

Comment classer les questions de mathématiques ?

Antoine Bodin

IREM de franche-Comté

Document de travail

Sommaire

Sommaire	1
1. Introduction	2
2. Une classification des types de problèmes et d'exercices	3
3. Forme des questions	3
4. Vers une liste de critères et exemples de bases d'énoncés.....	4
5. Classement par contenus	5
5.1 La classification MSC (Mathematics Subject Classification).....	5
5.2 Une classification plus modeste	6
5.3 La classification TIMSS.....	6
5.4 Classement par "grandes idées" et par problématiques	7
6. Classement selon l'âge ou le niveau scolaire	7
7. Classement selon les objectifs contrôlés	8
8. Classement selon la difficulté	8
8.1 Approche classique	9
8.2 Approche « théorie des réponses aux items »	9
9. Classification selon le niveau de mathématisation attendu	11
10. Classification selon les activités et les processus sollicités	11
11. Classement selon la complexité	12
11.1 Complexité structurelle	12
11.2 La taxonomie de Bloom	13
11.3 Une taxonomie pour les mathématiques : la taxonomie de Gras, R.	13
12. Conclusion provisoire	13
Références et bibliographie	15
ANNEXE 1 Les contenus de TIMSS.....	17
ANNEXE 2 Extrait de la liste de capacités des bases EVAPM et EVAPMIB	23
ANNEXE 3 Les démarches sollicitées et les produits attendus de TIMSS	25
ANNEXE 4 Les perspectives de TIMSS	28
ANNEXE 5 Les classes de compétences selon PISA	29
ANNEXE 6 Taxonomie d'objectifs cognitifs de R. Gras.....	31
ANNEXE 7 Typologie de l'activité mathématique (R. Gras)	32
ANNEXE 8 Les processus selon PISA	33

1. Introduction

Parmi les “questions de mathématiques”, nous classons les problèmes et les exercices qui relèvent, d’une façon ou d’une autre du domaine mathématique : soit qu’ils soient énoncés en langage mathématique, soit que leur traitement puisse faire, d’une façon ou d’une autre, appel aux mathématiques.

Parmi ces questions, nous trouvons les grands problèmes qui ont constitué ou constituent encore des défis pour les mathématiciens. Nous trouvons aussi les problèmes résolus depuis plus ou moins longtemps, mais qui peuvent encore, lorsqu’ils sont présentés sous une forme appropriée, constituer des défis pour les élèves, les étudiants, ou plus généralement, les amateurs de réflexion intellectuelle auxquels ils peuvent être proposés. Enfin, nous trouvons les exercices de mathématiques qui constituent surtout des moyens d’entraînement en terrain connu. Dans ce cas, on sait en général ce qu’il faut faire et, dans une certaine mesure, comment le faire... reste à le faire !

La question qui nous est posée est celle de trouver un système de classement d’un ensemble signifiant de telles questions, système qui pourrait, par exemple, être utilisée par la banque de questions du *Kangourou des mathématiques*, laquelle comporte plusieurs milliers de questions dont une bonne partie ont déjà été utilisées dans le cadre de cette compétition internationale.

Des solutions partielles existent déjà autour de plusieurs banques de questions et de problèmes, ainsi qu’autour de recherches plus générales sur l’enseignement des mathématiques. Le présent article sera l’occasion de présenter quelques-unes des solutions déjà utilisées et de proposer une classification pouvant répondre à l’originalité de *Kangourou*.

Précisons d’emblée que le *Kangourou des mathématiques* est essentiellement dirigé vers les élèves de l’enseignement scolaire (de l’élémentaire aux classes terminales des lycées)¹. Nous en tiendrons compte dans ce texte, sans pour autant nous interdire des incursions vers les niveaux supérieurs.

Devant une telle banque de questions, l’utilisateur pourra vouloir sélectionner des questions mettant en jeu des *contenus* identifiés, susceptibles de contrôler telles *capacités* particulières, spécifiés pour un *âge* ou un *niveau scolaire* donné, etc...

Plutôt que cette **entrée de type scolaire**, il pourra préférer une entrée par les types de *traitements* susceptibles d’être mis en jeu ou par les *processus mentaux* susceptibles d’être activés. Nous qualifierons cette seconde approche d’**entrée par l’activité mathématique**.

Chacune des entrées a évidemment son intérêt et, à notre avis, un système de classification devrait intégrer ces deux entrées.

D’autres critères, transversaux à ces deux entrées méritent une attention particulière, il s’agit de la *difficulté* et de la *complexité*.

L’idée de privilégier un critère particulier, conduisant à un ordre total des questions, n’a d’intérêt que s’il s’agit de préparer une édition imprimée de l’ensemble des questions disponibles. On peut, dans ce cas utiliser plusieurs critères, mais on sera contraint de les emboîter (par exemple :

[Domaine mathématique [sous domaine [difficulté [type d’activité [...]]]]

Heureusement, le recours à l’informatique permet d’envisager des classements multicritères ne supposant pas un tel ordre mais autorisant chacun à privilégier, éventuellement, le ou les critères de son choix, sans pour autant se désintéresser des autres.

On sait bien, d’autre part, que ces critères ne sont pas univoques et que certains d’entre eux (par exemple la difficulté) sont carrément subjectifs.

¹ International grades 1 to 12

Dans cet article, nous allons essayer de clarifier un peu l'ensemble de ces questions.

2. Une classification des types de problèmes et d'exercices

Les problèmes et les exercices sont des questions posées à une audience plus ou moins large. Les 23 problèmes de Hilbert étaient des questions destinées aux mathématiciens ; les problèmes publiés chaque semaine dans le journal *le Monde* sont destinés à un large public ; les questions du *Kangourou des Mathématiques* sont plutôt destinées à des jeunes sous statut scolaire ; ...

Mais il faut encore compter avec les problèmes et les exercices donnés dans les examens (fonction contrôle et validation de connaissances), dans les manuels scolaire (fonction aide à l'apprentissage), dans des études telles qu'EVAPM (fonction évaluation),...

Une base largement ouverte devra comporter des exercices et des problèmes de ces divers types et un système de classification devrait permettre de retrouver rapidement des énoncés répondant à telle ou telle caractéristique.

Une première classification pourrait donc concerner les types d'énoncés selon ce qu'ils suggèrent comme rapport qu'ils sont susceptibles d'établir entre ceux qui s'y soumettent et les mathématiques. Ce rapport concerne-t-il le côté ludique ou curieux, la volonté de vaincre des difficultés nouvelles, de se laisser à nouveau étonner par les découvertes que l'on peut faire ? S'agit-il simplement d'apprendre de nouvelles notions en les confrontant aux problèmes qui leur donnent sens ? S'agit-il encore, et simplement, d'entraîner des notions nouvellement ou anciennement étudiées ?

Le livre du problème de L'Irem de Strasbourg (cf. références), reprenant des idées de Georges Glaeser, propose une classification des énoncés que nous modifions légèrement ci-dessous.

- **Exercices d'exposition** (pour acquérir des connaissances)
- **Vrais problèmes** (exercices de recherche - pour chercher – éprouver - trouver)
- **Exercices d'application** (pour éprouver la pertinence et l'efficacité de notions nouvellement ou anciennement étudiées)
- **Exercices d'entraînement** (pour entraîner des notions acquises)
- **Exercices techniques** (pour mener à son terme une tâche que l'on sait pouvoir mener, mais en faisant preuve de méthode, de soin et de précision)
- **Manipulations** (pour anticiper, conjecturer,...)
- **Exercices d'évaluation**

Cette classification répond à la question du pourquoi : pourquoi proposer tel ou tel exercice ? Elle ne dit rien de plus sur les autres points évoqués au premier paragraphe. Mais nous avons là un premier critère de classification qui nous semble important et qui mérite d'être croisé avec les suivants.

3. Forme des questions

Les questions peuvent être ouvertes, semi-ouvertes ou fermées. Elles peuvent être à choix multiples ou autres types d'appariement (QCM).

Une QCM peut elle-même être plus ou moins ouverte. La démarche est assez souvent ouverte, tandis que la réponse peut être strictement fermée (réponse à choisir parmi 4 ou 5 réponses bien définies). La présence d'une issue telle que « autre réponse » ou d'autres astuces rédactionnelle permet d'ouvrir la réponse.

➤ Questions ouvertes

On considère qu'une question est ouverte lorsque l'énoncé ne comporte aucune indication sur la réponse à trouver.

Parmi les questions ouvertes, on peut encore distinguer plusieurs types d'énoncés :

- **Problèmes ou questions** dont la réponse n'apparaît pas dans l'énoncé
- « **Problèmes ouverts** » (au sens donné à ce terme par G. Arsac & al. – Cf. références)
- **Questions type QROC** (Questions à Réponses Ouvertes et Courtes)
- **Questions semi-ouvertes**

La réponse complète n'apparaît pas dans l'énoncé, mais des éléments sont donnés permettant de situer la ou les bonnes réponses dans un ensemble limité.
- **Questions fermées**

Dans ce cas, la réponse est connue ou figure dans une liste de réponses proposées. À noter que la question peut être fermée alors que la démarche est complètement ouverte.

Une catégorie particulière de questions fermées concerne les Questions à Choix Multiples et questions d'appariement. Notons qu'une QCM accompagnée de la demande « *justifiez votre réponse* » n'est pas vraiment une QCM. C'est alors une question semi-ouverte

 - **Les Questions à Choix Multiples et questions d'appariement (fermées)**
 - **Question en Vrai-Faux ou en Oui-Non** (à éviter résolument, sauf, éventuellement ; lorsqu'il s'agit de mettre à jour des conceptions erronées)
 - **QCM simple** (un tronc de question et entre trois et six assertions associées dont une et une seule est vraie)
 - **QCM multi-réponses** (un tronc de question et entre trois et six assertions associées ; chacune de ces assertions pouvant être vraie ou fausse).
 - **QCM à prise de risque** (c'est le cas où il vaut mieux « passer » - Je Ne Sais Pas - que de faire une erreur. C'est encore le cas des QCM à indice de certitude : le « candidat » accompagne sa réponse d'une valeur de certitude comprise entre 0 et 1).

4. Vers une liste de critères et exemples de bases d'énoncés

Dans l'introduction, nous avons déjà nommé la plupart des éléments de classement (les critères) que nous allons étudier dans ce texte. Les voici présentés dans un ordre allant des plus évidents et des plus utilisés à des critères moins triviaux.

- **Les contenus mathématiques en jeu**
- **L'âge ou le niveau scolaire concerné**
- **Les objectifs contrôlés (savoir – savoir-faire)**
- **Le type d'énoncé (cf §3)**
- **La difficulté**
- **Les niveaux de mathématisation**
- **Les activités et les processus**
- **La complexité**

Ces critères seront définis précisément par la suite, mais avant d'aller plus loin, nous souhaiterions montrer des cas où l'utilisation de ces critères est associée à un moteur de recherche lui-même associé à une base d'énoncés.



C'est le cas de la base EVAPMIB qui rassemble les questions issues de 15 ans d'études EVAPM (de l'APMEP), ainsi que des questions provenant d'autres études à grande échelle.

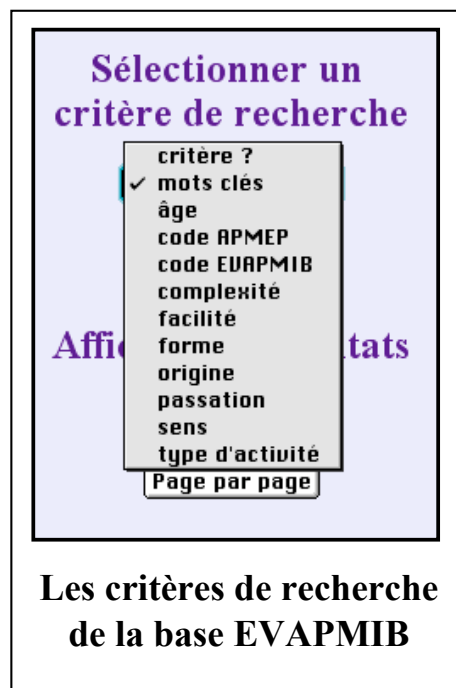
Dans cette base, il est possible d'accéder aux questions en croisant les divers critères énoncés ci-dessus.

Le lecteur trouvera en annexe quelques questions extraites de cette base qu'il peut consulter directement cette base à l'adresse :

<http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapmib/>

Une nouvelle base EVAPMTEX est en cours de réalisation, complètement sous Tex, ce qui assure une très bonne qualité typographique. Cela a été l'occasion d'intégrer les critères de PISA². Ici encore, le lecteur trouvera des exemples de fiches en annexe.

Une base importante de plus de 20 000 problèmes a été développée par le département de mathématiques de l'Université du Missouri (USA). Cette base, nommée « **20 000 Problems Under the Sea** » est un collationnement des problèmes posés jusqu'en 1990 dans 38 revues mathématiques (dont l'*American Mathematical Monthly*) et dans 21 compétitions nationales et internationales (dont les Olympiades internationales et le concours Putnam). Le niveau des énoncés est assez élevé et correspond au moins, pour de très bon élèves, au niveau des classes terminales des lycées. Beaucoup parmi les problèmes posés s'adressent plutôt à des étudiants de post-bac. L'intérêt de cette base est évident, mais il n'y a pas vraiment de système de classification associée, sinon par les sources des problèmes. La recherche proprement dite se fait sur les mots des titres des énoncés, ou *plein texte* sur les contenus des énoncés. Bien sûr ce système de repérage nous semble tout à fait insuffisant pour l'usage que nous voulons en faire.



Cette base est consultable sur le Web à l'adresse : <http://problems.math.umn.edu/index.htm>

Venons en donc à préciser les critères de classement qui nous semblent intéressants.

5. Classement par contenus

Le critère de classement auquel on pense en premier lieu est évidemment le domaine mathématique concerné : arithmétique, algèbre, géométrie, analyse, probabilités, ...

On peut affiner en classant les problèmes par sous-domaines : géométrie synthétique, géométrie analytique, géométrie différentielle,...

Les notions mathématiques peuvent en effet être classées de cette façon, bien que les recouvrements soient courants, et bien que telle notion classée ici en algèbre sera classée ailleurs en analyse (surtout au niveau de l'enseignement secondaire).

5.1 La classification MSC (Mathematics Subject Classification)

Difficile de ne pas évoquer ici cette classification générale qui couvre tous les domaines des mathématiques présentes et passées. Développée par l'*American Mathematical Society*, cette classification peut être consultée et téléchargée sur le site de cette association, à l'adresse : <http://www.ams.org/msc/>. Les titres des entrées principales s'étalent sur deux pages et le détail de la classification occupe 70 pages.

Cette classification serait utile pour classer les problèmes de « 20 000 problems under the sea », mais elle est manifestement trop exhaustive pour ce que nous souhaitons faire. Cependant il sera bon de l'avoir à porté de

² PISA : « Program International for Student Assessment » – programme de l'OCDE dans lequel plus de 40 pays sont impliqués.

main lorsqu'il s'agira de trouver des mot-clés relatifs aux contenus relatifs à certains problèmes de niveau élevé.

5.2 Une classification plus modeste

Dans la base EVAPMIB, il a été jugé suffisant de classer les contenus en thèmes :

- **Thème C: Tracés - Constructions géométriques**
- **Thème D: Connaissance et utilisation des théorèmes en géométrie**
- **Thème Y: Géométrie dans le plan muni d'un repère (géométrie analytique)**
- **Thème E: Géométrie de l'espace**
- **Thème N : connaissance des nombres - calcul numérique**
- **Thème A : Calcul littéral - Algèbre**
- **Thème P : Proportionnalité et situations affines**
- **Thème V: Aires - Volumes**
- **Thème S Statistiques et Probabilités**
- **Thème F : Fonctions et Analyse**

Pour une base plus variée, il pourrait suffire d'affiner et de compléter ces catégories. Telles qu'elles conviennent bien pour les mathématiques scolaires.

La base « **20 000 Problems Under the Sea** » utilise la classification suivante pour les contenus

Algebra ; Analysis ; Applied Math ; Combinatorics ; Game Theory ; Geometry ; Higher Algebra ; Linear Algebra ; Number Theory ; Probability ; Recreational Math ; Set Theory ; Solid Geometry ; Statistics ; Symbolic Logic ; Topology ; Trigonometry ;

Toutefois, comme EVAPM elle complète en associant à chaque question des mots clés relatifs aux contenus.

Le critère de classement « contenus » convient assez bien pour classer les exercices d'application (du cours). Dans ce cas l'étudiant est en effet incité à mettre en œuvre telle(s) notion(s) particulière(s) identifiée(s) dans tel(s) domaine(s) particulier(s). Mais, sauf à lui interdire de faire preuve d'imagination et de s'aventurer hors du domaine ainsi balisé, pour trouver d'éventuelles solutions personnelles, les procédures de résolution ne sont pas assurées de respecter le classement utilisé.

En ce qui concerne les problèmes, il s'agit de situations qui ne sont pas toujours associées à un domaine de contenu bien identifié. Ils peuvent être énoncés en termes non mathématiques ne suggérant pas de contenu mathématique particulier. Les associer à un domaine de contenu est déjà suggérer une démarche particulière de résolution.

Il convient d'ailleurs de distinguer le langage utilisé dans l'énoncé du problème, qui peut relever d'un domaine, et une possible méthode de résolution qui peut, elle, relever d'un autre domaine.

Qu'ils soient, ou non, énoncés en termes mathématiques, les problèmes supposent une mathématisation, voire une modélisation qui peut se faire dans des domaines différents. Leur résolution peut alors s'appuyer sur des contenus mathématiques qui dépendent des connaissances de la personne qui traite la question. Autrement dit le contenu n'est pas absolument intrinsèque à la question.

5.3 La classification TIMSS

On trouvera en annexe 1 la classification concernant les contenus utilisée dans le cadre de la Troisième Étude Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences de l'IEA. Cette classification a l'avantage d'être indexée, détaillée, et de couvrir l'ensemble des mathématiques scolaires.

5.4 Classement par “grandes idées” et par problématiques

L'étude PISA de l'OCDE « Program International of Student Assessment » indexe ses questions sur une liste de « grandes idées ». L'origine de cette notion peut être trouvée dans un ouvrage remarquable édité en 1990 pour le « National Research Council » américain par L.A. Steen sous le titre « On the shoulders of giants – New approaches to Numeracy » (Cf. références).

Voici les « grandes idées » proposées par PISA :

- **Variations et croissance**
- **Espace et formes**
- **Raisonnement quantitatif**
- **Incertitude**
- **Indépendances et relations**

La classification qu'elles permettent est assez pauvre. Les *problématiques* définies à l'APMEP par Régis Gras et son équipe correspondent à peu près à la même idée, laquelle peut encore être rapprochée de l'idée de champ conceptuel développée par G. Vergnaud. Plutôt qu'une entrée par les contenus (ou à côté), ces auteurs proposent une entrée par des classes de problèmes dont la communauté est liée au type de questions qui sont posées et que ces questions permettent de résoudre et non par les outils mathématiques qui peuvent être mobilisés.

Les 8 problématiques définies dans ce cadre sont les suivantes (Cf. références)

- 1) **Repérage.**
- 2) **Représentations figurales et/ou graphiques. Propriétés des modèles associés.**
- 3) **Dynamique des points, des figures et des nombres.**
- 4) **Mesure de grandeurs avec précision, approximation ou incertitude.**
- 5) **Traitement et représentations de données statistiques.**
- 6) **Techniques algorithmiques.**
- 7) **Changements de registres et de cadres.**
- 8) **Recueil, traitement, consultation et communication de l'information.**
- 9) **Construction ou choix opportun et optimal des modèles, des outils et des méthodes dans des situations sous contraintes pluridisciplinaires.**
- 10) **Conjectures, preuves, réfutations et validations**

Dans bien des cas, les énoncés ne livrent que peu d'information sur les contenus susceptibles d'être mobilisés alors que leur appartenance à une problématique donnée peut être assez évidente.

La brochure citée (cf références), ainsi qu'une brochure de même nom publiée en 1995 détaille la signification à donner à chacune de ces problématiques. Ces documents faciliteront considérablement l'attribution de telle ou telle problématique à un énoncé donné.

6. Classement selon l'âge ou le niveau scolaire

Ce critère est important et ne présente pas de difficulté particulière. Toutefois un certain optimisme devrait être ici de règle. En effet il n'y a pas toujours lieu de subordonner la confrontation à tel ou problème aux acquisitions scolaires supposées préalables. D'une part des démarches de tâtonnement-bricolage peuvent être encouragées, d'autre part, même si les jeunes Gauss et autre Paul Erdős ne sont pas légion, il faut continuer à leur donner l'occasion de nous étonner.

Autrement dit, ce sont plutôt de fourchettes d'âge qu'il faut proposer (en Grande-Bretagne, par exemple, on a pu établir que le 1/3 des enfants de 10 ans pouvaient résoudre des problèmes qui restaient inaccessibles à 1/3 des enfants de 13 ans (cité de mémoire – pourcentages à vérifier).

La plupart des pays et des organisations se réfèrent à la terminologie américaine connue sous le nom de « grades K-12 » (du Kindergarten) à la 12^{ème} année après le début de l'enseignement primaire (autrement dit « grade 1 » correspond au CP français, tandis que « grade 12 » correspond à nos classes terminales).

Nous recommandons d'utiliser ce système pour repérer le niveau scolaire concerné par une question de mathématiques. L'âge peut d'autant plus être associé au niveau scolaire que, dans de nombreux pays, le redoublement de classe est inconnu.

7. Classement selon les objectifs contrôlés

Dans une perspective de formation ou d'évaluation, il est souvent intéressant de pouvoir spécifier le ou les objectifs qu'un exercice est susceptible de contrôler.

Une liste de près de 1 000 objectifs indexés est ainsi associée aux bases EVAPM et EVAPMIB (50 pages).

Pour donner une idée du niveau de détail de cette liste, en voici trois items consécutifs.

- D058 Caractériser le triangle rectangle par la médiane relative à l'hypoténuse.
- D059 Caractériser le triangle rectangle par la propriété de Pythagore.
- D060 Calculer, en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice, un côté d'un triangle rectangle à partir de la donnée des deux autres côtés.
- D061 Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.

On trouvera en annexe 2 deux pages extraites de cette liste.

Cette liste d'objectifs couvre l'ensemble des programmes scolaires français de la classe de sixième aux classes terminales incluses. Elle a été faite pour pouvoir effectuer un suivi du curriculum français à la fois en ce qui concerne les modifications des objectifs au fil des années et en ce qui concerne les savoir et savoir-faire développés par les élèves.

Cette liste est certainement trop détaillée pour être directement utilisable dans le cadre d'une base d'énoncés associée au Kangourou des Mathématiques, mais il est possible de la revoir, de l'élaguer en conséquence et de regrouper certains items qu'il n'était intéressant de distinguer que dans le but d'identifier dans le détail les capacités supposées résulter des programmes officiels.

Ajoutons que d'autres listes existent, associées aux curriculum d'autres pays (Belgique, UK,...). Il y tout aurait intérêt à confronter ces listes et à rapporter les programmes de divers pays à une liste synthétique et de taille raisonnable. C'est un travail important qui intéresserait de nombreuses personnes et institutions. Ce travail pourrait constituer un prolongement utile d'une étude que nous avons menée pour la Commission Européenne par la Société Mathématique Européenne (EMS) (Cf. références).

8. Classement selon la difficulté

On se gardera de confondre la difficulté et la complexité. On peut représenter une démarche de résolution par un graphe, lequel peut effectivement apparaître comme plus ou moins enchevêtré, plus ou moins « complexe » et on peut même chercher à mesurer cette complexité.

Il est bien connu que la difficulté d'une question est relative. Telle question, reconnue difficile pour un enfant de 10 ans sera considérée comme très facile et sans intérêt pour un élève de terminale.

La notion de complexité cherchera à introduire un critère plus intrinsèque dans le classement des questions, mais on verra ci-dessous que la notion de difficulté peut, elle-même être rendue plus objective.

8.1 Approche classique

De façon classique, la difficulté d'une question est relative aux personnes et aux groupes de personnes.

Telle question, difficile pour quelqu'un qui ne connaît rien à la géométrie projective, et qui, par exemple, sera amené à la traiter dans le cadre de la géométrie euclidienne, sera très facile pour quelqu'un qui pourra faire usage du modèle projectif.

La mesure de la difficulté est donc relative à un groupe de personnes et se mesure habituellement par le pourcentage de personnes de ce groupe de référence qui ont su résoudre la question.

Considérons la question suivante.

Énoncé 1

On définit une fonction f qui, pour tous les nombres réels x et y , vérifie $f(x \times y) = f(x) + f(y)$.

Alors, $f(1999)$ vaut :...

- A) : 0 B) 1 C) 2 D) 1999 E) On ne peut pas calculer $f(1999)$

Question Kangourou Juniors 1999

3,7% de bonnes réponses en seconde, 3,5% en première

Pour les élèves concernés, la question est indubitablement apparue difficile (moins de 4% de réussite), même si elle serait d'une facilité déconcertante pour, par exemple, un enseignant de mathématiques de lycée.

Le fait que la question paraîtra facile à ces mêmes élèves dès qu'ils auront pris connaissance d'une solution concerne la complexité et non la difficulté de la question. Il leur est facile de comprendre une solution (et peut-être auront-ils même l'impression d'avoir été mystifiés) mais il leur était très difficile d'en produire une.

Voici une autre question :

Énoncé 2

À chaque nombre entier on applique le processus suivant : si le nombre est pair on le divise par 2, s'il est impair on lui ajoute 5. En commençant avec un nombre impair k , et en répétant le processus 3 fois, on aboutit à 35. Quelle est la somme des chiffres du nombre k ?

- A) : 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Question Kangourou Juniors 1999

20% de bonnes réponses en seconde, 32% en première

Cette question s'adressant au même public que la question précédente est beau coup mieux réussie. Elle est donc plus facile POUR EUX (on verra plus loin que le second problème doit être considéré comme plus complexe que le premier).

Nous convenons alors de donner comme indice de FACILITÉ d'une question, par rapport à un groupe donné, le pourcentage de réussite à cette question obtenue par un échantillon représentatif de ce groupe.

Cela suppose évidemment que la question ait pu être expérimentée. Dans le cas contraire, il faudrait s'abstenir de parler de difficulté (mais on pourra parler de complexité). De nombreuses enquêtes ont montré que les enseignants pouvaient se tromper lourdement sur le niveau de difficulté d'une question.

8.2 Approche « théorie des réponses aux items »

Il s'agit d'une méthode de traitement des données (résultats d'évaluations). Cela suppose donc que l'on possède des données, et même, des données de masse.

Pour une explication rapide du modèle et de son intérêt pour la base de questions envisagée, supposons que l'on ait fait un questionnaire Kangourou 2001 à 10 000 élèves de seconde.

On considère alors le score obtenu par ces élèves comme une mesure de leur compétence en mathématiques (on pourrait d'ailleurs affiner cette mesure en prenant en compte par exemple les notes scolaires de l'année). On note alors θ la variable obtenue (définie sur l'ensemble des candidats) et l'on porte cette variable en abscisses.

Étant donné une question particulière Q du questionnaire étudié, on définit la fonction φ_Q par :

Pour tout θ , $\varphi_Q(\theta)$ est la probabilité (identifiée pour l'instant à un pourcentage) pour qu'un candidat de compétence θ réussisse la question Q .

La courbe obtenue est la courbe caractéristique de la question Q (par rapport à la compétence θ).

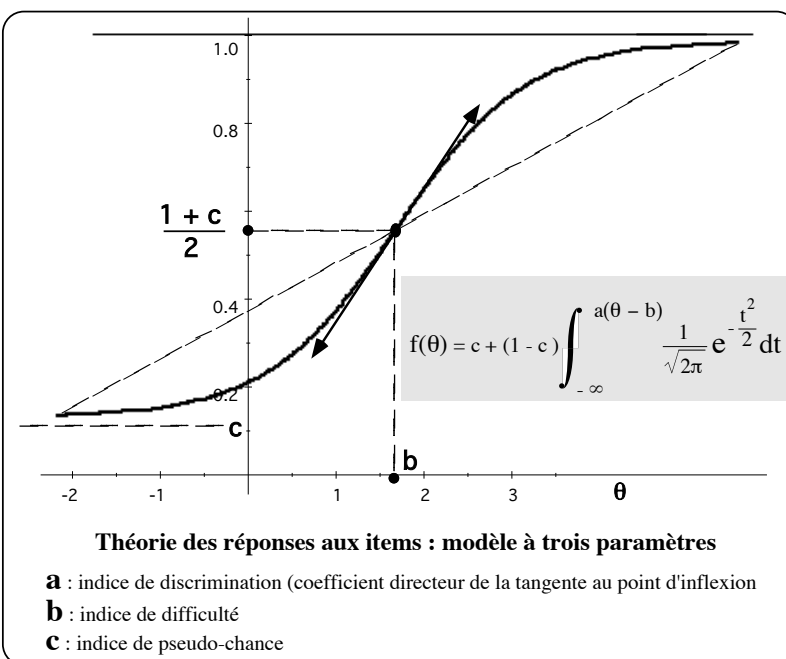
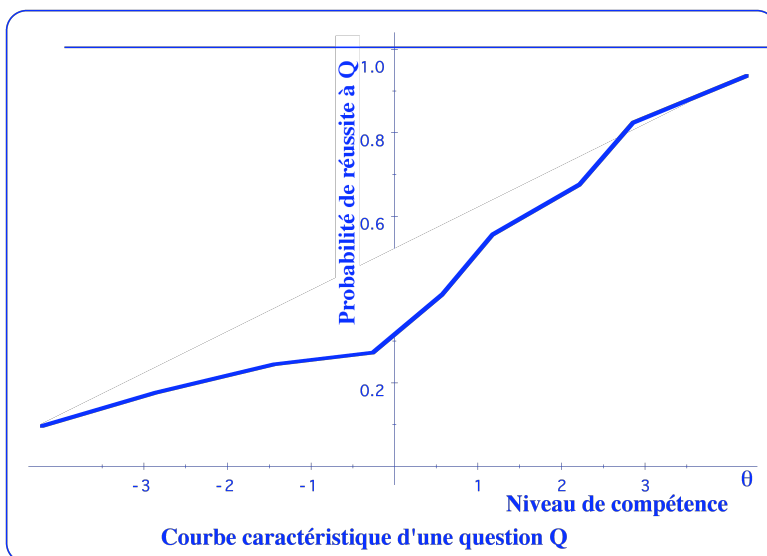
On compare alors cette courbe à la courbe idéale présentée ci-contre et l'on en déduit les paramètres de la question : indices de difficulté, de discrimination et de pseudo-chance.

En particulier, la difficulté est définie ici comme le niveau de compétence (sur une échelle normale réduite) pour laquelle la probabilité de réussite à la question est 0,5 (correction faite pour la pseudo-chance).

Continuons avec l'exemple du Kangourou des Mathématiques. Si l'on fait passer des questionnaires

différents à des élèves de niveau scolaire différents, en assurant que deux questionnaires de niveau consécutifs aient une intersection non vide (7 ou 8 questions peuvent suffire), alors il sera possible de définir, par raccordements, une échelle de compétence quasi intrinsèque à l'ensemble des niveaux, et, par quelques calculs de probabilité (application du principe de maximum de vraisemblance) de définir un indice de difficulté qui ne soit plus fonction des groupes concernés (indice intrinsèque).

Cette méthode de traitement des données est utilisée dans les enquêtes internationales telles que TIMSS et PISA. Elle est aussi utilisée par les grandes banques américaines telles qu'ETS (Educational Testing Service) dont l'influence s'étend au monde entier.



9. Classification selon le niveau de mathématisation attendu

On trouvera en annexe 3 une classification selon les niveaux de mathématisation. Il s'agit de la classification de PISA qui parle alors, abusivement à notre avis, de « classes de compétences ». Nous préférons retenir l'expression « niveau de mathématisation » et ce critère nous paraît tout à fait pertinent.

Voici les 3 niveaux

- **Questions de niveau 1 : Reproduction, définitions et calculs**
- **Questions de niveau 2 : Mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes**
- **Questions de niveau 3 : Mathématisation, pensée mathématique, généralisation et compréhension en profondeur**

Cette classification a un peu l'inconvénient de recouper ce qui sera désigné plus loin sous les termes d'activités et de processus, mais il peut constituer un premier indice de la profondeur du travail mathématique attendu. De toutes façons il est clair qu'il est difficile de construire des critères totalement indépendants.

10. Classification selon les activités et les processus sollicités

Quel type d'activité mathématique un problème ou un exercice est-il susceptible de déclencher ?

Est-il possible de proposer une typologie des types d'activité possible ?

C'est ce que fait R.Gras qui propose une liste de 10 types d'activités :

1. **CALCULATOIRE**
2. **CLASSIFICATOIRE**
3. **CREATIF**
4. **CRITIQUE**
5. **HEURISTIQUE**
6. **LOGIQUE**
7. **PREDICTIF**
8. **REINVESTISSEMENT**
9. **TECHNIQUE**
10. **TRADUCTIF**

C'est cette typologie qui est utilisée pour la base EVAPMIB. Elle nous semble particulièrement bien adaptée pour une base d'énoncés de types variés telle que celle envisagée dans le cadre du *Kangourou des Mathématiques*.

On trouvera le détail de cette typologie en annexe 6.

PISA propose sous le nom de « processus » une typologie développée en annexe 8. Cette typologie comporte les catégories suivantes :

1. **La pensée mathématique**
2. **Le raisonnement mathématique**
3. **La modélisation mathématique**
4. **Poser et résoudre des problèmes**
5. **La représentation**

6. Le langage symbolique et formel

7. La communication

8. Les outils et les instruments :

Il ne s'agit pas vraiment de processus (voir paragraphe suivant), mais encore de démarches et de types d'activités. Nous utilisons cette typologie dans la nouvelle base EVAPMTEX. Son principal intérêt est son origine et sa diffusion : elle est en effet connue et utilisée dans plus de 40 pays.

L'idéal serait une synthèse des deux typologies ci-dessous...

11. Classement selon la complexité

Il convient de distinguer au moins deux types de complexité :

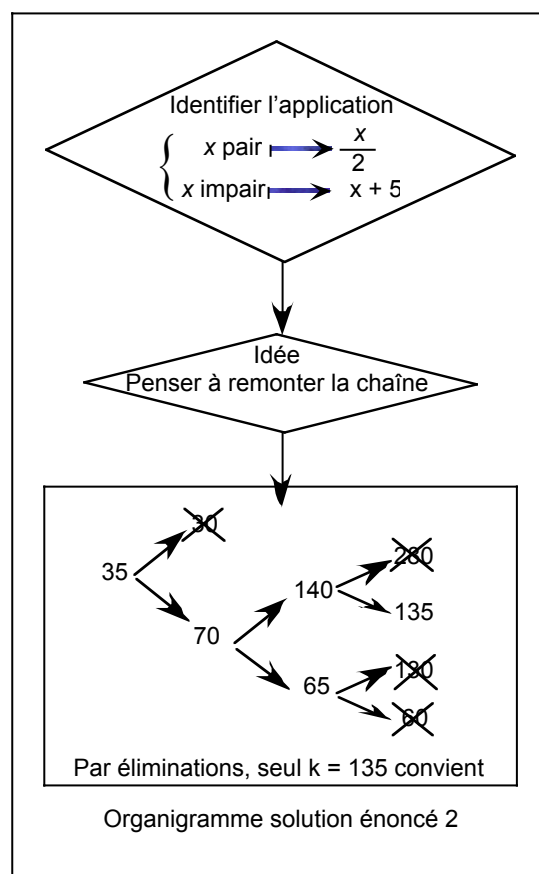
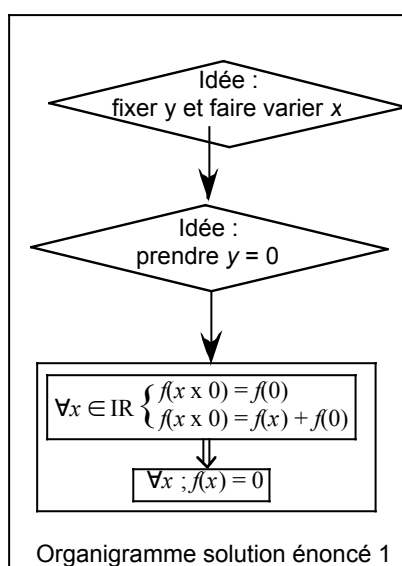
- La complexité structurelle qui peut concerner la structure de l'énoncé ou la structure des traitements possibles.
- La complexité cognitive qui concerne le niveau de l'activité mentale sollicitée (de l'automatisme à la création)

Les taxonomies de la complexité dont nous parlerons se veulent hiérarchisées du moins complexe au plus complexe.

11.1 Complexité structurelle

Les figures ci-dessous montreront des organigrammes de raisonnement et de démonstration des énoncés 1 et 2 du paragraphe 8-1.

Bien que la question 1 soit beaucoup plus difficile, pour les élèves considérés, que la question 2, il est clair que le graphe de démonstration de la question 2 est nettement plus complexe que celui de la question 1. La question 2 suppose des pas de raisonnements imbriqués, ce que ne suppose pas la question 1.



L'inconvénient pour faire de la complexité structurelle un critère de classement est que cette complexité n'est pas mesurable. Il serait bon cependant d'introduire ce type de complexité dans un système de

classification.

Par exemple :

- Simple enchaînement de pas de raisonnement et de déduction – nombre de tels pas.
- Arbre de raisonnement-déductions a plusieurs branches – nombre de branches – nombre maximum de pas sur une branche.

11.2 La taxonomie de Bloom

Nous n'insisterons pas sur cette taxonomie qui est à l'origine de beaucoup d'autres taxonomies. En particulier en ce qui concerne les mathématiques, de la taxonomie NLSMA (New Standard for Mathematical Abilities) utilisée pour la Seconde Étude Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences de l'IEA.

La taxonomie de Bloom a démontré son inadaptation aux mathématiques. Elle place en effet l'analyse après la compréhension et il est bien rare, en mathématiques, que l'analyse de la situation ne constitue pas un préalable à la compréhension.

11.3 Une taxonomie pour les mathématiques : la taxonomie de Gras, R.

Cette taxonomie a l'avantage d'avoir été spécifiquement validée pour les mathématiques au niveau de l'enseignement secondaire (cf références).

En voici les titres (voir taxonomie développée en annexe 6).

A : connaissances de base

Redire, refaire, effectuer, reconnaître, identifier, dans des conditions proches de l'enseignement...

B : Analyse et traduction

décomposer, repérer les éléments, changer de forme, modifier,...

C : Compréhension

Mettre en relation, interpréter,...

D : Synthèse, et créativité

Composer, démontrer, faire du neuf,....

E : Critique et évaluation

Contrôler, critiquer, réfuter

Cette taxonomie peut être recoupée avec les typologies d'activités, mais elle concerne davantage le fonctionnement intellectuel. Par ailleurs une activité de type calculatoire, par exemple, peut être menée à différents niveau du fonctionnement cognitif.

Des exemples viendront illustrer ce point.

Nous utilisons depuis plusieurs années cette taxonomie dans le cadre des études EVAPM et son utilisation a permis de vérifier quelques hypothèses importantes (en particulier la relative indépendance des différents niveaux – dans un sens à préciser).

12. Conclusion provisoire

Devant toutes ces entrées possibles, que peut-on conseiller ?

Redisons déjà que les moteurs de recherche actuels permettent facilement des recherches plein texte : ainsi on pourra retrouver directement tous les énoncés qui contiennent le mot « asymptote » dans le titre ou dans le corps de l'énoncé.

Ensuite, la recherche par mots clés, avec une liste non limitative de mots clés concernant les contenus (explicites ou implicites) permet de retrouver les exercices mettant en jeu tel ou tel contenu.

Enfin, la recherche multi-critère est aussi facile et permet d'installer des systèmes de critères éventuellement redondants mais dont chacun peut mieux correspondre aux besoins et aux habitudes d'un utilisateur donné.

Ainsi il sera possible de trouver les exercices de la base adaptés à de enfants de 13 ans, mettant en jeu la symétrie axiale, impliquant une activité de modélisation, supposant compréhension et créativité (niveau de complexité cognitive), et d'indice de facilité égale ou inférieur à 0,30.

En trouvant les énoncés correspondants, s'il en existe, on aura aussi des renseignements sur les objectifs contrôlés, le type d'énoncé et le niveau de mathématisation attendu.

Mais il est clair que d'autres modalités de recherche seront possibles.

Le présent texte se veut une vue d'ensemble sur les systèmes de classification des énoncés de mathématiques (problèmes et exercices). Cette vue d'ensemble est sans doute incomplète et nous chercherons à la compléter.

Nous n'avons pas cherché à faire des choix définitifs qui pourraient s'imposer à qui voudrait organiser une banque d'énoncés, mais plutôt à éclairer les choix qui devront être fait.

Nous considérons donc ce texte comme un document de travail préalable à une réflexion qui devrait associer les différentes parties intéressées par la constitution d'une telle banque.

Références et bibliographie

APMEP: 2003 (à paraître), Une approche des contenus d'enseignement par des problématiques pour le second cycle.

Arsac, G. ; Germain, G. ; Mante, M. : 1998, Problème ouvert et situation-problème. Irem de Lyon

Bodin A. : 1997, L'évaluation du savoir mathématique - Questions et méthodes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bodin, A ; Straesser, R. ; Villani, V.: 2001, Niveaux de référence pour l'enseignement des mathématiques en Europe - Rapport international
Reference levels in School Mathematics Education in Europe - International report

<http://www.emis.de/projects/Ref/>

Bodin A.: 1993, 'What does to assess mean', *Investigations into Assessment in Mathematics Education, An ICMI Study* (ed Mogens NISS) - Kluwer Academic Publishers - Dordrecht

Bodin, A : 1998, Reference Levels in Mathematics for European Union Countries

Bodin, A : 2000, *Vers des niveaux de référence en mathématiques, pour les pays de la Communauté Européenne*, Bulletin de l'APMEP, N°426, pp 61-77

Bodin, A. : 1996, 'Mesures pour le système éducatif' *Actes des 7emes Entretiens de la Villette*, 148-160, Centre National de Documentation pédagogique, Paris

Gras R. : 1977, *Contributions à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques* - Thèse- université de RENNES.

Index to Mathematical Problems 1975-1979 edited by Stanley Rabinowitz and Mark Bowron (2002)

Index to Mathematical Problems 1980-1984 edited by Stanley Rabinowitz (1992)

Irem de Strasbourg : 1973, Le livre du problème – tomes 1 à 6 - Cedic

Jaworski, B & Phillips, D. (ed) : 1999, *Comparing Standards Internationally, research and practice in mathematics and beyond*, Syposium Books, Cambridge University Press, UK

OCDE : 2000, Mesurer les connaissances et compétences des élèves. Lecture, mathématiques et sciences : l'évaluation de PISA 2000 (also in English).

OECD : 1999, Measuring Student Knowledge and - The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and science literacy - Education and Skills (also available in French).

OECD : 2001, *Knowledge and skills for life* - first results of PISA 2000 (OECD Programme for international Student Assessment) - OECD - PARIS (also available in French).

Steen, L. A (ed) : (1990), On the shoulders of the giants - new approaches to numeracy. National Academic Press (Washington)

APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

Brochures EVAPM, contenant les épreuves, les résultats et les analyses des évaluations des programmes de mathématiques menées par l'APMEP (BODIN. A., et All) :

EVAPM6/87 - Evaluation du programme de Sixième 1987 (Paris 1987)

EVAPM5/88 - Evaluation du programme de Cinquième 1988 (Paris 1988)

EVAPM6/89-5/90 - Compléments 1991 des évaluations Sixième et Cinquième EVAPM4/89 -

Evaluation du programme de Quatrième 1989 (Paris 1989)

EVAPM3/90 - Evaluation du programme de Troisième 1990 (Paris 1990)

EVAPM4/91-3/92 - Compléments 1991 des évaluations Sixième et Cinquième EVAPM2/91 -

Evaluation du programme de Seconde 1991 (Paris 1991)

EVAPM1/93 - Evaluation des programmes des classes de Première 1991 (Paris 1997)

EVAPM Terminale 99 – Evaluation des programmes des classes terminales (Paris 1999 – 2003)

Sites Web

Base EVAPM : <http://ctug48.univ-fcomte.fr/evapmib/>

20 000 problems under the sea : <http://problems.math.umd.edu/index.htm>

EMS référence levels in school mathematics : <http://www.emis.de/projects/Ref/>

ANNEXE 1 Les contenus de TIMSS

(Troisième Étude Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences de l'IEA)

Traduction A. Bodin

1.1	Nombres
1.1.1	Nombres entiers naturels (cf introduction)
1.1.1.1	Signification (utilisation des nombres, numération de position, classement et comparaison des nombres)
1.1.1.2	Opérations (addition, soustraction, multiplication, division ; calculs impliquant plusieurs de ces opérations)
1.1.1.3	Propriétés des opérations (commutativité, distributivité, etc..)
1.1.2	Écritures fractionnaires et décimales
1.1.2.1	Fractions ordinaires ³ (signification et représentation de fractions ordinaires, calculs impliquant des fractions ordinaires et des nombres mixtes ⁴)
1.1.2.2	Écritures décimales ⁵ (signification et représentation d'écritures décimales, calculs impliquant des écritures décimales)
1.1.2.3	Relations entre fractions ordinaires et les nombres en écriture décimale (conversions et ordre de fractions et de nombres donnés sous forme décimale)
1.1.2.4	Pourcentages (tous calculs et problèmes impliquant des pourcentages)
1.1.2.5	Propriétés des fractions ordinaires et des nombres écrits sous forme décimale (commutativité, distributivité, etc...)
1.1.3	Nombres entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels
1.1.3.1	Nombres négatifs, entiers relatifs, et leurs propriétés
1.1.3.2	Nombres rationnels et leurs propriétés (nombres rationnel dont l'écriture décimale est finie, nombre rationnel à écriture décimale infinie et périodique à partir d'un certain rang ⁶).
1.1.3.3	Nombres réels, leurs sous-ensembles, et leurs propriétés
1.1.4	Autres nombres et concepts numériques
1.1.4.1	Écriture des nombres et calculs en base 2 et/ou dans d'autres bases de numération.
1.1.4.2	Exposants, racines et radicaux (exposants entiers, rationnels, réels)

³ Common fractions

⁴ Mixed number

⁵ Decimal fraction (cf introduction)

⁶ Respectivement pour "Terminating decimal" et "Recurring decimal"

1.1.4.3	Nombres complexes et leurs propriétés
1.1.4.4	Théorie des nombres (nombres premiers et décomposition en produit de facteurs premiers, théorie élémentaire des nombres, etc...)
1.1.4.5	Dénombrements (permutations, combinaisons, etc..)
1.1.5	Estimation et sens des nombres
1.1.5.1	Estimation des quantités et des tailles
1.1.5.2	Arrondis et chiffres significatifs
1.1.5.3	Calculs approchés (calcul mental et vraisemblance des résultats)
1.1.5.4	Exposants et ordres de grandeur

1.2	Mesure
1.2.1	Unités (concept de mesure et d'unités standardisées [y compris système métrique], utilisation d'instruments adaptés [précision et exactitude], mesures usuelles (longueur, aire, volume, capacité, temps et le calendrier, monnaie, température, masse et poids, angles, quotients et produits d'unités [km/h, m/s, etc...], analyse dimensionnelle)
1.2.2	Périmètre, aire, et volume (concepts de périmètre, d'aire, aire d'une surface, volume, formules pour le calcul des périmètres, des aires, et des volumes)
1.2.3	Estimations et erreurs (estimation de mesures et erreurs de mesure, précision et exactitude des mesures)

1.3	Géométrie : position, visualisation et formes
1.3.1	Géométrie du plan : géométrie analytique⁷ (repère et coordonnées dans le plan, équations de droites, les coniques et leurs équations)
1.3.2	Géométrie du plan : éléments de base (Points, droites, segments, demi-droites ⁸ , angles, parallèles et perpendiculaires)
1.3.3	Géométrie du plan : polygones et cercles (triangles, quadrilatères, leurs classifications et leurs propriétés ; le théorème de Pythagore et ses applications ; autres polygones, cercles, et leurs propriétés)
1.3.4	Géométrie de l'espace (objets et surfaces à trois dimensions et leurs propriétés ; plans et droites dans l'espace ; perception spatiale et visualisation ; coordonnées dans l'espace ; équations de droites, de plans, et de surfaces, dans l'espace)

⁷ "Coordinate geometry"

⁸ "Rays"

1.3.5	Vecteurs
--------------	-----------------

1.4	Géométrie : symétries, isométries⁹ et similitudes¹⁰
1.4.1	Transformations (motifs répétitifs, pavages, frises, reproduction par calque ou autre, etc... ; symétries [par rapport à une droite, symétries de rotation, symétries dans l'espace, symétries en algèbre et formes numériques] ¹¹ ; transformations : symétrie et isométries, agrandissements [dilatations], composition de transformations géométriques, groupes de transformations, représentations matricielles de transformations)
1.4.2	Isométrie et similitude (Congruences [triangles isométriques et leurs propriétés ; Côté-Côté-Côté, Côté-Angle-Côté], quadrilatères et polygones isométriques et leurs propriétés, similitude [triangles semblables et leurs propriétés])
1.4.3	Constructions utilisant la règle plate et le compas

1.5	Proportionnalité
1.5.1	Concepts relatifs à la proportionnalité (notion de rapport et de proportion, proportionnalité directe et inverse)
1.5.2	Problèmes relevant de la proportionnalité (recherche d'un terme d'une proportion dont les trois autres termes sont donnés, résolution de problèmes pratiques impliquant la proportionnalité, échelles [cartes et plans], proportions traduisant la similarité ¹²).
1.5.3	Pente et trigonométrie (pente absolue et pente ¹³ des droites dans le plan muni d'un repère, relations trigonométriques dans le triangle rectangle)
1.5.4	Interpolation et extrapolation linéaire

1.6	Fonctions, relations et équations
1.6.1	Formes numériques¹⁴, relations et fonctions (formes numériques, relations et propriétés, fonctions et propriétés,

⁹ Congruence

¹⁰ Similarity

¹¹ Le mot symétrie est utilisé ici dans le sens que lui donne Hermann WEYL dans son classique "Symmetry"

¹² Signalons à nouveau que le "théorème de Thalès" tel que nous ne connaissons en France n'existe pas dans de nombreux autres pays

¹³ Slope and gradient in straight line graphs

	représentations de relations et de fonctions, familles de fonctions [représentations graphiques et propriétés], opérations sur les fonctions, fonctions associées fonction inverse, fonction dérivée, etc...], liens entre fonctions et équations [par exemple zéros de fonctions comme racines d'équations], interprétations de représentations graphiques de fonctions, fonctions de plusieurs variables, récursivité)
1.6.2	Équations et formules (représentation de situations numériques ; solution explicites d'équations simples ; calcul algébrique ¹⁵) ; expressions équivalentes [factorisation et simplification] ; équations linéaires et leurs solutions générales [solutions dans $\mathbb{R}$] ¹⁶ ; équations du second degré et leurs solutions générales [solutions dans $\mathbb{R}$] ; équations polynomiales et leurs solutions ; équations trigonométriques et identités ; équations logarithmiques et exponentielles, et leurs solutions ; solutions d'équations pouvant se ramener à des équations du second degré, équations comportant des radicaux, équations comportant des valeurs absolues etc... ; autres méthodes de résolution des équations [par exemple : approximations successives] ; Inégalités et relations graphiques associées ; systèmes d'équations et leurs solutions [incluant les solutions matricielles] ¹⁷ ; systèmes d'inégalités ; méthode des variables intermédiaires, réorganisation de formules (!) ¹⁸ ; équation générale du second degré)

1.7	Représentation de données, probabilités et statistiques
1.7.1	Représentation et analyse de données (recueil de données à partir d'expériences et d'enquêtes simples ; représentation des données ; interprétation de tables, tableaux, représentations graphiques discrètes et continues ¹⁹ ; types d'échelles [nominal, ordinal, d'intervalles, de rapports] mesures de tendance centrale, mesure de dispersion ; échantillonnage, hasard et biais ; prédiction et inférences à partir de données ; ajustement de droites et de courbes aux données ; corrélations et autres mesures de relations ; bon et mauvais usage des statistiques)
1.7.2	Incertitude et probabilités (probabilités intuitives ²⁰ et vocabulaire des probabilités, probabilités numériques et modèles probabilistes, principes de dénombrement, événements mutuellement indépendants, probabilités conditionnelles et événements indépendants, théorème de BAYES, tables de contingence, distributions de probabilité de variables aléatoires discrètes, distributions de

¹⁴ Pattern (voir page 1)

¹⁵ Pour "operations with expressions"

¹⁶ Sens à vérifier : "linear equations and their formal [closed] solutions"

¹⁷ Pour "matrix solutions"

¹⁸ "substituting or rearranging formulas"

¹⁹ "plots and graphs"

²⁰ "informal likelihoods"

	probabilité de variables aléatoires continues, espérance, échantillonnage, estimation des paramètres d'une population, tests d'hypothèse, intervalles de confiance, distributions de variables bi-dimensionnelles, processus de Markov, méthode de Monte Carlo et simulations par ordinateur)
--	---

1.8	Analyse élémentaire
1.8.1	Processus infinis (suites arithmétiques et géométriques, séries arithmétiques et géométrique, formule du binôme, autres suites et séries, limites et convergence de suites et de séries, limites et convergence de suites et de fonctions, continuité)
1.8.2	Variations²¹ (croissance et décroissance, dérivation, intégration, équations différentielles, dérivées partielles)

1.9	Validation et structures
1.9.1	Justification et validation (connecteurs logiques, quantificateurs ["pour tout" ; "il existe"], algèbre de Boole et tables de vérité, propositions conditionnelles, propositions équivalentes [incluant réciproque, contraposée, inverse ²² , inférences [par exemple modus ponens, modus tollens] ; preuves déductives directes, preuves indirectes et preuves par l'absurde, preuve par induction, cohérence des systèmes d'axiomes)
1.9.2	Abstraction et structures²³ (ensembles, notations ensemblistes, opérations ensemblistes, relations d'équivalence, partitions et classes d'équivalence ; groupes, espaces vectoriels ; sous-groupes, sous-espaces, etc... ; autres systèmes d'axiomes [par exemple, géométries finies])

1.10	Autres contenus
1.10.1	Informatique (fonctionnement des ordinateurs ²⁴ , organigrammes ²⁵ , apprentissage d'un langage de programmation, programmes, algorithmes avec applications informatiques, complexité ; histoire et nature des

²¹ Le mot utilisé est "CHANGE"

²²"inverse" : sans doute [non p $\rightarrow$ q non q] est il l'inverse de [p $\rightarrow$ q] (à vérifier)

²³ Pour : "Structuring and abstracting" (à voir)

²⁴ "operation of computers" - traduction à voir

²⁵ "flow chart"

	mathématiques ; applications spéciales des mathématiques [cinématique, mécanique newtonienne, croissance d'une population - modèles discrets ou continus - application de la théorie des graphes, programmation linéaire, analyse du chemin critique²⁶, exemples empruntés à l'économie] ; méthodes de résolutions de problèmes²⁷ ; contenus scientifiques non mathématiques ; contenus non mathématiques et non scientifiques]
--	--

²⁶ "critical path analysis"

²⁷ "problem solving heuristics"

ANNEXE 2

Extrait de la liste de capacités des bases EVAPM et EVAPMIB

(voir dans EVAPM SECONDE 2003 le document **capacites.pdf**)

Code	Capacité
D037	Utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux droites parallèles et une sécante.
D038	Utiliser les propriétés du rectangle (côtés et diagonales, angles, éléments de symétrie).
D039	Utiliser les propriétés du losange (côtés et diagonales, angles, éléments de symétrie).
D040	Utiliser les propriétés du carré (côtés et diagonales, angles, éléments de symétrie).
D041	Utiliser les propriétés du parallélogramme (côtés et diagonales, angles, éléments de symétrie).
D042	Utiliser, dans une situation donnée : la somme des angles d'un triangle.
D043	Utiliser, dans une situation donnée : les angles d'un triangle équilatéral.
D044	Utiliser, dans une situation donnée : les angles d'un triangle isocèle.
D045	Savoir utiliser, dans une situation donnée la propriété de conservation du milieu par projection.
D046	Savoir utiliser, dans une situation donnée les propriétés du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle.
D047	Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
D048	Savoir utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle et les longueurs ses deux côtés adjacents.
D049	Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné.
D050	Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de l'angle aigu de cosinus donné.
D051	Connaître et utiliser : la propriété de chaque côté d'un triangle d'être inférieure à la somme des deux autres.
D052	Connaître le régionnement du plan par la médiatrice.
D053	Reconnaître la position relative d'une droite et d'un cercle.
D054	Connaître : l'axe de symétrie de la figure formée par une droite et un cercle.
D055	Tracer la tangente à un cercle en l'un de ses points.
D056	Reconnaître la tangente à un cercle en l'un de ses points.
D057	Savoir que les bissectrices, les hauteurs, les médianes, les médiatrices d'un triangle sont concourantes.
D058	Caractériser le triangle rectangle par la médiane relative à l'hypoténuse.
D059	Caractériser le triangle rectangle par la propriété de Pythagore.
D060	Calculer, en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice, un côté d'un triangle rectangle à partir de la donnée des deux autres côtés.
D061	Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.
D062	Connaître les propriétés caractéristiques du losange.
D063	Connaître les propriétés caractéristiques du rectangle.

- D064 Connaître les propriétés caractéristiques du carré.
- D065 Connaître les propriétés caractéristiques du parallélogramme.
- D066 Connaître et utiliser dans une situation donnée le théorème de Thalès relatif au triangle.
- D067 Connaître et utiliser dans une situation donnée la réciproque du théorème de Thalès appliqué au triangle.
- D069 Connaître et utiliser, dans le triangle rectangle, les relations entre les longueurs de deux côtés et le cosinus d'un angle.
- D070 Connaître et utiliser, dans le triangle rectangle, les relations entre les longueurs de deux côtés et le sinus d'un angle,
- D071 Connaître et utiliser, dans le triangle rectangle, les relations entre les longueurs de deux côtés et la tangente d'un angle.
- D072 Savoir utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle et les longueurs des deux côtés adjacents.
- D073 Connaître et utiliser la conservation de l'alignement, des distances, des angles, dans le cas d'une symétrie orthogonale, explicitement donnée.
- D074 Connaître et utiliser la conservation de l'alignement, des distances, des angles, dans le cas d'une symétrie centrale explicitement donnée.
- D075 Connaître et utiliser la conservation de l'alignement, des distances, des angles, dans le cas d'une translation explicitement donnée.
- D076 Connaître et utiliser la conservation de l'alignement, des distances, des angles, dans le cas d'une rotation explicitement donnée.
- D077 Savoir relier l'égalité vectorielle au parallélogramme.
- D080 Connaître et utiliser dans une situation donnée le théorème de Thalès (forme générale).
- D081 Connaître et utiliser dans une situation donnée la réciproque du théorème de Thalès (forme générale).
- D082 Connaître et utiliser la forme vectorielle de l'énoncé de Thalès : s... (Théorème direct).
- D083 Connaître et utiliser la forme vectorielle de l'énoncé de Thalès : (Théorème réciproque dans le cas $A = A'$)
- D084 Connaître et utiliser la forme vectorielle de l'énoncé de Thalès : ... (Théorème réciproque dans le cas $A \neq A'$).
- D085 Connaître et utiliser la relation de Chasles relative à l'addition des vecteurs.
- D086 Savoir caractériser vectoriellement le milieu d'un segment.
- D087 Savoir caractériser le centre de gravité (isobarycentre) d'un triangle ABC : par la relation
- D089 Connaître et utiliser les liens existant entre l'addition vectorielle et le parallélogramme.
- D090 Connaître et utiliser les liens existant entre un vecteur du plan et la translation correspondante.
- D091 Connaître et utiliser les liens existant entre l'opposé d'un vecteur et la symétrie centrale.
- D092 Savoir utiliser la colinéarité de deux vecteurs pour caractériser l'alignement de trois points.
- D093 Savoir utiliser la colinéarité de deux vecteurs pour caractériser le parallélisme de deux droites.

ANNEXE 3

Les démarches sollicitées et les produits attendus de TIMSS

(Troisième Étude Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques
et des Sciences de l'IEA)

Traduction A. Bodin

2.1	Savoir
2.1.1	Représenter (montrer une connaissance d'une représentation non verbale d'un objet ou d'une procédure mathématique, par sélection ou par construction, de façon formelle ou informelle ; les représentations peuvent être concrètes, iconiques, graphiques , algébriques , etc...)
2.1.2	Reconnaître des équivalences (sélectionner ou construire des objets mathématiquement équivalents [par exemple : écritures fractionnaires ou décimales représentant le même nombre] ; fonctions trigonométriques et développements en série ²⁸ équivalents ; représentations équivalentes de concepts - par exemple valeur d'un chiffre suivant sa place dans l'écriture d'un nombre ²⁹ ; systèmes axiomatiques équivalents])
2.1.3	Évoquer les objets et des propriétés mathématiques (objets satisfaisant des conditions données)

2.2	Utilisation de procédures standard
2.2.1	Utilisation d'instruments (utiliser des instruments, utiliser des calculatrices et des ordinateurs)
2.2.2	Exécution de procédures standard (compter et calculer (calculs routiniers) ; représenter graphiquement ; transformer un objet mathématique en un autre par un procédé formel, par exemple, multiplier par une matrice ; mesurer)
2.2.3	Utilisation de procédures plus complexes (estimer pour arriver à une réponse approchée à une question ; recueillir, organiser, présenter, et autres façons d'utiliser des données quantitatives ; comparer et distinguer deux objets, deux quantités, ou deux représentations mathématiques, etc... ; classer des objets ou travailler en prenant en compte les propriétés sous jacentes à un système de classification)

²⁸ "power series"

²⁹ "place value"

2.3	Recherche de problèmes³⁰
2.3.1	Formuler et clarifier les problèmes et les situations (Formuler ou clarifier un problème lié à la vie courante ³¹ ou autre situation concrète)
2.3.2	Développer des stratégies (développer une stratégie de résolution de problèmes ou une expérience supposant l'organisation du recueil des données et discuter la stratégie utilisée [pas seulement appliquer la stratégie ou conduire à terme l'expérience])
2.3.3	Résoudre (exécuter une démarche connue ou ad hoc)
2.3.4	Prédire (annoncer un résultat [nombre, forme, etc...] , avant l'exécution d'une opération ou d'une expérience.
2.3.5	Vérifier (déterminer la correction d'une solution de problème ; interpréter les résultats par rapport aux données initiales pour évaluer la sensibilité des résultats aux variations des données, etc..]

2.4	Raisonnement mathématique
2.4.1	Développer des notation et du vocabulaire (développer de nouvelles notations et vocabulaire pour rendre compte des actions et des résultats relatifs à des problèmes à support concrets ou autres)
2.4.2	Développer des algorithmes (développer un algorithme formel pour exécuter un calcul ou pour résoudre un problème de type donné)
2.4.3	Généraliser (étendre le domaine auquel les résultats d'investigations mathématiques et de résolution de problèmes est applicable en énonçant les résultats en termes plus généraux et plus largement applicables)
2.4.4	Conjecturer (faire des conjectures et des conclusions appropriées lors de l'étude de formes et d'organisation, discuter des idées, travailler dans un système d'axiomes, etc...)

³⁰ "Investigating and probleme solving". Toutefois, "problem solving" n'a pas tout à fait le sens que "résolution de problèmes" a pris en FRANCE.

³¹"related to a real world situation"

2.4.5	Justifier et prouver produire des preuves de la validité d'une action ou de la véracité d'une proposition en s'appuyant sur des résultats et propriétés mathématiques, ou en s'appuyant sur la logique)
2.4.6	Axiomatiser (explorer un système axiomatique formel en mettant en relation des sous-systèmes, propriétés ou propositions du système ; considérer de nouveaux axiomes et leurs conséquences ; examiner la cohérence des systèmes d'axiomes, etc..)

2.5	Communication
2.5.1	Utilisation de vocabulaire et de notations (utiliser correctement la terminologie et les notations mathématiques)
2.5.2	Représentations associées³² (travailler avec des relations et des représentations mathématiques associées pour montrer les liens entre les idées mathématiques ou des objets mathématiques liés)
2.5.3	Décrire, discuter (discuter un objet mathématique, un concept, une forme, une relation, un algorithme, un résultat, ou un affichage de calculatrice ou d'ordinateur)
2.5.4	Critiquer (discuter et évaluer de façon critique une idée mathématique, une conjecture, une solution de problème, une méthode de résolution, une preuve,...)

³² Pour "Relating representations". La description donnée fait penser à "changement" de cadre", mais cette expression serait sans doute trop précise.

ANNEXE 4 Les perspectives de TIMSS

(Troisième Étude Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences de l'IEA)

Traduction A. Bodin

3.1	Attitudes envers les sciences, les mathématiques et la technologie (encouragement d'attitudes positives envers la science, les mathématiques, et la technologie)
3.2	Carrières impliquant les sciences, les mathématiques et la technologie
3.2.1	Promotion des carrières scientifiques, mathématiques et technologiques
3.2.2	Promotion de l'importance de la science, des mathématiques et de la technologie dans les carrières non techniques
3.3	Participation à la science et aux mathématiques des groupes sous-représentés (le curriculum encourage tous types d'élèves à étudier et à utiliser les science, les mathématiques et la technologie ; exemples de groupes concernés : les femmes et les minorités raciales et ethniques)
3.4	Science, mathématiques et technologie pour augmenter l'intérêt (le curriculum promeut l'intérêt et une compréhension croissante dans le domaines des sciences, des mathématique et de la technologie, en utilisant des expériences communes aux étudiants, ou des informations populaires ou intrigantes ; les exemples incluent l'utilisation du sport, des informations, personnes célèbres, histoire, littérature, et données intéressantes)
3.5	Développement de l'esprit scientifique (et mathématiques) (le curriculum encourage les démarches de pensée scientifiques et mathématiques tels que ouverture d'esprit, objectivité, acceptation du doute, inventivité et curiosité)

ANNEXE 5 Les classes de compétences selon PISA

« Program International for Student Assessment » de l'OCDE

(voir § 9 les modifications de formulation proposées)

Afin de décrire les **niveaux de compétences mathématiques**, PISA organise ces processus en trois classes définissant le type de réflexion sollicitée : i) reproduction, définitions et calculs ; ii) mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes ; iii) mathématisation ' pensée mathématique, généralisation et compréhension en profondeur. En général, ces processus se caractérisent par un ordre croissant de difficulté, mais il ne s'ensuit pas qu'il est indispensable de maîtriser une première classe pour pouvoir progresser dans la suivante : il est possible, par exemple, d'effectuer des raisonnements mathématiques sans pour autant exceller en calcul.

1.... Compétences de classe 1 : Reproduction, définitions et calculs

La classe 1 recouvre des processus souvent évalués dans les tests standardisés, ainsi que dans les enquêtes comparatives internationales, ou ils sont principalement mesurés à l'aide d'items à choix multiple. Les questions portent sur des connaissances factuelles, ou demandent de représenter, d'identifier des équivalences, de restituer des objets et des propriétés mathématiques, d'exécuter des procédures classiques, d'appliquer des algorithmes simples et de mettre en œuvre des savoir-faire techniques.

2.... Compétences de classe 2 : Mise en relation et intégration pour résoudre des problèmes

Les processus de classe 2 demandent de commencer à établir des liens entre les différents chapitres et domaines des mathématiques et d'intégrer diverses informations dans le but de résoudre des problèmes simples. Bien que ces problèmes soient présumés non routiniers pour l'élève, ils n'exigent qu'un degré de mathématisation relativement élémentaire.

Dans cette classe de compétence, on attend aussi des élèves qu'ils soient capables de manier diverses formes de représentation, en fonction de la situation et de l'objectif visé. La mise en relation demande encore que les élèves soient à même de distinguer et de relier différents énoncés (des définitions, des affirmations, des exemples, des assertions conditionnelles et des démonstrations). Le fait de pouvoir décoder et interpréter le langage symbolique et formel, ainsi que de saisir ses relations avec la langue naturelle, est aussi un aspect crucial de cette classe de compétences. Les problèmes y sont souvent contextualisés et demandent une prise de décision mathématique de la part de l'élève.

3.... Compétences de classe 3 : Mathématisation, pensée mathématique, généralisation et compréhension en profondeur

Dans cette classe de compétence, il est demandé aux élèves de mathématiser des situations : ils doivent pouvoir identifier et extraire la structure mathématique inhérente à une situation donnée et se servir des mathématiques pour résoudre le problème, pour analyser, pour interpréter, pour élaborer leurs propres modèles et stratégies et pour développer une argumentation mathématique, y compris des démonstrations et des généralisations.

Ces processus font appel à la pensée critique, à l'analyse et à la réflexion. Les élèves devraient non seulement être à même de résoudre des problèmes, mais aussi de les poser, de communiquer correctement à propos des situations, et de comprendre en profondeur la nature des mathématiques en tant que science.

Ce niveau de compétences, qui est au cœur des mathématiques et de la culture mathématique, est difficile à évaluer. Les questions à choix multiple sont le plus souvent inadaptées. Les questions à réponse ouverte ont un format qui convient mieux à ce type d'épreuve, mais tant la conception des questions que la correction des réponses soulèvent de nombreuses difficultés.

ANNEXE 6 Taxonomie d'objectifs cognitifs de R. Gras

<i>Catégories</i>	<i>Rubriques</i>	<i>Objectifs</i>	<i>Activités attendues</i>
A Connaissance des outils de préhension de l'objet et du fait mathématique	A1	Connaissance de la terminologie et du fait spécifique	Connaître Assembler
	A2	Capacité à agir sur une forme physique du concept ou à évoquer	Bricoler Explorer Observer
	A3	Capacité à lire des cartes, des tableaux, des graphiques	Déchiffrer, Décrire
	A4	Effectuation d'algorithmes simples	Calculer Opérer
B Analyse des faits et transposition	B1	Substitution d'une démarche représentative à une manipulation. Anticipation graphique	Prolonger Induire
	B2	Reconnaissance et usage d'une relation implicite simple où intervient l'objet mathématique connu	Analyser Comparer
	B3	Traduction d'un problème d'un mode dans un autre avec interprétation	Schématiser Traduire Transposer
C Compréhension des relations et des structures	C1	Compréhension du concept, des relations entre objets mathématiques, des structures	Reconnaître Construire
	C2	Compréhension d'un raisonnement mathématique : justification d'un argument	Justifier
	C3	Choix et ordonnancement d'arguments	Déduire
	C4	Application dans des situations familières	Analyser Abstraire Appliquer Interpoler
D Synthèse et créativité	D1	Effectuation et découverte d'algorithmes composites et de nouvelles relations	Structurer
	D2	Constructions de démonstrations et d'exemples personnels	Illustrer Démontrer, Valider Créer Inventer
	D3	Découverte de généralisations	Généraliser Induire Prévoir Extrapoler Reconstituer
	D4	Reconnaissance du modèle et applications dans des situations non routinières	Modéliser Identifier Différencier Classifier Résumer
E Critique et évaluation	E1	Distinction du nécessaire et du suffisant	Formuler des hypothèses Déduire
	E2	Critique de données et de méthodes ou de modèles résolvants	Contrôler Optimiser Prévoir Critiquer Questionner Vérifier
	E3	Critique d'argumentation et construction de contre-exemples	Critiquer Contredire

ANNEXE 7 Typologie de l'activité mathématique (R. Gras)

Complément à la grille de repérage de la complexité cognitive de R. GRAS

A chaque classe d'objectifs R. GRAS associe un certain nombre de verbes d'action.

	Classes d'objectifs opérationnalisables		Verbes d'action permettant l'opérationnalisation
1	HEURISTIQUE	<i>Recouvre tout ce qui est lié aux séquences de recherche, à vocation de découverte par l'élève.</i>	Bricoler - Chercher - Émettre des hypothèses - tâtonner
2	TRADUCTIF	<i>Activités de passage d'un langage dans un autre langage (langue maternelle, dessin, tableau, schéma).</i>	Traduire - Observer et choisir le mot pertinent - Analyser - Schématiser - Représenter - Décrire - Modéliser - Transposer
3	CLASSIFICATOIRE	<i>Activités de classement selon un critère, activités supposant éventuellement une perte d'information en faveur d'une identification classifiante.</i>	Organiser - Classifier - Discerner - Ordonner - Analyser - Synthétiser - Identifier
4	CALCULATOIRE	<i>Activités algorithmiques, portant essentiellement, au niveau de l'enseignement secondaire inférieur, sur les nombres, ce qui ne sera pas toujours le cas ultérieurement.</i>	Dénombrer - Calculer - Appliquer un algorithme
5	LOGIQUE	<i>Activités de type hypothético-déductives. Le développement des qualités de raisonnement y est visé.</i>	Prouver - Convaincre - Rédiger (pour être lu) - Tolérer - Déduire - Résoudre des problèmes
6	TECHNIQUE	<i>Activités où soin, minutie, précision, persévérance sont fortement sollicitées.</i>	Soigner la présentation d'un dessin ou d'un calcul - Se montrer précis, minutieux, méticuleux - Se montrer persévérant et organisé
7	REINVESTISSEMENT	<i>Activités dites d'application où les champs de représentation peuvent être différents : on y passe, en général, d'un modèle au réel où l'on utilise les résultats établis dans le modèle.</i>	Appliquer - Construire un modèle - Illustrer - Faire fonctionner
8	CREATIF	<i>Activités où fonctionne l'imagination, l'aptitude de la pensée divergente à construire un exemple personnel ou une situation différente de celle de l'apprentissage.</i>	Inventer - Créer - Trouver des exemples - Imaginer et construire
9	CRITIQUE	<i>Activités où s'exerce... l'esprit critique, la comparaison d'un résultat par rapport à un référentiel ou un présumé.</i>	Contrôler - Interpréter - Évaluer - Maîtriser la vraisemblance - Critiquer en trouvant des contre-exemples - Remettre en question - Valider - Invalider - Optimiser
10	PREDICTIF	<i>Activités tournées vers l'extérieur de champ perçu et prospecté, activités qui mettent en oeuvre les facultés inductives de l'apprenant.</i>	Estimer (approximativement) - Induire - Prévoir - Conjecturer

ANNEXE 8 Les processus selon PISA

« Program International for Student Assessment » de l'OCDE

(voir § 10 les modifications de formulation proposées)

(le classement selon les processus met l'accent) sur l'aptitude des élèves à analyser, à raisonner et à communiquer efficacement des idées lorsqu'ils posent, formulent ou résolvent des problèmes mathématiques. On distingue trois classes de processus reproduction définitions et calculs relations et intégration en vue de résoudre des problèmes ; « mathématiser », recourir à la pensée mathématique et à la généralisation .

les contenus : PISA met l'accent sur d'importants concepts mathématiques comme les variations et la croissance, ou l'espace et les formes, le hasard, le raisonnement quantitatif, les relations d'incertitude et de dépendance ;

les contextes : Un aspect important de la culture mathématique est de pouvoir utiliser les mathématiques dans des situations très diverses : vie personnelle, vie scolaire, activités sportives ou professionnelles, participation à la vie de la collectivité locale ou de la société en général.

Les processus mathématiques

Les tâches proposées par PISA sont conçues pour mobiliser un ensemble de processus mathématiques d'ordre général, pertinents à tous les niveaux d'enseignement.

1.... La pensée mathématique:

- savoir poser des questions caractéristiques des mathématiques (« Existe-t-il ? », « Si oui, combien ? », « Comment trouve-t-on ? ») ;
- connaître les types de réponses que les mathématiques permettent de donner à de telles questions ;
- savoir distinguer différents types d'énoncés (définitions, théorèmes, conjectures, hypothèses, exemples, assertions conditionnelles)
- comprendre la portée et les limites de concepts mathématiques donnés, et savoir en tenir compte.

2.... Le raisonnement mathématique:

- savoir ce qu'est une démonstration mathématique et en quoi elle diffère d'autres formes de raisonnements mathématiques ;
- et évaluer différents types d'enchaînements d'arguments mathématiques ;
- posséder un certain sens de l'heuristique (« que [ne peut-il [pas] se produire, et pourquoi ? ») et savoir développer une argumentation mathématique.

3.... La modélisation mathématique:

- savoir structurer le domaine ou la situation qui doit être modélisé ;
- « mathématiser » (c'est-à-dire opérer une traduction de la « réalité, » vers la structure mathématique) ;
- « démathématiser » (c'est-à-dire interpréter des modèles mathématiques en termes de «

réalité ») ;

- étudier le modèle (travailler à l'intérieur du domaine mathématique)
- valider le modèle ;
- réfléchir, analyser et se montrer critique à l'égard du modèle et de ses résultats ;
- savoir communiquer à propos du modèle et de ses résultats (y compris au sujet des limites de ces résultats) ;
- savoir maîtriser le suivi et le contrôle du processus de modélisation.

4.... Poser et résoudre des problèmes :

- Poser et formuler des problèmes mathématiques ;
- résoudre différentes sortes de problèmes mathématiques, de diverses manières.

5.... La représentation :

- décoder, interpréter et distinguer différentes formes de représentation d'objets et de situations mathématiques ainsi que les relations entre les diverses représentations ;
- choisir entre différentes formes de représentations et passer de l'une à l'autre en fonction de la situation et du but recherché.

6.... Le langage symbolique et formel :

- savoir décoder et interpréter le langage symbolique et formel et saisir les relations qu'il entretient avec la langue naturelle ;
- opérer la conversion de la langue naturelle vers le langage symbolique et formel,
- manier des énoncés et des expressions contenant symboles et des formules -1
- utiliser des variables, résoudre des équations et faire des calculs.

7. La communication :

- s'exprimer de diverses façons sur des sujets à composante mathématique, tant oralement que par écrit ;
- comprendre des informations orales et écrites sur ce même type de sujets, formulées par autrui.

8.... Les outils et les instruments :

- connaître et pouvoir utiliser les différents outils et instruments (y compris les nouvelles technologies d'information) pouvant contribuer à l'activité mathématique ;
- connaître les limites de ces outils et instruments.

PISA n'utilise pas des items évaluant séparément les capacités ci-dessus. En effet, lorsqu'on fait de « vraies mathématiques », il est habituellement nécessaire de recourir en même temps à de nombreux savoir-faire.

Relations entre les classes de compétences et les processus mathématiques selon PISA

Competencies, level of mathematisation and proficiency

Antoine Bodin - April 2001

Classes de compétences (Niveaux de mathématisation)			Processus			
1	2	3				
			Procédures et calculs	Pensée mathématique	Résoudre et poser des problèmes	Utilisation d'aides et d'outils
			Représentations			
			Mises en relations et intégration			
			Modélisation et interprétation			
			Raisonnement et argumentation			
			Découverte et généralisation			
			Communication			



Processus pas ou peu sollicité par les questions de cette classe



Processus pouvant être sollicité par les questions de cette classe, mais ne déterminant pas la tâche



Processus prioritairement sollicité par les questions de cette classe

Les processus notés verticalement sont transversaux aux processus notés horizontalement et peuvent être mobilisés dans le cadre de chacune des 3 classes de compétences

ANNEXE 9 The Mathematics Subject Classification (MSC) 2000

American Mathematical Society

00- General

01- History and biography [See also the classification number -03 in the other sections]

03- Mathematical logic and foundations

04- This section has been deleted {For set theory see 03Exx}

05- Combinatorics {For finite fields, see 11Txx}

06- Order, lattices, ordered algebraic structures [See also 18B35]

08- General algebraic systems

11- Number theory

12- Field theory and polynomials

13- Commutative rings and algebras

14- Algebraic geometry

15- Linear and multilinear algebra; matrix theory

16- Associative rings and algebras {For the commutative case, see 13-xx}

17- Nonassociative rings and algebras

18- Category theory; homological algebra {For commutative rings see 13Dxx, for associative rings 16Exx, for groups 20Jxx, for topological groups and related structures 57Txx; see also 55Nxx and 55Uxx for algebraic topology}

19- K -theory [See also 16E20, 18F25]

20- Group theory and generalizations

22- Topological groups, Lie groups {For transformation groups, see 54H15, 57Sxx, 58-xx. For abstract harmonic analysis, see 43-xx}

26- Real functions [See also 54C30]

28- Measure and integration {For analysis on manifolds, see 58-xx}

30- Functions of a complex variable {For analysis on manifolds, see 58-xx}

31- Potential theory {For probabilistic potential theory, see 60J45}

32- Several complex variables and analytic spaces {For infinite-dimensional holomorphy, see 46G20, 58B12}

33- Special functions (33-xx deals with the properties of functions as functions) {For orthogonal functions, see 42Cxx; for aspects of combinatorics, see 05Axx; for number-theoretic aspects, see 11-xx; for representation theory, see 22Exx}

34- Ordinary differential equations

35- Partial differential equations

37- Dynamical systems and ergodic theory [See also 26A18, 28Dxx, 34Cxx, 34Dxx, 35Bxx, 46Lxx, 58Jxx, 70-xx]

39- Difference and functional equations

40- Sequences, series, summability

- 41- Approximations and expansions {For all approximation theory in the complex domain, see 30Exx, 30E05 and 30E10; for all trigonometric approximation and interpolation, see 42Axx, 42A10 and 42A15; for numerical approximation, see 65Dxx}
- 42- Fourier analysis
- 43- Abstract harmonic analysis {For other analysis on topological and Lie groups, see 22Exx}
- 44- Integral transforms, operational calculus {For fractional derivatives and integrals, see 26A33. For Fourier transforms, see 42A38, 42B10. For integral transforms in distribution spaces, see 46F12. For numerical methods, see 65R10}
- 45- Integral equations
- 46- Functional analysis {For manifolds modeled on topological linear spaces, see 57N20, 58Bxx}
- 47- Operator theory
- 49- Calculus of variations and optimal control; optimization [See also 34H05, 34K35, 65Kxx, 90Cxx, 93-xx]
- 51- Geometry {For algebraic geometry, see 14-xx}
- 52- Convex and discrete geometry
- 53- Differential geometry {For differential topology, see 57Rxx. For foundational questions of differentiable manifolds, see 58Axx}
- 54- General topology {For the topology of manifolds of all dimensions, see 57Nxx}
- 55- Algebraic topology
- 57- Manifolds and cell complexes {For complex manifolds, see 32Qxx}
- 58- Global analysis, analysis on manifolds [See also 32Cxx, 32Fxx, 32Wxx, 46-xx, 47Hxx, 53Cxx] {For geometric integration theory, see 49Q15}
- 60- Probability theory and stochastic processes {For additional applications, see 11Kxx, 62-xx, 90-xx, 91-xx, 92-xx, 93-xx, 94-xx}
- 62- Statistics
- 65- Numerical analysis
- 68- Computer science {For papers involving machine computations and programs in a specific mathematical area, see Section -04 in that area}
- 70- Mechanics of particles and systems {For relativistic mechanics, see 83A05 and 83C10; for statistical mechanics, see 82-xx}
- 73- This section has been deleted {For mechanics of solids, see 74-xx}
- 74- Mechanics of deformable solids
- 76- Fluid mechanics {For general continuum mechanics, see 74Axx, or other parts of 74-xx}
- 78- Optics, electromagnetic theory {For quantum optics, see 81V80}
- 80- Classical thermodynamics, heat transfer {For thermodynamics of solids, see 74A15}
- 81- Quantum theory
- 82- Statistical mechanics, structure of matter
- 83- Relativity and gravitational theory
- 85- Astronomy and astrophysics {For celestial mechanics, see 70F15}
- 86- Geophysics [See also 76U05, 76V05]
- 90- Operations research, mathematical programming
- 91- Game theory, economics, social and behavioral sciences

- 92- Biology and other natural sciences
- 93- Systems theory; control {For optimal control, see 49-xx}
- 94- Information and communication, circuits
- 97- Mathematics education