Concours contrôleur des douanes session 2019

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

février 2019 Durée : 3 heures

OPTION A : Mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :
Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1 on note sa couleur et on la remet dans U_1.
Étape n ($n \geqslant 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1 on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2 on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.
On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
   On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3.
4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $p_n \geqslant 0,25$.
   b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   d. Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$.
   En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + x\ln x$$

où $\ln x$ est le logarithme népérien de x.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

1. Le but est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les deux droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.

- **a.** Montrer que f est positive sur $[1\,;\,2]$.
- **b.** Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.
- **c.** Soit E le point d'abscisse $\dfrac{4}{\text{e}}$.

  Montrer que sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, le point E est l'unique point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à (MN).

  On rappelle que la dérivée f' de f en x donne le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x.
- **d.** On appelle T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point E.

  Montrer qu'une équation de T est $y = (2\ln 2)x + 1 - \dfrac{4}{\text{e}}$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,2]$ par

$$g(x) = f(x) - (2\ln 2)x + \frac{4}{\text{e}} - 1.$$

- **a.** Montrer que pour tout x de $[1\,;\,2]$, $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$.
- **b.** Étudier les variations de g sur [1,2] et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T sur cet intervalle.

3. Soient M$'$ et N$'$ les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite T.

On admet que la courbe $\mathcal{C}_f$ reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et que les points M$'$ et N$'$ ont des ordonnées strictement positives.

- **a.** On cherche à calculer les aires des trapèzes MNQP et M$'$N$'$QP.

  On rappelle que l'aire d'un trapèze rectangle est $\dfrac{(\text{petitebase} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$.

  Calculer $\dfrac{\text{PM} + \text{QN}) \times \text{PQ}}{2}$ et $\dfrac{(\text{PM}' + \text{QN}') \times \text{PQ}}{2}$.
- **b.** Si on pose $\ln 2 \approx 0,69$ et $\dfrac{4}{\text{e}} \approx 1,47$, donner un encadrement de A d'amplitude 10^{-1}.

4. Le but est de déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

- **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2} x\ln(x)\,\text{d}x$.
- **b.** En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

Étudier le signe de sa dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$.

Que pouvez-vous en conclure pour f sur l'intervalle ?

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\text{d}t.$$

a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n que pour tout entier naturel n,
$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0~;~+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.
Calculer S_n.
La suite (S_n) est-elle convergente ?