déduire, en utilisant la question précédente, les limites, quand n tend vers plus l'infini, de v_n et de u_n.

2. On constate que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln(v_n)$.

Démontrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme w_0 et la raison.

3. **a.** Exprimer w_n en fonction de n.

b. Pour quelle valeur de n a-t-on : $w_n = -\ln\left(27^3\right) - \ln(9)$?

Exercice 3

A la kermesse de l'école, une tombola est organisée : 250 billets, numérotés, de 1 à 250, sont vendus 2 euros chacun à 250 personnes différentes.
Après le tirage, on apprend que tous les billets dont le numéro finit par 3 rapportent 10 euros, et que ceux dont les numéros finissent par 20 ou 65 rapportent 30 euros.
Dans chacun des calculs demandés, donner des valeurs exactes sous forme décimale ou sous forme de fraction irréductible.

1. On interroge au hasard une personne ayant acheté un billet.

Quelle est la probabilité des évènements A, B et C suivants ?

A : « interroger une personne ayant un billet gagnant 30 euros ».

B : « interroger une personne ayant un billet gagnant ».

C : « interroger une personne ayant reçu 30 euros sachant que cette personne avait un billet gagnant ».

2. À chaque personne ayant acheté un billet, on associe son gain X, la différence entre ce qu'elle reçoit et les 2 euros versés pour avoir un billet.

a. Donner les différentes valeurs possibles de X et établir la loi de probabilité du gain X

b. Calculer l'espérance mathématique de cette loi.

Exercice 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(2\,;\,-3\,;\,5),\quad \text{B}(4\,;\,3\,;\,7)\quad \text{et}\quad \text{C}(1\,;\,-6\,;\,4).$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont ils colinéaires ?

3. Calculer les distances AB et AC.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+4}.$$

1. Montrer que f est positive sur $[0\,;\,1]$.

2. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. ($\mathscr{C}$) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.
Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine compris entre ($\mathscr{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.