Concours contrôleur des douanes session 2015

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

23 février 2015 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$$f(x) = x + 2 + \frac{16}{x-1}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminez les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1 (à droite et à gauche).
2. Démontrez que la droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculez la fonction dérivée f' de f.
4. Déduisez-en le tableau de variations de f.
5. Déterminez une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$.

Exercice 2

On considère trois vecteurs non coplanaires $\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}$ et on définit :

$$\left\{\begin{array}{l c r}
\vec{u} & = & \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}\\
\vec{v} & = & 3\vec{\imath} + \vec{\jmath}\phantom{+ 2\vec{k}}\\
\vec{w} & = & \vec{\jmath} + 5\vec{k}
\end{array}\right.$$

1. Montrez que $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires.
2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Maintenant, considérons le plan (P) dont $\vec{u}$ est un vecteur normal.
Soit A$(1~;~-1~;~0)$ un point du plan (P) et B$\left(x_{\text{B}}~;~y_{\text{B}}~;~z_{\text{B}}\right)$ un point quelconque de l'espace.

3. Donnez l'équation du plan (P).
4. Comment savoir si le point B appartient au plan (P) ?

Exercice 3

On considère un virus qui se propage en France : on constate que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt, elle peut être guérie, sinon elle est mortelle.
Une campagne de tests est menée sur un panel de population dont 1 % est porteur de la maladie. Il se trouve que, si le sujet est malade, le test se révèle positif dans 95 % des cas, tandis que si le sujet est sain, le test est négatif dans 99 % des cas.
On admettra ces chiffres comme référence pour l'ensemble de la population.
On note
M l'évènement « le sujet est atteint par la maladie »,
P l'évènement « le test est positif » et
N l'évènement « le test est négatif ».

1. Établissez un arbre de probabilités pondéré modélisant les données de l'étude.
2. Pour un sujet pris au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit malade et que le test se révèle positif ?
3. Pour un sujet pris au hasard, vérifiez que la probabilité pour que son test soit positif est 0,019 4.
4. Pour un sujet choisi parmi ceux dont le test est positif, quelle est la probabilité pour qu'il soit malade ?
5. On choisit maintenant 5 personnes au hasard, dans une population de taille telle que chaque tirage puisse être assimilé à un tirage avec remise et chaque épreuve puisse être considérée comme indépendante des autres.
   Quelle est la probabilité qu'au moins un des sujets obtienne un test positif ?
   (À toutes fins utiles, on donne :
   $$0{,}9806^3 \approx 0{,}9429 \quad ; \quad 0{,}9806^4 \approx 0{,}9246 \quad ; \quad 0{,}9806^5 \approx 0{,}9067 \quad ; \quad 0{,}9806^6 \approx 0{,}8891\Big)$$

Exercice 4

1. Montrez par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{(k-1)} = (n-1)2^n + 1.$$
2. Calculez
   $$\sum_{k=3}^{103} (3k+1).$$