Le calcul figuré de l'ancien âge babylonien et de la Chine des Han

Olivier Keller

Exposé à l'Université Ouverte de Lyon (janvier 2009)

présenté en trois fichiers

Fichier 3 : Chine des Han (-206 à 220)

Le théorème base-hauteur et exercices d'application

Source : *Jiuzhang suanshu* (Procédures mathématiques en neuf chapitres) avec les commentaires de Liu Hui (3^{e} siècle de notre ère). Les premiers textes mathématiques chinois datent de la dynastie des Han, qui succède au premier véritable empereur de Chine, le célèbre Ying Zheng de laa dynastie Qin, dont on a découvert la tombe fastueuse en 1974. Avant lui, du 5^{e} au 3^{e} siècles avant notre ère, la Chine a connu la période des dite des Royaumes Combattants, exceptionnellement riche sur le plan intellectuel, avec la floraison des « cent écoles ». Ce fut le temps, entre autres, de Kongzi (Confucius), de Mozi, des taoïstes Laozi (Lao tseu) et Zhuangzi (Tchouang tseu), et du confucéen Mengzi (Mencius).

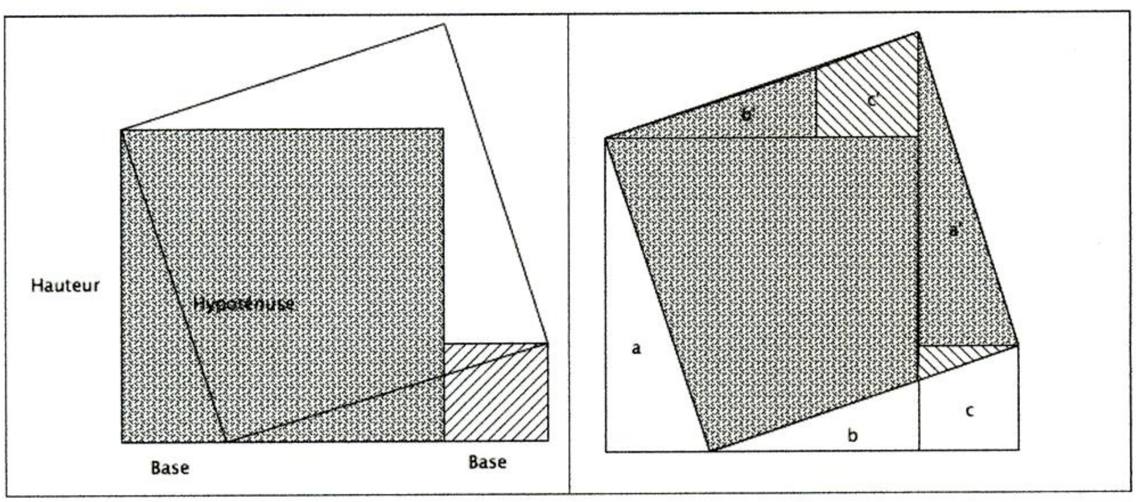
Les *Neuf chapitres*, sont *le* grand classique des mathématiques en Chine, maintes fois commenté, texte « sacré » même au delà du 17^{e} siècle, époque des premiers contacts avec les mathématiques européennes. Nous nous intéresserons au dernier des *Neuf chapitres*, intitulé *Gou Gu*, ce qui signifie *base hauteur*. Le texte propose une série de problèmes à résoudre à l'aide du théorème de l'hypoténuse, et donne pour chacun d'entre eux l'algorithme de résolution mais sans aucune espèce de justification, comme dans les tablettes babyloniennes ; dans son commentaire, en revanche, Liu Hui justifie explicitement chaque algorithme par des figurations. **Avec le chapitre *Gou Gu*, nous avons donc un ensemble de problèmes que nous résoudrions comme des équations du second degré, et dont nous sommes sûrs, grâce à Liu Hui, qu'ils furent résolus au moyen de calculs figurés.**

Le théorème de la base-hauteur est énoncé ainsi dans les *Neuf chapitres* :

> « Base et hauteur étant multipliées par elles-mêmes, on somme et on divise ceci par extraction de la racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse ».

et Liu Hui ajoute, dans son commentaire :

> "La base multipliée par elle-même fait un carré vermillon, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu-vert, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui rentre se compensent l'un l'autre, et que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, sur la base du fait que l'on garde ceux qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de l'hypoténuse."



Hachuré : carré de la base, vermillon.
Grisé : carré de la hauteur, bleu vert.

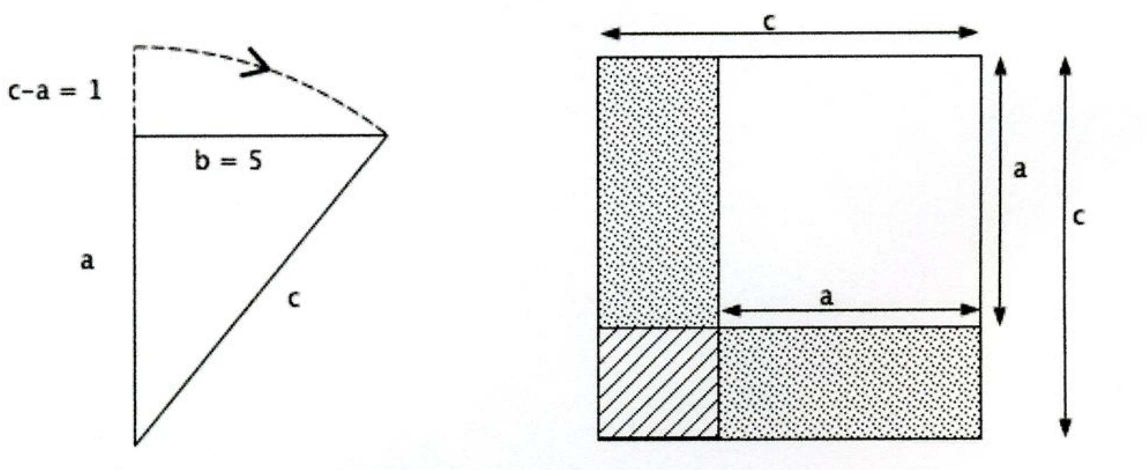
On fait « rentrer » « ce qui sort » : a passe en a', b en b' et c en c'.

On notera que, comme dans les autres civilisations anciennes, il n'est jamais énoncé (et encore moins démontré) de réciproque (c-à-d : si carré d'un côté plus carré d'un autre côté égale carré du troisième côté, alors les deux premiers côtés sont perpendiculaires) ; la réciproque est utilisée en Inde védique, mais c'est le seul cas à ma connaissance.

Exercices d'application

Problème 9-6 : "Supposons que l'on ait un étang carré de 1 *zhang* de côté, au centre duquel pousse un roseau qui dépasse de 1 *chi* le niveau de l'eau. Quand on tire le roseau vers la rive, il arrive juste au bord. On demande combien valent respectivement la profondeur de l'eau et la longueur du roseau." (1 *zhang* = 10 *chi* ; calcul ci-dessous en *chi*)

En appelant b (= 5) le demi-côté de l'étang, a sa profondeur et c (= a+1) la longeur du roseau, nous écririons l'équation $(a+(c-a))^2-a^2 = b^2$, d'où $2a(c-a)+(c-a)^2 = b^2$, et finalement : $a = \frac{b^2-(c-a)^2}{2(c-a)}$. Cette formule décrit exactement la procédure donnée dans le texte chinois : multiplier par elle-même la moitié du côté de l'étang (b^2), en soustraire ce qui dépasse de l'eau multiplié par lui-même ($(c-a)^2$), diviser par le double de ce qui dépasse de l'eau ($2(c-a)$), ce qui donne la profondeur de l'eau (a). On trouve a = 12 *chi*, donc le roseau mesure 13 *chi*. En accord avec le commentaire de Liu Hui, la formule se lit directement sur la figure ci-dessous.



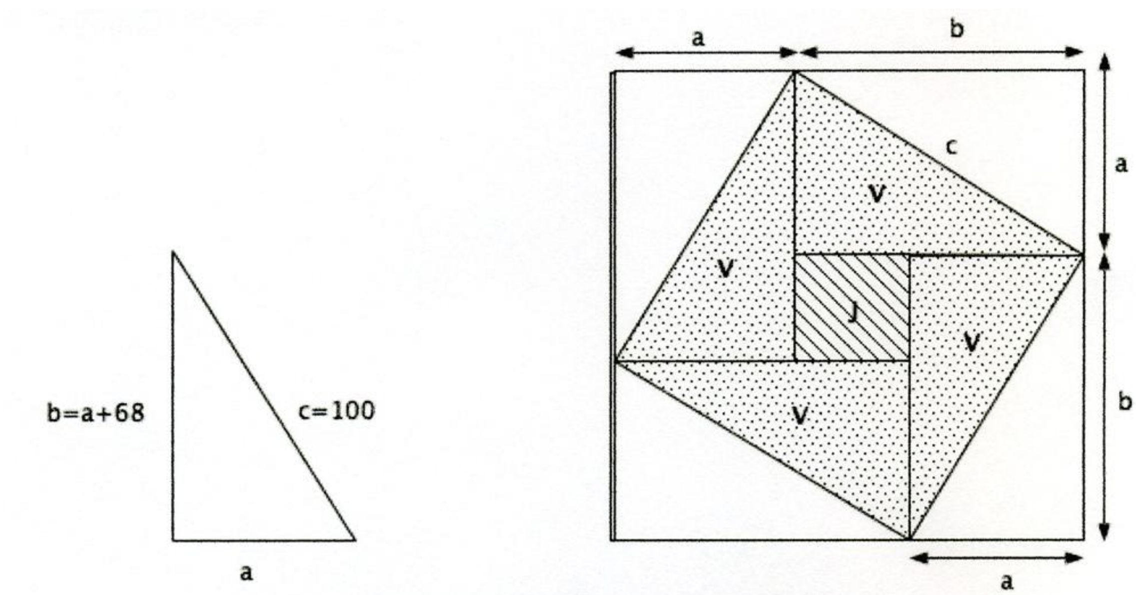
A gauche, figure du roseau dépassant de 1 *chi* la surface de l'étang.

A droite, figure de la procédure : le gnomon (rectangles et carré grisés) a pour aire c^2-a^2, qui est aussi égale à b^2 d'après la propriété de l'hypothénuse. Si à ce gnomon on enlève $(c-a)^2$ (carré gris foncé), on obtient deux rectangles de longueur a et de largeur c-a (rectangles gris clair) ; en d'autres termes,

$b^2-(c-a)^2 = 2a(c-a)$, d'où finalement $a = \frac{b^2-(c-a)^2}{2(c-a)}$.

Problème 9-11 : “Supposons qu’on ait une porte à un battant dont la hauteur dépasse la largeur de 6 *chi* 8 *cun* et dont deux coins [opposés] sont à une distance exactement 1 *zhang* l’un de l’autre. On demande combien valent respectivement la hauteur et la largeur de la porte.” (1 *zhang* = 10 *chi* = 100 *cun* ; calcul ci-dessous en *cun*)

Soient a la largeur de la porte, b (= a+68) sa hauteur et c (= 100) sa diagonale (fig.IX-5). En algèbre, on poserait $a^2+(a+(b-a))^2 = c^2$, où c et b-a sont respectivement égaux à 100 et 68. L’équation se transforme en $a^2+a(b-a)+\frac{1}{2}\left((b-a)^2-c^2\right) = 0$, dont la solution positive est $a = \sqrt{\frac{1}{2}\left[c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]}-\frac{b-a}{2}$. C’est cette formule peu sympathique que décrivent exactement les phrases du texte donnant la procédure de résolution ; grâce au commentaire “en couleurs” de Liu Hui, on peut reconstituer la figure correspondante comme ci-dessous.



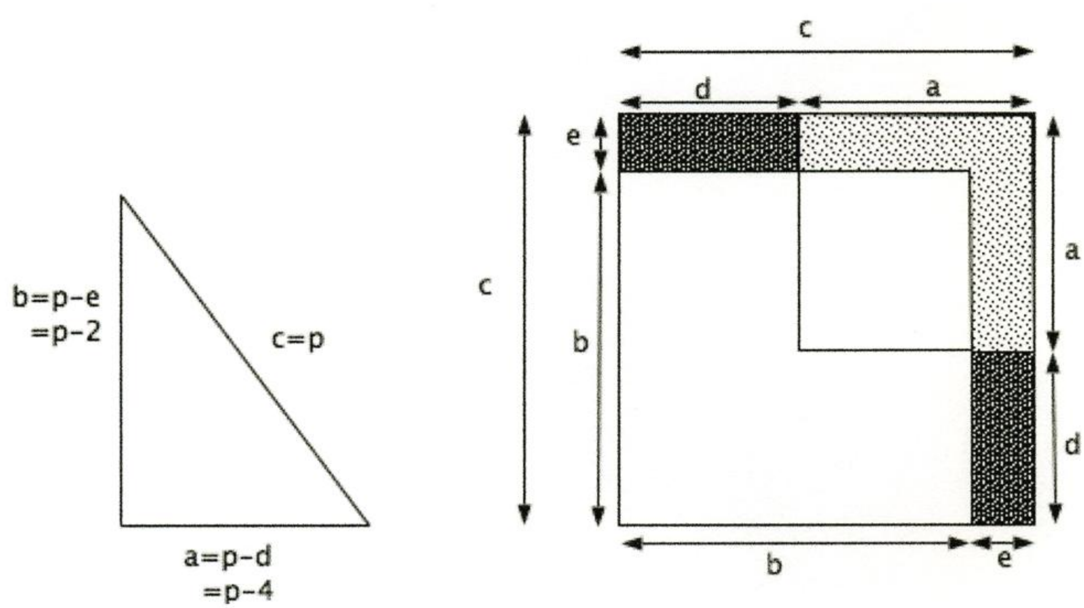
A gauche, la porte de largeur a, de hauteur b et de diagonale c.

A droite, figure de la procédure ; les triangles marqués V sont vermillons et le carré de côté b-a marqué J est jaune.

On a $c^2 = 4V+J$ et $2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}J$, donc $\frac{1}{2}(c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2) = 2V+\frac{1}{4}J$. Comme le grand carré de côté a+b fait 8V+J, $2V+\frac{1}{4}J$ en est le quart, et il a donc pour côté $\frac{a+b}{2}$; autrement dit, $\sqrt{\frac{1}{2}\left[c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right]} = \frac{a+b}{2}$. En retranchant $\frac{b-a}{2}$, on obtient a, et en ajoutant $\frac{b-a}{2}$, on obtient b.

Problème 9-24 : “Supposons qu’on ait une porte dont on ne connaît ni la hauteur ni la largeur, et une perche dont on ne connaît pas la longueur. Transversalement, il s’en faut de 4 *chi* pour que [la perche] ne puisse sortir [par la porte], longitudinalement il s’en faut de 2 *chi*, et, en oblique, elle sort juste. On demande combien valent respectivement la hauteur, la largeur et l’oblique de la porte.”

Soit p la longueur de la perche, d (= 4) ce qui manque transversalement, e (= 2) ce qui manque longitudinalement ; la diagonale de la porte est p, sa largeur p-d et sa hauteur p-e (fig.IX-7). On a donc $p^2 = (p-d)^2+(p-e)^2$, ce qui conduit à l’équation $p^2-2p(d+e)+d^2+e^2 = 0$. Avec les formules classiques, on trouve $p = d+e+\sqrt{2de}$, donc la largeur de la porte est $p-d = e+\sqrt{2de}$ et on trouve 6. La procédure du texte exprime exactement la formule $e+\sqrt{2de}$, et elle peut se lire sur la figure ci-dessous, ce qui termine en beauté ce choix d’exemples avec une figuration particulièrement simple et élégante.



A gauche, les dimensions de la porte.

A droite, figure de la procédure. c^2-b^2 est l’aire gnomon des parties grisées ; d’après la propriété de l’hypoténuse, elle est égale à l’aire du carré de côté a. En enlevant la partie commune (le gnomon gris clair) à ces deux figures, les parties restantes (le carré blanc d’une part, les deux rectangles gris foncé d’autre part) sont égales ; autrement dit, $(a-e)^2 = 2de$, et par conséquent $a = e+\sqrt{2de}$.

Pour en savoir plus

Source de l'exposé

Keller, Olivier. 2006. *La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations*. Paris: Vuibert. Chapitres 8 et 9.

Le contexte babylonien

Huot, Jean-Louis. 2004. *Une archéologie des peuples du Proche-Orient. Tome 1: Des premiers villageois aux peuples des cités-Etats. X°-III° millénaires avant J.-C.*

Tome 2: Des hommes des Palais aux sujets de premiers empires. Paris: Errance.

Textes mythologiques et littéraires mésopotamiens

Bottéro, Jean et Samuel Noah Kramer (1989. *Lorsque les dieux faisaient l'homme. Mythologie mésopotamienne*. Paris : Gallimard.

Introduction aux mathématiques antiques

Neugebauer, Otto. 1990 (1957). *Les sciences exactes dans l'antiquité*. Arles: Actes sud.

Textes mathématiques babyloniens

Bruins, E.M., et M. Rutten. 1961. *Textes mathématiques de Suse*. Paris: Librairie Orientaliste Paul Geuthner.

Caveing, Maurice. 1994. *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Egypte anciennes*. Lille: Presses universitaires de Lille.

Høyrup, Jens. 2002. *Lengs, Widths, Surfaces. A portait of old babylonian algebra and its kin*. New York: Springer.

Nissen, Hans J., Peter Damerow, and Robert K. Englund. 1993. *Archaic Bookkeeping. Early Writing and Techniques of Economic Administration in the Ancient Near East*. Translated by P. Larsen. Chicago: The University of Chicago Press.

Robson, Eleanor. 1999. *Mesopotamian Mathematics. 2100-1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education*. Oxford: Clarendon Press.

Thureau-Dangin, F. 1932. *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*. Paris: Paul Geuthner.

———. 1938. *Textes mathématiques babyloniens*. Leiden: E.J. Brill.

Mathématiques chinoises

Chemla, Karine, et Shuchun Guo. 2004. *Les Neuf Chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris: Dunod.

Martzloff, Jean Claude. 1988. *Histoire des mathématiques chinoises*. Paris: Masson.

Needham, Joseph. 1959. *Science and Civilisation in China. Vol.3: Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Cambridge: Cambridge University Press.

———. 1962. *Science and Civilisation in China. Vol. 2: History of Scientific Thought*. Cambridge: Cambridge University Press.

-oOo-