UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Les probabilités en Troisième et en Seconde
Continuité des apprentissages

Yves DUCEL
IREM–Université de Franche-Comté

Document support

Exposé APMEP, Caen, 06 avril 2011

Document 1

Méthodologie d'une activité sur l'aléatoire

Quatre étapes à baliser, dans la mesure du possible, dans toute activité sur l'aléatoire :
- Préciser de quoi on parle (***l'expérience aléatoire***).
- Préciser sur quoi on travaille (***la famille des événements***).
- Préciser avec quoi on travaille (***le choix de la probabilité***).
- Mettre en œuvre les raisonnements et les calculs nécessaires au travail demandé (***le calcul des probabilités***).

Bien sûr, suivant la place de l'activité proposée dans la progression pédagogique et suivant aussi l'objectif visé par l'enseignant, certaines de ces étapes seront plus ou moins développées ou exploitées :

Étape 1 : *L'expérience aléatoire*

Cette étape doit permettre à l'élève :
- de se familiariser avec la situation réelle aléatoire étudiée,
- d'énoncer précisément les conditions de l'expérience aléatoire,
- d'identifier toutes les issues de l'expérience et de convenir d'une manière de les noter.

Elle doit se conclure par la rédaction d'un court texte (*le protocole*) décrivant les conditions de l'expérience aléatoire, la liste de toutes les issues possibles et les notations adoptées.

Étape 2 : *La famille des événements*

Cette étape a pour objectif d'approfondir la compréhension de l'expérience aléatoire et sa description, en s'intéressant aux événements remarquables attachés à cette expérience. La sélection de ces événements est motivée par le contexte de la situation étudiée.

Cette étape doit notamment permettre à l'élève :
- d'imaginer des événements en relation avec l'expérience aléatoire telle qu'elle a été décrite,
- de repérer et expliciter les événements qui font partie des données connues de l'exercice, d'identifier les issues qui réalisent ces événements en référence à la liste établie dans l'étape précédente,
- de repérer et d'expliciter les événements qui sont sous-jacents aux questions posées.
- de mettre en évidence des relations entre ces événements, notamment distinguer les événements élémentaires, incompatibles, contraires.
- de convenir d'une notation pour les événements qui seront utilisés.

Les étapes 3 et 4 qui suivent sont souvent menées en parallèle au cours de l'activité car elles peuvent être en interaction. Mais il convient, pour la bonne compréhension du processus de modélisation, de bien les distinguer.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Étape 3 : *Le choix de la probabilité*

À partir des données explicites de l'exercice, ou de considérations sur les conditions de l'expérience aléatoire, cette étape doit permettre à l'élève, en explicitant les raisons de son choix, d'affecter une probabilité aux événements énoncés précédemment (en général il s'agit d'événements élémentaires).

Suivant les conditions de la situation étudiée, pour affecter une probabilité à chaque événement élémentaire, on dispose en gros de deux principes qui ont tous les deux leurs propres limites, même si le principe statistique a un domaine d'application plus général que celui du principe de raison insuffisante.
Voici ces deux principes :

- ***Principe statistique*** : On affecte comme valeur à la probabilité d'un événement A la fréquence de réalisation de l'événement A observée dans un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

- ***Principe (de Laplace) de la raison insuffisante*** : Si de façon valable, dans une expérience aléatoire à nombre fini n d'issues, je n'ai pas de raison de penser qu'une issue est privilégiée par rapport à une autre, j'affecte la même valeur p à la probabilité de chaque événement élémentaire. Dans ce cas, nécessairement $p=1/n$.

Étape 4 : *Le calcul des probabilités*

Cette étape permet à l'élève de calculer les probabilités d'autres événements, à partir des probabilités introduites auparavant et des règles élémentaires de calcul sur les probabilités.
En particulier pour la classe de troisième :

- *La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.*
- *La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.*

Et pour la classe de Seconde :

- *Si A et B sont deux événements, alors P(A ou B)+P(A et B)=P(A)+P(B).*

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Document 2

Choix d'un modèle probabiliste

Troisième : Activité d'introduction des probabilités (la bouteille)

Objectifs

- Introduction du vocabulaire : expérience aléatoire, issue, événement, probabilité d'un événement,
- Sensibilisation à la démarche de mathématisation d'une situation aléatoire,
- Réflexion sur le rôle du hasard et ses conséquences, sensibilisation au risque d'une décision dans un environnement incertain,
- Utilisation des pourcentages, sensibilisation à la variation importante de la fréquence dans le cas d'un faible tirage, comparaison avec un grand tirage. Matériel jetons de couleurs ?
- Calcul de fréquences. Remarques sur les fréquences : somme égale à 1, fréquence toujours entre 0 et 1. Interprétation en termes de "chance".
- Propriétés des probabilités en comparaison de celles de fréquences. Énoncé des deux règles : *la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1* et *la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.*

Situation : *Prendre des bouteilles opaques contenant des billes identiques de trois couleurs différentes. Par exemple 9 billes bleues, 5 billes vertes et 2 billes blanches, Toutes les bouteilles ont le même contenu. Travail par groupes. Une bouteille par groupe.*

Intérêt : on ne peut pas avoir une démarche du type équiprobabilité. Nécessité d'une approche statistique donc plusieurs modèles possibles déduits de l'observation. Nécessité de faire un choix, de prendre une décision.

Phase 1 : *Quelles informations peut-on avoir sur le contenu de la bouteille* ?

Mettre en évidence qu'il y a des informations certaines, par exemple "*Il y a au moins une bille rouge, parce que je l'ai vu*" et des informations de nature incertaine, par exemple " *Il y a plusieurs billes rouges*". Travail de logique sur "au moins" ?

Pourquoi y a t-il une incertitude ? Intervention du hasard. La bille qui apparaît à chaque fois apparaît au hasard.

Le professeur sait ce qu'il a mis dans la bouteille, les élèves ne le savent pas, question : *est-ce que cela change quelque chose sur la prévision de la bille qu'on va voir apparaître ?*

Réflexion sur ce qui provoque le hasard. Comment savoir si une situation relève du hasard ? Mettre en évidence des résultats différents même si l'expérience est répéter à l'identique. Insister sur la nécessité de répéter l'expérience à l'identique. Demander des exemples d'expériences aléatoires ? Importance de bien préciser le protocole pour pouvoir s'entendre sur les issues possibles de l'expérience. Nécessité de pouvoir lister les issues possibles de l'expérience.

Introduire le vocabulaire : expérience aléatoire, issues, protocole, événement.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Phase 2 : *Peut-on déterminer la couleur la plus fréquente parmi les billes de la bouteille* ?

Quelle démarche mettre en œuvre ? Nécessité de faire des statistiques sur l'expérience aléatoire ? Nécessité de répéter l'expérience à l'identique. Remarquer que si on répète l'expérience seulement un petit nombre de fois, la fréquence observée pour une couleur fluctuera beaucoup en fonction du hasard. Intérêt de répéter un grand nombre de fois. Calculer la fréquence d'apparition de chaque issue dans un grand nombre de répétitions. Utilisation du vocabulaire : fréquence observée, fluctuation du résultat,

Quelles critiques peut-on faire sur cette démarche, quant à la certitude du résultat ? Remarquer la nécessité de faire un choix dans un environnement incertain. Faire le lien avec des décisions à prendre dans la vie courante liées à des incertitudes dues au hasard. Quelle décision prendre ? Que peut-on dire de cette décision ? Incertitude liée à la décision. Réflexion sur le risque attaché à cette décision.

Phase 3 : *Je m'intéresse à la couleur que je considère la plus fréquente, comment pourrais-je préciser la proportion, notée p, des billes de cette même couleur ?*

Proposer une valeur pour p. Mêmes remarques que dans la phase 2. Interprétation de cette valeur en terme "nombre des chances d'obtenir la couleur considérée". Introduction du vocabulaire : probabilité. D'un groupe à l'autre la valeur de p peut être différente (modèles différents pour une même expérience)

Phase 4 : *Même démarche pour les autres couleurs.*

Détermination de la proportion p pour chacune des couleurs. Remarque que la somme des fréquences de chaque issue est égale à 1. Même remarques dans chaque groupe, bien que les fréquences observées soient différentes (voir tableau ci-dessous).

Fréquences des événements élémentaires obtenues pour 40 réalisations de l'expérience de la bouteille. A-t-on les mêmes résultats d'une bouteille à l'autre ? Remplir le tableau ci-dessous :

	1	2	3	4	
Bouteille	**Fréquence de l'événement élémentaire *A* (autres)**	**Fréquence de l'événement élémentaire *B* (bleu)**	**Fréquence de l'événement élémentaire *N* (noir)**	**Fréquence de l'événement élémentaire *V* (vert)**	**Somme des colonnes 1 à 4**
1	10/40	0/40	18/40	12/40	1
2	17/40	5/40	0/40	18/40	1
3	7/40	9/40	5/40	19/40	1
4	3/40	19/40	6/40	12/40	1
5	0/40	7/40	31/40	2/40	1
6	9/40	10/40	13/40	8/40	1

Propriétés des probabilités en comparaison de celles de fréquences.

Énoncé des deux règles : *la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1* et *la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.*

Phase 5 : *Validation de la démarche*

Validation de la démarche utilisée dans cette activité en ouvrant la bouteille et en comparant la réalité du contenu à la valeur choisie à partir de la répétition de l'expérience.

Phase 6 : *Transition vers l'équiprobabilité, discussion*

On recommence l'activité avec les mêmes bouteilles et les mêmes contenus. On connaît donc le contenu de la bouteille, en particulier le nombre et la couleur des billes dans la bouteille. Qu'est-ce que cela change ? Est-ce que

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX

Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

cela modifie le rôle du hasard ? Est-ce que c'est plus facile de déterminer la probabilité d'apparition de chaque couleur ? Qu'en pensez-vous ?

Petites activités avec la bouteille

Activité 1

Prendre trois bouteilles opaques d'apparences identiques et de contenus inconnus. On sait que deux bouteilles sur les trois ont exactement la même contenance de billes en quantité et couleur : Deux bouteilles contiennent 3 billes rouges, 3 billes vertes et 3 billes blanches. Une bouteille contient 6 billes rouges, 2 billes vertes et 2 billes blanches. Déterminer laquelle des trois bouteilles d'apparences identiques est différente.

Activité 2

On se donne deux bouteilles opaques d'apparences identiques et de contenus inconnus. On nous dit que le contenu est peut-être le même. Déterminer si ces deux bouteilles ont le même contenu.

Seconde : Estimation par intervalle de confiance d'une proportion

Objectifs :

- Approfondissement d'une situation introduite en troisième
- Consolidation du vocabulaire probabiliste
- Exploitation de la notion de fourchette de sondage dans l'estimation d'une proportion
- Quantification du risque lié à une décision,
- Sensibilisation à la validation d'un modèle probabiliste

Pré requis : Activité à faire après travail sur la fluctuation d'échantillonnage et son application à la détermination d'intervalle de confiance pour une proportion p. Les formules explicitant les bornes de cet intervalle sont mises en évidences par simulation à partir de l'observation d'un échantillon de taille n.

Phase 1 : On reprend l'activité de Troisième. Retour sur le vocabulaire. Réflexion sur le risque pris dans chaque décision basée sur l'observation des résultats de cette expérience. Exemple du choix de la valeur de la proportion p de billes d'une même couleur. Utilisation du vocabulaire "modèle" pour décrire les différentes valeurs choisies pour p. À chaque valeur de p correspond un modèle de la situation.

Phase 2 : Utilisation des intervalles de confiance pour une proportion p. Ici p est la proportion (inconnue) des billes d'une couleur donnée, par exemple rouge, dans la bouteille.

Application du résultat de la statistique inférentielle (méthode d'estimation d'une proportion p par intervalle de confiance) : *Après n répétitions de l'expérience de la bouteille, pour lesquelles la fréquence observée de l'apparition de la bille rouge est f, la décision est de considérer que la valeur de p se trouve dans la* ***fourchette de sondage*** $[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. *La probabilité de se tromper en prenant cette décision est inférieure à 5%*. D'où en Seconde une sensibilisation à la quantification de la notion de risque. La fourchette donne ainsi une information sur l'écart entre la vraie valeur de p (inconnue) et la valeur f utilisée pour préciser le modèle.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX

Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Document 3

Introduction de l'équiprobabilité

Troisième : Lancer d'un dé parfait

Objectifs :
Le but de cette activité est d'aborder une situation d'équiprobabilité, de travailler la notion d'événement et d'établir une règle de calcul de probabilités supplémentaire. En particulier :

- Réutilisation du vocabulaire : expérience aléatoire, issue, événement, probabilité
- Approfondissement de la notion d'événement :
  - notion d'issue favorable. Donner des exemples; lister les issues favorables. Plusieurs énoncés pour un même événement. Introduire vocabulaire : événement certain, impossible, élémentaire.
  - Un événement est décrit par une phrase (un énoncé) qui porte (de façon implicite ou explicite) sur les issues de l'expérience aléatoire et dont on peut dire, à coup sûr après la réalisation de l'expérience, si l'énoncé est faux ou s'il est vrai.
  - À chaque événement est associée la liste des issues qui le réalisent (issues dites favorables à l'événement). Cette liste caractérise l'événement (et servira à sa notation en Seconde).
  - Deux événements seront dits identiques s'ils ont la même liste d'issues favorables. En particulier, deux énoncés différents peuvent décrire le même événement.
  - Travailler sur les événements peut nécessiter de donner plusieurs énoncés différents le décrivant.
  - Établir des relations logiques entre les événements. Ces relations sont d'autant plus faciles à mettre en évidence qu'on a explicité la liste des issues favorables.
  - Montrer que deux événements distincts peuvent avoir la même probabilité, ou, deux événements qui ont la même probabilité ne sont pas nécessairement égaux.
- Réflexion sur la notion d'équiprobabilité et sur le principe de la raison insuffisante de Laplace. Détermination d'une probabilité en situation d'équiprobabilité
- Énoncé de la règle : *la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent*.

Cadre de travail *:* La classe est partagée en groupes de deux ou trois élèves. Chaque groupe possède un dé équilibré.

Situation aléatoire : On lance le dé et on note la valeur de la face supérieure.

Phase 1 : Est-ce une situation aléatoire ? Pourquoi ? Quelles sont les issues possibles de cette situation ? En donner la liste. Énoncer précisément le protocole de l'expérience aléatoire.

Phase 2 : Voici des exemples d'événements. Décrire la liste des issues favorables à l'événement. Pour chacun de ses événements, proposez un ou deux énoncés différents le décrivant. Établir des relations logiques entre ces événements.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

1) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est inférieur ou égal à 3* »
2) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est égal à 3* »
3) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est supérieur ou égal à 4* »
4) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est égal à 1* »
5) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est un nombre pair* »
6) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est supérieur ou égal à 7* »
7) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est un nombre multiple de 3* »
8) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est un nombre impair* »
9) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est inférieur ou égal à 8* »
10) « *Le nombre affiché (après avoir lancé le dé) est égal à 9* »

Phase 3 : Donner d'autres exemples de phrases décrivant des événements. Décrire la liste des issues favorables à l'événement. Pour chacun de ses événements, proposez un ou deux énoncés différents le décrivant. Établir des relations logiques entre ces événements.

Phase 4 : Quelle est la probabilité que le nombre affiché soit 4 ? Que signifie cette phrase ? Quelle démarche pourrait-on mettre en œuvre pour déterminer cette probabilité ? Éventuellement, procéder par calcul de fréquence d'apparition du 4 sur un grand nombre de lancers comme il a été fait avec la bouteille.

Quelle est la probabilité que le nombre affiché soit 2 ? Même question pour les nombres 1, 3, 5, 6 ? Faire dessiner le diagramme en bâtons relatif à ces fréquences. Commentaire sur la hauteur des bâtons.

Conduire la discussion pour faire remarquer que le dé étant parfait, il n'y a pas de raison qu'un nombre ait plus de chances de sortir qu'un autre. D'où la décision d'attribuer la même valeur de probabilité p à chaque événement élémentaire. Comme il y a six événements élémentaires, on doit avoir $6p=1$, d'où $p=1/6$. Comparaison avec les fréquences observées.

Phase 5 : On s'intéresse aux événements suivants : « *Le nombre affiché est inférieur ou égal 4* » ; « *Le nombre affiché est un nombre pair* » ; « *Le nombre affiché est un nombre impair* ».

Quelle est la probabilité que le nombre affiché soit inférieur ou égal 4 ? Quelle démarche pourrait-on mettre en œuvre pour déterminer cette probabilité ? Quelle est la probabilité que le nombre affiché soit un nombre pair ? Même question avec un nombre impair ?

Quelle remarque peut-on faire sur les fréquences observées pour chacun de ces événements en relation avec les fréquences observées pour les événements élémentaires ?

Quelle règle peut-on en déduire pour calculer la probabilité d'un événement à l'aide des probabilités des événements élémentaires ?

Seconde : Vers la relation *P(A et B) + P(A ou B) = P(A) + P(B)*

Objectifs :

- Utiliser une situation d'équiprobabilité qui permet de se ramener au dénombrement des issues favorables pour établir la relation *P(A et B) + P(A ou B) = P(A) + P(B)*

Phase 6 : Les deux événements « *Le nombre affiché est un nombre pair* » et « *Le nombre affiché est un nombre impair* » sont contraires et ils ont la même probabilité. Trouver deux événements contraires qui n'ont pas la même probabilité. Trouver deux événements qui ont la même probabilité et qui ne sont pas contraires.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Phase 7 : *Vers la relation P(A et B) + P(A ou B) = P(A) + P(B)*.
On considère les deux événements A: « *Le nombre affiché est inférieur ou égal 4* » et B: « *Le nombre affiché est un nombre pair* ».
Énoncez les événements "*A et B*" et "*A ou B*". Explicitez la liste des issues favorables à ces deux événements. Calculez les probabilités de ces deux événements. A-t-on *P(A ou B) = P(A) + P(B)* ? Quelles remarques peut-on faire ? Peut-on mettre en évidence une relation entre les probabilités *P(A et B), P(A ou B) , P(A), P(B)* ?

Citez des exemples d'événements où on a *P(A ou B) = P(A) + P(B)*. Peut-on énoncer une condition sur les événements pour que cette relation soit vraie ?

Comment définit-on deux événements contraires ? Quelle relation peut-on établir entre les probabilités de deux événements contraires ?

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

<u>Document 4</u>

Notions d'événement et de modèle

Troisième : Lancer de deux dés parfaits (activité de réinvestissement)

Objectifs : Le but de cette activité est

- D'approfondir le travail sur la notion d'équiprobabilité et celui effectué sur la notion d'événement,
- De montrer que toutes les situations ne sont pas d'équiprobabilité, même si on peut être conduit à se ramener à une situation d'équiprobabilité,
- De réinvestir les règles de calcul sur les probabilités,
- D'utiliser un arbre de dénombrement pour faciliter les calculs.

Situation 1 : On lance deux dés à six faces distincts, un vert et un rouge. On suppose que les dés sont parfaitement équilibrés. On note le résultat observé après lancer des deux dés.

Phase 1 : Est-ce une situation aléatoire ? Pourquoi ? Quelles sont les issues possibles de cette situation ? En donner la liste. Énoncer précisément le protocole de l'expérience aléatoire.

Phase 2 : Parmi les énoncés ci-dessous, identifiez ceux qui décrivent un événement au sens de cette expérience aléatoire. Expliquez votre décision. Le cas échéant, décrire la liste des issues favorables à l'événement. Pour chacun de ces événements, proposez un ou deux énoncés différents le décrivant. Établir des relations logiques entre ces événements.

11) « *La somme des nombres affichés est inférieure ou égale à 4* »
12) « *La somme des nombres affichés est égale à 4* »
13) « *La somme des nombres affichés est supérieure ou égale à 4* »
14) « *La somme des nombres affichés est égale à 1* »
15) « *La somme des nombres affichés est un nombre pair* »
16) « *La somme des nombres affichés est supérieure ou égale à 15* »
17) « *Le dé vert affiche le nombre 6* »
18) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux* »
19) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux à 1* »
20) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux à 3* »
21) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux à 6* »
22) « *La somme des nombres affichés est égale à 11* »
23) « *Au moins un des deux dés affiche le nombre 6* »
24) « *Le dé vert affiche le nombre 6* »
25) « *Le dé vert affiche le nombre 6 et le dé rouge affiche le nombre 4* »

Phase 3 : Quelle probabilité attribuer à chaque événement élémentaire pour définir un "bon" modèle de la situation 1 ? Quelle démarche mettre en œuvre ?

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Phase 4 : Déterminer les probabilités des événements suivants (on peut se limiter à certains événements en fonction du niveau de la classe) :

26) « *La somme des nombres affichés est égale à 1* »
27) « *La somme des nombres affichés est un nombre pair* »
28) « *La somme des nombres affichés est supérieure ou égale à 15* »
29) « *Le dé vert affiche le nombre 6* »
30) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux* »
31) « *La somme des nombres affichés est égale à 11* »
32) « *Au moins un des deux dés affiche le nombre 6* »
33) « *Le dé vert affiche le nombre 6* »
34) « *Le dé vert affiche le nombre 6 et le dé rouge affiche le nombre 4* »

Seconde : Réflexions sur la notion de modèle et la modélisation

Objectif :

- Sensibiliser les élèves au concept de modèle et de modélisation
- Approfondir le travail sur les événements commencé en Troisième : introduction de la notation ensembliste d'un événement. Travail de logique à partir des événements ; utilisation du *ET*, *OU*, *NON*, « *Au moins* », « *Au plus* », … ; réflexion sur l'intérêt et les usages d'une notation : notations communes en mathématiques, notations personnelles, …
- Montrer qu'une même situation aléatoire peut être décrite par deux modèles différents, mais qu'un modèle peut être plus riche pour la description d'événements qu'un autre,
- Montrer que l'expression "au hasard" n'est pas définie en probabilité, d'où des difficultés dans la modélisation de certaines situations. Nécessité de bien préciser le protocole de l'expérience pour modéliser une situation aléatoire,
- Utilisation des arbres de dénombrements : construction explicite puis construction implicite

Activité 1 : On reprend l'activité avec la situation 1 de Troisième

Activité 2

Situation 2 (*on peut imaginer que la situation est réalisée au lieu d'être décrite*) : En cachette, Jean lance deux dés à six faces distincts, un vert et un rouge. Les deux dés sont parfaitement équilibrés, et personne (à part Jean) ne peut voir les dés. Lui seul peut donc lire les nombres obtenus sur les faces. Après chaque lancer des deux dés, Jean se borne à annoncer la somme des deux faces obtenues.

Phase 1 : Est-ce une situation aléatoire ? Pourquoi ? Quelles sont les issues possibles de cette situation ? En donner la liste. Énoncer précisément le protocole de l'expérience aléatoire.

Phase 2 : Parmi les énoncés ci-dessous, identifiez ceux qui décrivent un événement au sens de cette expérience aléatoire. Expliquez votre décision. Le cas échéant, décrire la liste des issues favorables à l'événement. Pour chacun de ses événements, proposez un ou deux énoncés différents le décrivant. Établir des relations logiques entre ces événements.

35) « *La somme des nombres affichés est inférieure ou égale à 4* »
36) « *La somme des nombres affichés est égale à 4* »

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

37) « *La somme des nombres affichés est supérieure ou égale à 4* »
38) « *La somme des nombres affichés est égale à 1* »
39) « *La somme des nombres affichés est un nombre pair* »
40) « *La somme des nombres affichés est supérieure ou égale à 15* »
41) « *Le dé vert affiche le nombre 6* »
42) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux* »
43) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux à 1* »
44) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux à 3* »
45) « *Les nombres affichés par les deux dés sont égaux à 6* »
46) « *La somme des nombres affichés est égale à 11* »
47) « *Au moins un des deux dés affiche le nombre 6* »
48) « *Le dé vert affiche le nombre 6* »
49) « *Le dé vert affiche le nombre 6 et le dé rouge affiche le nombre 4* »

Phase 3 : Énoncer une phrase décrivant l'événement A={4} relativement au modèle de la situation 2. Comment s'écrirait sous forme ensembliste l'événement décrit par cette phrase dans le cas de la situation 1 ? Est-ce un événement élémentaire ?
Énoncer une phrase décrivant l'événement A={1,2,3,4} relativement au modèle de la situation 2. Comment s'écrirait sous forme ensembliste l'événement décrit par cette phrase dans le cas du modèle de la situation 1 ?
Énoncer une phrase décrivant l'événement A={2} relativement au modèle de la situation 2. Comment s'écrirait sous forme ensembliste l'événement décrit par cette phrase dans le cas du modèle de la situation 1 ? Est-ce un événement élémentaire ?

Phase 4 : Comparez les événements relatifs au modèle de la situation 1 et ceux relatifs au modèle de la situation 2. A-t-on les mêmes événements élémentaires ? Quelles remarques peut-on faire ?

Phase 5 : Quelle probabilité attribuer à chaque événement élémentaire pour définir un "bon" modèle de la situation 2 ? Quelle démarche mettre en œuvre ?

Commentaires (à partir de l'observation dans une classe de troisième) : En général, les élèves vont prendre 1/11 pour chaque probabilité, car il y a 11 issues. Ce modèle est mathématiquement correct, mais non-conforme à la réalité observée. Faire apparaître la contradiction soit en faisant un calcul des fréquences de chaque issue sur une centaine de lancers et construire un diagramme en bâtons des fréquences, soit en montrant un diagramme en bâtons préparé d'avance (expérimentalement ou à partir d'une simulation par ordinateur). Dans ce cas les élèves remarquent que les bâtons n'ont pas la même longueur. D'où nécessité d'en rechercher la raison, et de remarquer que par exemple l'issue 2 ne peut être obtenue que si chaque dé affiche 1 alors que l'issue 4 peut être obtenue par les affichages des nombres 1 et 3, ou 2 et 2, sur les dés.

Les élèves peuvent faire le décompte des possibilités des couples des nombres dont la somme donne successivement 2, 3, 4, …, 11, 12. Mais en général ils ne distinguent pas nécessairement le cas (1,2) du cas (2,1), où on a noté dans l'ordre le nombre affiché par le dé vert et celui affiché par le dé rouge. Dans ce cas on dénombre seulement 21 couples. Les élèves peuvent attribuer la même valeur 1/21 à chaque événement élémentaire, mais il y a contradiction avec la règle de la somme des probabilités des événements élémentaires qui doit être égale à 1. Ou alors ils attribuent les probabilités 1/21, 1/21, 2/21, 2/21, 3/21, … aux événements élémentaires relatifs aux issues 2, 3, 4, 5, 6, … Dans ce cas le modèle ne correspond pas à celui du diagramme en bâtons car la probabilité d'obtenir 3 est visiblement double de celle d'obtenir 2 sur le diagramme, ce qui n'est pas le cas ici.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Dans une ultime tentative, les élèves prennent conscience de la nécessité de compter séparément les couples de type (1,2) et (2,1). Ce qui donne après dénombrement en utilisant un arbre de dénombrement 36 couples. Et en revenant à ce qui a été fait précédemment, on attribue les probabilités 1/36, 2/36, 3/36, 4/36, 5/36, … aux événements élémentaires relatifs aux issues 2, 3, 4, 5, 6, … Dessiner le diagramme en bâtons de ces fréquences. Dans ce cas le modèle correspond à celui du diagramme en bâtons

Phase 6 : Comparez les probabilités choisies pour les événements élémentaires du modèle de la situation 1 et celles choisies pour les événements élémentaires du modèle de la situation 2. Quelles remarques peut-on faire sur les modèles probabilistes associés à chacune de ces deux situations ?

Activité 3 : ***Le problème des deux personnes qui s'assoient au hasard*** (cf. *Ressources pour la seconde*, page 8/21)

Situation 3 : Commentaires et discussion sur la modélisation à partir de l'activité "*Le problème des deux personnes qui s'assoient au hasard*" (cf. *Ressources pour la seconde*, page 8/21). C'est l'occasion de réinvestir l'équiprobabilité, d'utiliser un arbre de dénombrement explicite. On peut proposer deux modèles distincts mais tout aussi "naturels".

Activité 4 : ***Probabilité d'avoir la même date d'anniversaire*** (cf. *Ressources pour la seconde*, page 9/21)

Situation 4 : Travail à partir de l'activité "*Probabilité d'avoir la même date d'anniversaire*" (cf. *Ressources pour la seconde*, page 9/21) : généralisation de l'activité sur le lancer de deux dés (réflexion sur la notation des issues), travail sur la négation d'un événement (logique), utilisation de la relation $P(\overline{A})=1-P(A)$. Utilisation d'un arbre de dénombrement implicite. Possibilité de faire un prolongement de l'activité conduisant à la rédaction d'algorithmes.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX

Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Document 5

Réflexion sur la simulation

Troisième : Approche de la simulation

Objectifs :
- Sensibiliser les élèves au fait que des situations aléatoires différentes peuvent être décrites par le même modèle.
- Entraîner les élèves à reconnaître un même modèle sous des habillages différents pour des situations de type "Pile-ou-face" ou "lancer d'un dé". Transposer une situation en une autre situation de même modèle.
- Sensibiliser les élèves au passage à la simulation informatique en simulant sur une calculatrice. Travail sur la fonction RND

Activité 1
On se donne une bouteille et des sacs de billes de différentes couleurs, au moins 6 couleurs différentes. Remplir une bouteille de telle sorte que l'expérience aléatoire simule :
- le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée
- le lancer d'un dé équilibré à six faces
- le lancer d'une pièce de monnaie truquée.

Comment comparer les résultats des deux expériences aléatoires dans chaque cas ?

Activité 2
Simuler avec un dé équilibré :
- le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée
- le lancer d'une pièce de monnaie truquée avec probabilité d'avoir face égale à p, avec p=1/3 ; p=1/6 ; p=5/6

Activité 3
Simuler, avec la fonction RND de la calculatrice le lancer, d'un dé équilibré puis le lancer d'une pièce de monnaie truquée avec probabilité d'avoir face égale à p, pour les valeurs suivantes de p : p=1/3 ; p=1/6 ; p=5/6

Seconde : Utilisation de la simulation par ordinateur

Objectifs :
- Montrer l'intérêt de l'outil informatique dans la simulation par la rapidité des réalisations et dans la prise de décision,
- Estimation par simulation de probabilités dont le calcul ne relève pas du niveau de Seconde,
- Consolider le sens des notions probabilistes introduites en Troisième,

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

- Utilisation de l'outil informatique pour illustrer les résultats de statistique inférentielle au programme de Seconde,

Activité 1 : *Taux anormal de cas de leucémie* (Cf. *Ressources pour le Bac Pro*., page 8)
(Voir **Simulation** dans Diaporama).

Activité 2 : Approche de la fluctuation d'échantillonnage par simulation (Voir **Simulation** dans Diaporama)

Activité 3 : Approche de notion d'intervalle de fluctuation et détermination graphique par simulation (Voir **Simulation** dans Diaporama)

Activité 4 : Visualisation des intervalles de fluctuation et de confiance par simulation (Voir **Simulation** dans Diaporama)

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX
Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Document 6

Continuité *Troisième/Seconde* (Réflexions)

Troisième	**Seconde**
Introduction du vocabulaire et définitions : expérience aléatoire, issue, univers des possibles, événement, probabilités,	Reprise et approfondissement du vocabulaire : modèle
Sensibilisation au fait qu'un événement est décrit pas la liste de ses issues (issues favorables), approche intuitive de la notion d'événement.	Définir un événement comme un ensemble d'issues. Événement considéré comme un sous-ensemble de l'univers des possibles
Sensibilisation aux notations d'un événement, conjonction et réunion de deux événements sur des cas très simples	Utilisation des notations "ET" et "OU" et des symboles ensemblistes correspondants. Négation d'un énoncé. Travail de logique à partir des événements
Sensibilisation à la règle de calcul *P(A ou B)= P(A)+P(B)* dans le cas de deux événements A et B incompatibles	Mise en place et utilisation de la formule générale *P(A ou B)+P(A et B)=P(A)+P(B)*
Sensibilisation au risque encouru dans le choix du paramètre p d'une situation de type "Pile-ou-Face".	Quantification du risque et estimation de p par intervalle de confiance
Sensibilisation à la notion de modèle probabiliste	Utilisation du vocabulaire : modèle probabiliste. Sensibilisation à la comparaison de modèles et à la réflexion sur la modélisation
Expériences à une épreuve et sensibilisation aux expériences à deux épreuves	Travail sur des expériences à deux épreuves, sensibilisation à des généralisations possibles.
Utilisation concrète d'arbres de dénombrement avec peu de branches : construction explicite. Sensibilisation aux arbres de dénombrement avec un nombre important de branches	Utilisation d'arbres de dénombrements avec un nombre important de branches. Nécessité de ne pas dessiner toutes les branches : construction implicite.
Sensibilisation à la simulation. Construction de situations aléatoires décrites par un même modèle probabiliste explicitées sous des habillages différents	Utilisation de la simulation informatique pour estimer des probabilités à partir du modèle déterminé, pour illustrer les résultats de statistique inférentielle au programme.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX

Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr

Document 7

Bibliographie

Chevalarias Th. : « Le chapitre ″Probabilités ″ en Troisième », *Repères IREM*, 78, janvier 2010, pages 59-69, Topiques éditions, Nancy, 2010.

Ducel Y., Saussereau B. : « Quelle problématique pour un enseignement des probabilités en Troisième ? », *Repères IREM*, 77, octobre 2009, pages 55-65, Topiques éditions, Nancy, 2009.

Ducel Y., Saussereau B. : « La prise de décision de la Seconde à la Première », *Repères IREM*, 85, octobre 2011, Topiques éditions, Nancy (à paraître).

Ducel Y., Larnaudie F., Saussereau B. : « Activités de probabilités de la Troisième à la Seconde », en préparation, à soumettre à *Repères IREM*, 2011.

Groupe-IREM « Statistique & probabilités » : *Lois continues, test d'adéquation. Une approche pour non spécialiste*, Collection « Les Publications de l'IREM de Besançon », Presses universitaires de Franche-Comté, Besançon, 2005.

Ministère Éducation nationale-DGESCO : *Ressources pour la classe en baccalauréat professionnel - extrait : Probabilités et statistiques*, Document de travail, avril 2009.

Ministère Éducation nationale-DGESCO : *Ressources pour la classe de Seconde – extrait : Probabilités et statistiques*, 2009.

Ministère Éducation nationale-DGESCO : *Ressources pour la classe de Première générale et technologique : Statistiques et probabilités*, avril 2011.

Y. Ducel, IREM - Département de mathématiques, UFR des Sciences et Techniques - 16, route de Gray - 25030 BESANÇON CEDEX

Téléphone : 03 81 66 62 32, Télécopie : 03 81 66 66 23, Adresse électronique : yves.ducel@univ-fcomte.fr