∽ Concours contrôleur des douanes session 2020 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

février 2020 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

Une étude est menée sur la population française, 5 % de la population est porteur d'un gène qui a muté. Le but de l'exercice est d'étudier un test de dépistage.
La probabilité que le test de dépistage soit positif sachant que l'individu est porteur du gène est $0,8$.
La probabilité que le test de dépistage soit négatif sachant que l'individu n'est pas porteur du gène est $0,9$.
On choisit un individu au hasard et on lui fait faire le test.
On note :
A l'évènement : « l'individu est porteur du gène »
T l'évènement : « le test est positif »

1. Représenter les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Démontrer que $P(T) = 0,135$.
   b. Quelle est la probabilité que le test donne un résultat erroné ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

   Dresser en le justifiant le tableau de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x,
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x).$$
4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

On admettra pour la suite que T est au-dessus de $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par
$$H(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$
   Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par
$$h(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$
2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

Exercice 3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points

$$\mathrm{A}(0\,;4\,;1),\qquad \mathrm{B}(1\,;3\,;0),\qquad \mathrm{C}(2\,;-1\,;-2)\quad \text{et}\quad \mathrm{D}(7\,;-1\,;4)$$

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   b. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation cartésienne de plan (ABC).
   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
3. Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
   a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
   On admettra pour la dernière question que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4t-2\\ y &=& t \\ z &=& 3t+2\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$$

b. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 4

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010 + n)$.
En 2010, la forêt possède 50 000 arbres.
Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 3.$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 60 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

b. Calculer v_0. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n.$$

3. En déduire la limite de la suite (u_n).