∽ Concours contrôleur des douanes session 2018 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

19 février 2018 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

N. B. : Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une épreuve consiste à lancer une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées « 1 », « 2 » et « 3 ».
Deux concurrents, A et B, sont en présence. On admet qu'à chaque lancer, chacun d'eux atteint une seule case et que les lancers sont indépendants.
Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2, 3 sont respectivement : $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{12}$.
Pour le concurrent B, les trois éventualités sont équiprobables.

1. Le concurrent A lance la fléchette trois fois. Les résultats des trois lancers sont indépendants.
   a. Quelle est la probabilité qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il atteigne, dans l'ordre, la case 1, puis la case 2, et enfin la case 3 ?
   c. Quelle est la probabilité qu'il atteigne, sans ordre défini, les cases 1,2 et 3 ?
2. On choisit l'un des deux concurrents. La probabilité de choisir A est égale à deux fois la probabilité de choisir B.
   a. Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité que la case 3 soit atteinte ?
   b. Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte. Quelle est la probabilité que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette ?

Exercice 2

1. Soient trois plans (P), (Q), (R), définis respectivement par les équations cartésiennes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-y-3z &=& 1\\ 3x+2y-2z &=& -4\\ -x-4y+6z &=& 22 \end{array}\right.$$

   Calculer l'intersection des plans (P), (Q), (R), si elle existe.

   Dans ce cas, indiquer s'il s'agit d'un point ou d'une droite.

2. Soient trois plans (S), (T), (U), définis respectivement par les équations cartésiennes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-2z & = & 1\\ x-y-4z & = & 3\\ 2x+3y-3z & = & 1\end{array}\right.$$

Calculer l'intersection des plans (S), (T), (U), si elle existe.
Dans ce cas, indiquer s'il s'agit d'un point ou d'une droite.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n-3$.
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1+x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

   a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to -1} g(x)$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} g(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β ,avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$. (on donne $\ln(3) \approx 1,09$ et $\ln(4) \approx 1,38$).
   e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$.
   En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D.