∽ Concours contrôleur des douanes ∾
session 2023

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :

— **Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.**

— **Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.**

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln(x).$$

1. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

2. En déduire qu'il existe un réel unique α tel que $\alpha\mathrm{e}^{\alpha} = 1$.
   On admet que $0,567 < \alpha < 0,568$.
3. Étudier le signe de $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Calculer la fonction dérivée f' de f et étudier son signe sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. En déduire les variations de f $]0\,;\,+\infty[$.
6. Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \alpha^{-1}$.

Exercice 2

Partie A

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
On suppose connus les résultats suivants :

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t,$$

et si pour $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\,;\,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \ln\left(1 + x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right)\,\mathrm{d}x$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :
   pour tout
   $$x \in [0\ ;\ 1],\quad \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.
   b. Étudier les variations de la suite (I_n).
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
3. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$g(x) = \ln(1+x) - x.$$
   a. Étudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. En déduire le signe de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a :
   $$\ln\left(1+x^n\right) \leqslant x^n.$$
   c. En déduire la limite de (I_n).

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

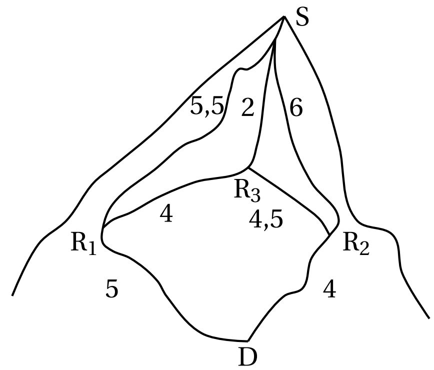
$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout} \quad n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant 0$;
   b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n-3$
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\quad v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$
   a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$
   c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 4

Pour rejoindre le sommet S d'une montagne des Alpes à partir d'un point de départ D, les randonneurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours.
La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges se trouvant à la même altitude de 1 400 mètres sur les parcours existants; les deux refuges ne sont pas situés au même endroit. On les appelle R_1 et R_2.
Le lendemain matin, pour atteindre le sommet qui se trouve à 2 500 mètres d'altitude, ils ont deux possibilités : ils peuvent atteindre le sommet en faisant une halte au refuge R_3, ou atteindre le sommet directement.

La probabilité que les randonneurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\dfrac{1}{3}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_1 est égale à $\dfrac{3}{4}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_2 est égale à $\dfrac{2}{3}$.



1. Tracer un arbre pondéré représentant tous les trajets possibles du départ D jusqu'au sommet S.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   E_1 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge R_1 »;

   E_2 « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 »;

   E_3 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_1 sachant qu'ils ont fait une halte au refuge R_3 »;

   E_4 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_2 sachant que, le deuxième jour, ils sont montés directement au sommet S ».
3. On note $d(M,\ N)$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point M au point N.

   On donne $d(\mathrm{D}, \mathrm{R}_1) = 5$; $d(\mathrm{D}, \mathrm{R}_2) = 4$; $d(\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_3) = 4$; $d(\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3) = 4{,}5$;
   $d(\mathrm{R}_3, \mathrm{S}) = 2$; $d(\mathrm{R}_1, \mathrm{S}) = 5{,}5$; $d(\mathrm{R}_2, \mathrm{S}) = 6$.

   Soit X la variable aléatoire qui représente la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.