# Le calcul figuré de l'ancien âge babylonien et de la Chine des Han

Olivier Keller

Exposé à l'Université Ouverte de Lyon (janvier 2009)

présenté en trois fichiers.

**SOMMAIRE**

Fichier 1 :



Fichier 2 :



Fichier 3 :



## -I-

## Contexte babylonien

L'ancien âge babylonien, ou époque paléo-babylonienne, n'est évidemment pas choisi par hasard. De courte durée à l'échelle historique (-1760 à -1595), la période fut néanmoins extrêmement riche en créations intellectuelles, mathématiques notamment : le corpus que nous allons présenter date tout entier de ce moment-là, et il n'eut aucune postérité avant la période dite Séleucide (à partir de -304), de Seleucos Nicator, personnage à qui échut l'Asie Mineure après le partage sanglant de l'empire d'Alexandre le Grand, tandis que l'Egypte tombait aux mains des Ptolémées.

Chronologie des évènements régionaux :

- à partir de -9000 : naissance de l'architecture, de la céramique et des premières agglomérations. Voir le deuxième exposé de ce cycle.

- à partir de la fin du quatrième millénaire, naissance de véritables **villes** parmi lesquelles Uruk, qui a donné son nom à cette période. C'est d'Uruk que proviennent les plus anciennes tablettes d'argile (au nombre de 5000 !) avec une véritable **écriture** (vers -3200), donc contemporaine de la plus ancienne écriture égyptienne reconnue à Abydos. Le phénomène se répand à l'est vers l'Iran, à l'ouest vers la Syrie et à partir du troisième millénaire, apparaissent des sortes de principautés, ou "cités-états" fameuses : Mari, Terqa, Ebla, Ur, Nippur, Lagash, Suse entre autres.

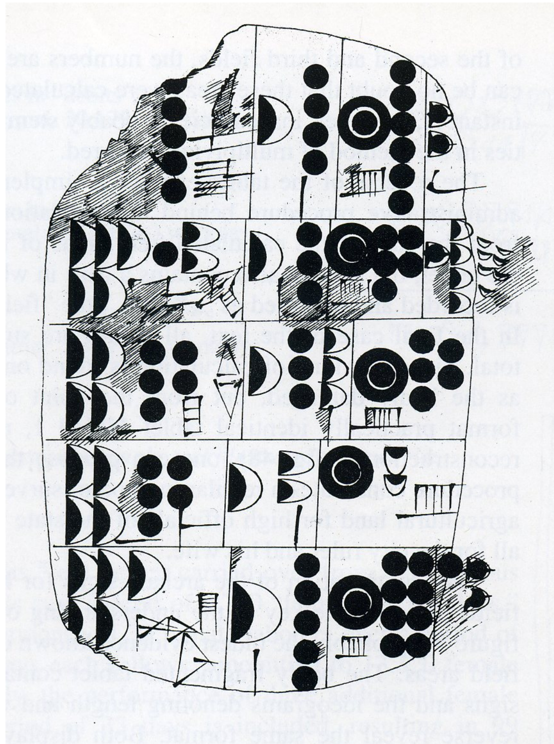
- au cours du troisième millénaire, **passage de l'écriture archaïque à l'écriture cunéiforme**.

- fin du troisième millénaire : empire d'Agadé ou Akkad (-2300 à -2100 environ) dirigé par Sargon et qui s'étend du golfe à la méditerranée ; les cités dominées se révoltent, l'empire disparaît et une autre dynastie, dite d'Ur III (-2100 à -2000), crée un empire moins étendu que le précédent mais incluant tout de même une grande partie de la Mésopotamie et l'Elam (en Iran actuel). Pendant tout ce temps, l'écrit s'est considérablement développé sur des milliers de **tablettes administratives, contractuelles, littéraires et autres** ; **apparition du système sexagésimal de position**. Des tombes royales gigantesques sont connues, dont les fameuses tombes royales d'Ur (vers -2500), qui ont révélé que rois et reines se faisaient accompagner dans l'au-delà par des dizaines de familiers, musiciens, soldats, tous sacrifiés à cette occasion. C'est aussi l'époque de la construction des célèbres **ziggurats** (étymologie "la pointe", ou "construire en hauteur"), superposition de terrasses de taille décroissante. L'empire d'Ur III est vaincu par la révolte des Elamites en -2004.

- début du deuxième millénaire : de nouvelles populations, dites Amorites, s'installent en Mésopotamie et fondent des royaumes rivaux : celui de Babylone, dirigé par Hammurabi de -1792 à -1750, vainc ses rivaux et finit par contrôler toute la Mésopotamie jusque vers -1600. Nous voici parvenus à notre ancien âge babylonien ; il fut relativement éphémère, mais de -1600 à -1000, "Babylone reste la capitale intellectuelle du pays, et continue d'en répandre partout œuvres et trouvailles" (Bottéro).

## -II-
## Antécédents

Le tracé, l'arpentage, la mesure et la comptabilité sont évidemment une part essentielle de l'activité scribale dès que celle-ci apparaît, sans doute en même temps que les premières cités-états du troisième millénaire. Les premiers témoignages écrits remontent à l'époque d'Uruk, à la fin du quatrième millénaire, avec des tablettes comptables et des calculs d'aires de rectangles ; dans cette écriture achaïque, le pictogramme de la longueur est un trait horizontal, celui de la largeur un trait vertical, celui de l'aire quelques (cinq en général) traits verticaux encadrés par deux traits horizontaux.



**Tablette de mesures de cinq champs**. (Nissen, 1993)
Ecriture archaïque. Mésopotamie du nord, vers -3000.
Colonne de gauche : longueur, désignée par un trait horizontal.
Colonne du milieu : largeur, désignée par un trait vertical ;
Colonne de droite : aire, désignée par cinq ou six traits verticaux et deux traits horizontaux.

La notation des nombres, très compliquée (le système sexagésimal de position n'apparaît qu'à la fin du troisième millénaire), conduit à des erreurs de calcul. Si l'on en croit des tablettes datées de -2600, les quadrilatères semblent être divisés en deux catégories : ceux qui ont deux "longueurs égales" et deux "largeurs égales", auquel cas leur aire est le produit de la longueur par la largeur ; les autres ont des longueurs ou des largeurs inégales, et dans ce cas on fait le produit de la moyenne arithmétique des premières par la moyenne arithmétique des secondes, formule répandue un peu partout dans le monde à des époques très variées. Lorsqu'il s'agit de terrains réels aux contours quelconques, les mesures ne se font pas du tout, comme on aurait pu l'imaginer, au moyen de quadrillages réguliers ; les arpenteurs commencent au contraire par y relever les plus grands rectangles possibles inscriptibles dans le contour, et ce qui reste sur les bords est assimilé à des triangles rectangles ou à des trapèzes.

Dans le domaine arithmétique, on a des tablettes d'exercices de divisions vers -2600, ainsi que des tables de carrés ; à l'époque d'Ur III, un pas décisif est franchi avec l'invention du système sexagésimal de position.

Le caractère pratique de cette documentation est frappant ; rien n'annonce, semble-t-il, les spéculations du calcul figuré typiques des mathématiques de l'ancien âge babylonien. On peut dire que le décor est planté, puisque le calcul figuré s'exprimera en longueur, largeur, rectangle, carré etc., mais le scénario n'existe pas encore.

## -III-
## Exemples de problèmes du second degré résolus par des figurations

Les tablettes mathématiques babyloniennes sont de plusieurs types :

- tables de calcul (multiplication, carrés, inverses etc.)
- tables de “coefficients” géométriques (aire du cercle, aires de polygones, hauteur d’un triangle équilatéral, paramètres de figures plus compliquées)
- listes de problèmes avec solutions, listes de problèmes sans solution
- certaines tablettes ne comportent qu’une ou deux figures avec des indications de longueurs, comme par exemple un carré et ses diagonales avec la fameuse approximation $1\ 24'\ 51''\ 10'''$ pour notre $\sqrt{2}$.

Nous nous intéresserons aux tablettes de problèmes qui sont en grande partie des problèmes « du second degré » ; **ils sont remarquables parce qu’ils représentent une pure spéculation (pas d’application pratique repérée), et parce qu’ils sont résolus comme si les scribes appliquaient nos formules algébriques bien connues à une époque où il ne pouvait en être question. Mon hypothèse est qu’il s’agissait de *calcul figuré*, c’est-à-dire de calculs guidés par des décompositions et recompositions de figures planes**. Arguments :

- une tablette (TMS 9, voir plus loin fichier 2) s’y réfère explicitement. C’est la seule à ma connaissance, il est vrai !
- la figuration des calculs rend compte simplement de tous les problèmes.
- le calcul figuré est explicite dans d’autres corpus de contenu comparable : Chine antique (voir §VI), tous débuts de l’algèbre arabe.
- il existe des arguments de type linguistique (Høyrup 2002)

La notation des nombres est sexagésimale, et nous la transcrirons de la façon habituelle. Par exemple, 30’ signifie ½, 45’ signifie ¾, 1 signifie 1, 21` 40 signifie 21×60+40.

Nous donnons chaque fois un tableau comprenant une traduction du problème avec en face une explication en langage actuel, puis une figure qui permet de comprendre la suite des opérations indiquées par le scribe.

Tablette BM 13901 (British Museum)

*BM 13901 problème n°1*

| Texte | Explication |
|---|---|
| J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45´. | Equation $x^2+x = 45'$. Il faut comprendre : j'ai additionné un carré de côté x et un rectangle de côtés 1 et x. Le calcul suit le **schéma 1**, figuration de notre identité $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$, avec a = 1 : |
| Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30´.<br>Tu croiseras 30´ et 30´ : 15´.<br>Tu ajouteras 15´ à 45´ : 1. C'est le carré de 1. | Diviser en deux la largeur 1 du rectangle (1×x) : 30´.<br>Multiplier 30' et 30'.<br>Si au rectangle x×(x+1), préalablement transformé en « gnomon », différence des carrés de côtés respectifs (x+1/2) et ½, on ajoute "au coin" un carré de côté 30´, on obtient un carré d'aire 45´+30´×30´ = 1 et de côté x+30´. |
| Tu soustrairas 30´, que tu as croisé, de 1 : 30´, le côté du carré. | Donc x+30′ = √1 = 1, d'où x = 1-30′ = 30′. |

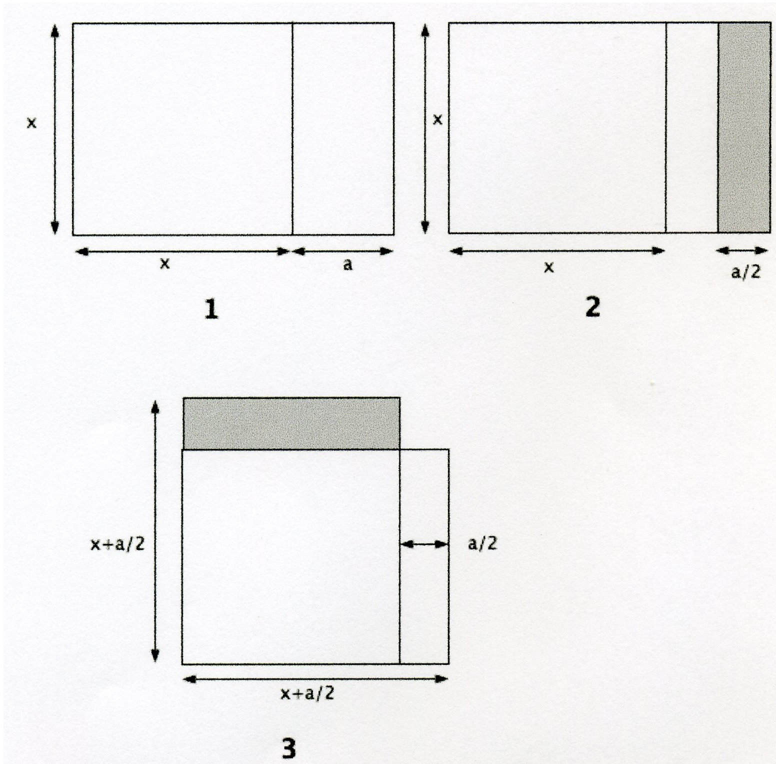



**Schéma 1**. Identité $x^2+ax = (x+\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$, par transformation du rectangle de côtés x et x+a en un gnomon, différence des carrés de côtés respectifs $x+\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$. Il suffit pour cela de déplacer le rectangle grisé de côtés x et $\frac{a}{2}$.

*BM 13901problème n°2 :*

| **Texte** | **Explication** |
|---|---|
| J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré : 14` 30. | Equation $x^2$-x = 14` 30. Il faut comprendre : j'ai soustrait un rectangle de côtés 1 et x d'un carré de côté x. Cela donne un rectangle x×(x-1). La résolution suit le **schéma 2**, figuration de notre identité $x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$. |
| Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30´. | On divise en deux la largeur 1 du rectangle 1×(x-1) : 30´. |
| Tu croiseras 30´ et 30´ : 15´. Tu ajouteras à 14` 30 : 14` 30 15´. | Si au rectangle x×(x-1), préalablement transformé en gnomon, on ajoute "au coin" un carré de côté 30´, on obtient un carré d'aire 14` 30+30´×30´ = 14` 30 15´ et de côté x-30´. |
| C'est le carré de 29 30´.Tu ajouteras 30´, que tu as croisé, à 29 30´ : 30, le côté du carré. | Donc x-30′ = √(14` 30 15′) = 29 30′ (lu dans une table).<br>D'où x = 29 30′+30′ = 30 |

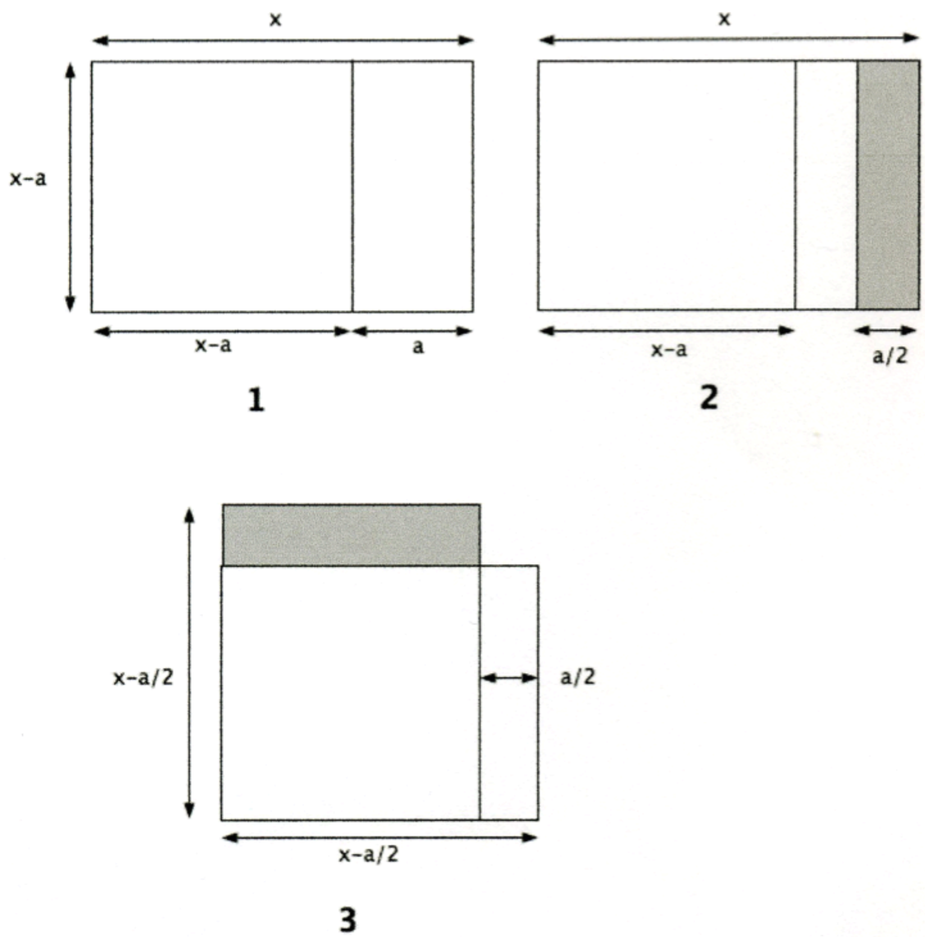



**Schéma 2.** Identité $x^2$-ax = $(x-\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$, par transformation du rectangle de côtés x et x-a en un gnomon, différence des carrés de côtés respectifs x-$\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$. Il suffit pour cela de déplacer le rectangle grisé de côtés x-a et $\frac{a}{2}$.

*BM 13901 problème n° 9*

| Texte | Explication |
|---|---|
| J'ai additionné la surface de mes deux carrés : 21` 40. Le côté de l'un excède le côté de l'autre de 10. | Equation ($x^2+y^2$ = 21` 40 ; x-y = 10). La résolution suit le **schéma 3**, figuration de notre identité $\frac{x^2+y^2}{2} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. |
| Tu fractionneras en deux 21` 40 : tu inscriras 10` 50. Tu fractionneras en deux 10 : 5. Tu croiseras 5 et 5 : 25. | $\frac{x^2+y^2}{2}$ = 10` 50 ; $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 25$ |
| Tu soustrairas de 10` 50 : 10` 25. C'est le carré de 25. Tu inscriras 25 deux fois. | $\frac{x^2+y^2}{2} - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ = 10` 25 = $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, donc $\frac{x+y}{2} = 25$. |
| Tu ajouteras 5, que tu as croisé, au premier 25 : 30, le côté du premier carré. Tu soustrairas 5 du second 25 : 20, le côté du second carré. | On connaît maintenant la demi-somme et la demi-différence des côtés, on en déduit les côtés : demi-somme+demi-différence = le plus grand, demi-somme – demi-différence = le plus petit. |

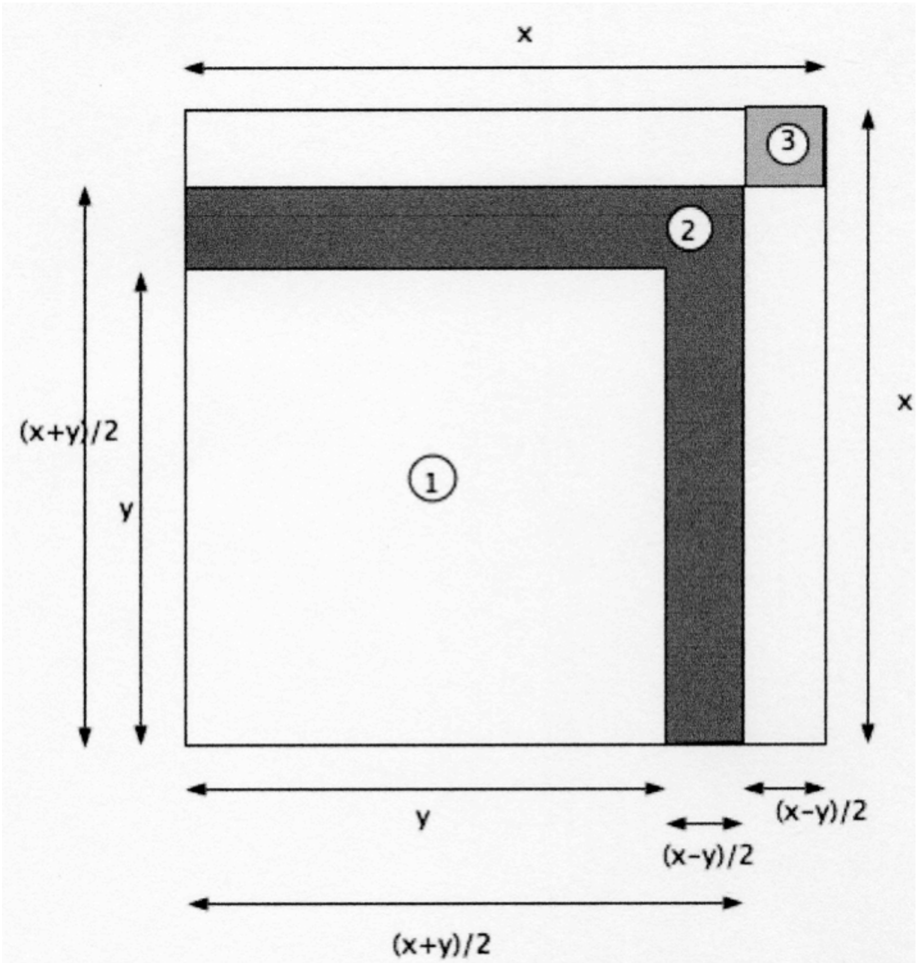



**Schéma 3.** Identité $\frac{x^2+y^2}{2}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. La partie grisée ② + ③ est la demi-différence entre les carrés $x^2$ et $y^2$. Donc ① + ② + ③, égal au petit carré ($y^2$) plus la demi-différence entre le petit et le grand carré, est aussi égal à la demi-somme de ces deux carrés $\frac{x^2+y^2}{2}$. Comme d'autre part, ① + ② = $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ et ③ = $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, on a bien l'identité annoncée.