Problèmes d'intersection traités avec Cabri 3D, avec en particulier

Des problèmes de maximisation ou de minimisation de volumes (au lycée)
de réalisation de patrons de solides usuels tronqués (au collège)

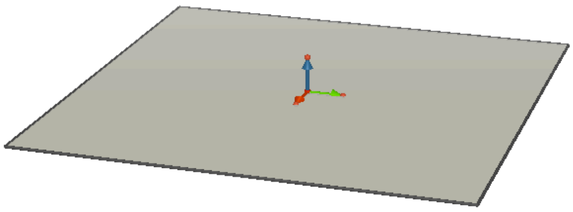
Jean-Jacques DAHAN (IREM de Toulouse)

Nous présentons ici quelques activités représentatives de l'esprit dans lequel a été mené cet atelier. L'ensemble des constructions est disponible sur le site des journées. Ces activités avaient pour but de montrer une approche de l'espace radicalement différente de celle envisageable jusqu'à présent aussi bien au collège qu'au lycée grâce à l'environnement de géométrie dynamique dans l'espace Cabri 3D. La simplicité d'utilisation de Cabri 3D, prolongeant de manière naturelle celle de Cabri 2 Plus permet une prise en main rapide. L'impression d'agir sur les objets de manière directe permet de travailler très vite des thèmes qui nécessitaient auparavant des connaissances abstraites lourdes. On peut ainsi comprendre qu'une approche des problèmes de géométrie dans l'espace avec ce logiciel va modifier de manière positive et durable les rapports difficiles que les enseignants français ont eu avec ce thème d'enseignement.

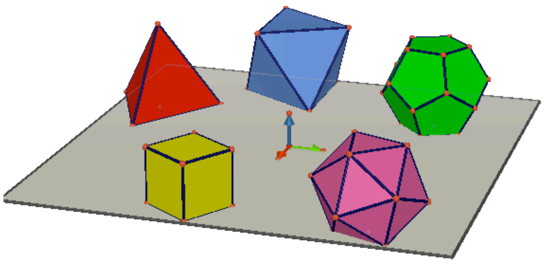
1. Prise en main rapide des fonctionnalités de base

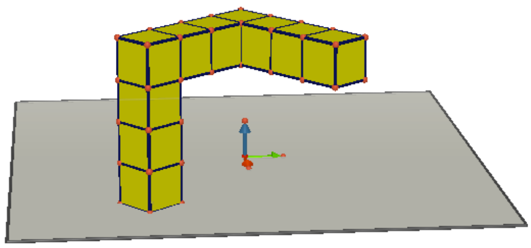
Le point principal mis d'entrée en évidence est la possibilité de changer à tout moment le point de vue de la figure vue à l'écran par un clic droit prolongé (même au cours d'une construction).

Contrairement à Cabri 2 Plus, qui s'ouvre sur une page vierge, le logiciel Cabri 3D s'ouvre sur une visualisation en perspective centrale d'un rectangle modélisant le plan horizontal de référence. On voit aussi apparaître un repère orthonormé de l'espace avec l'origine et les deux premiers vecteurs de ce repère dans le plan horizontal de référence



On a montré ensuite la manière simple de créer des images des polyèdres réguliers connus en trois clics ainsi que la manière de créer des pavages de l'espace qui peuvent rendre ludiques les premiers contacts des collégiens avec l'espace modélisé :

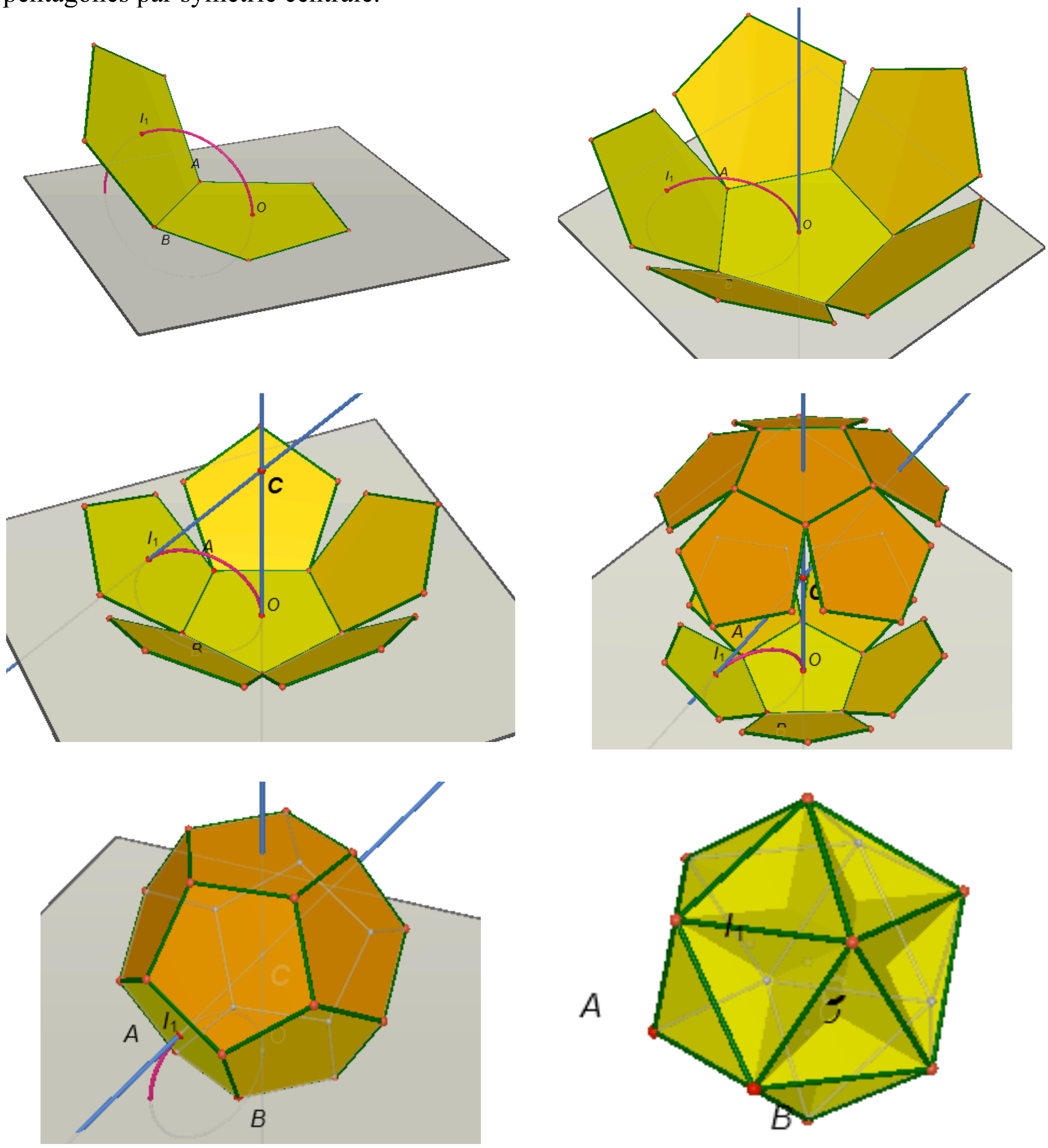




Remarquons que le précédent assemblage de cubes, permet en choisissant un point de vue convenable d'illustrer le paradoxe du triangle impossible de l'espace ayant 3 angles droits.

2. Le dodécaèdre et la construction de Schuman

Il a été montré comment tout polyèdre pouvait être ouvert et lorsqu'il est ouvert comment éditer une page contenant son patron. Nous avons ensuite réalisé la construction de Schuman du dodécaèdre régulier qui permet une bonne appréhension des outils fondamentaux de construction de cet environnement. Les six copies d'écran suivantes montrent les étapes de cette construction, utilisant la possibilité de construire un cercle par son axe et un de ses points, les images de pentagones par des rotations définies par leurs axes et les images de pentagones par symétrie centrale.

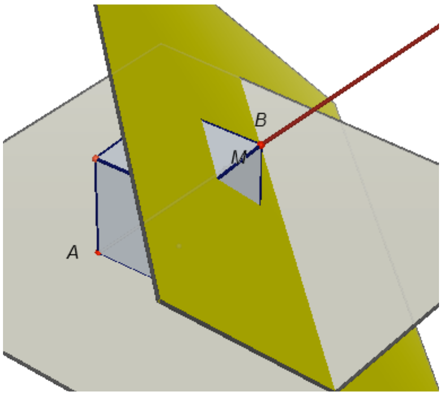


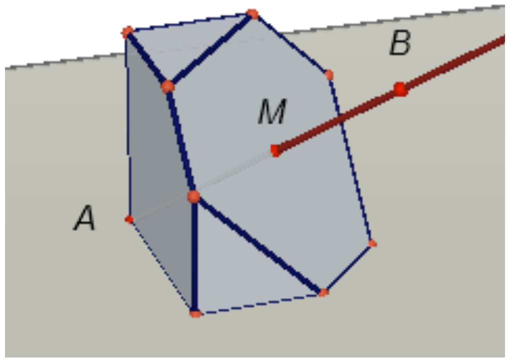
L'avant dernière figure permet de refermer le dodécaèdre en tirant sur I_1. La dernière figure (cerise sur le gâteau) est obtenu en continuant de tirer sur I_1. L'effondrement du patron se transforme en la réalisation d'un polyèdre étoilé.

3. Troncature d'un cube

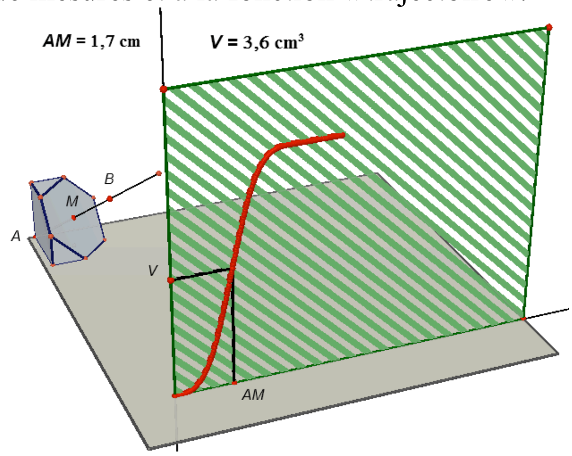
On peut couper tout polyèdre par n'importe quel plan. Nous avons proposé deux problèmes en liaison avec la découpe d'un cube suivant un plan variable perpendiculaire à une diagonale principale.

Problème 1 : reconnaître les sections possibles suivant la position de M où le plan de section coupe le cube. On peut par une investigation simple conjecturer les trois cas possibles, « triangle équilatéral », « hexagone ayants des côtés égaux deux » à deux puis « triangle équilatéral ». On a noté la possibilité de valider expérimentalement ces conjectures en utilisant les outils de mesure de Cabri 3D.





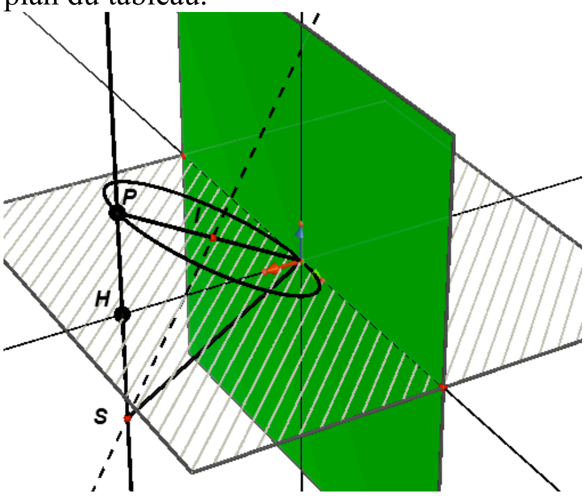
Problème 2 : il s'agit cette fois d'étudier la fonction donnant le volume du cube tronqué en fonction de la distance AM. Cette étude a été rendue possible grâce aux possibilités de reports de mesures et à la fonction « trajectoire ».

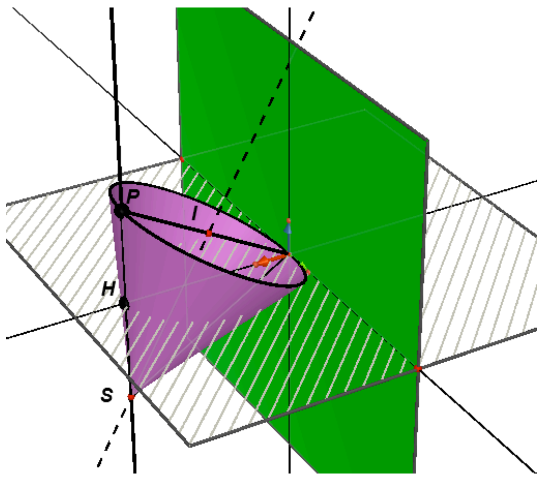


Différentes observations peuvent être faites à partir de cette figure dynamique :
La constance de V à partir d'une certaine position de M.
La symétrie d'une portion de la courbe par rapport à l'un de ses points.
Les pentes des tangentes qui sont nulles pour deux positions particulières de M.
Ces observations peuvent donner lieu à différents types d'activités : validations expérimentales ou preuves déductives.

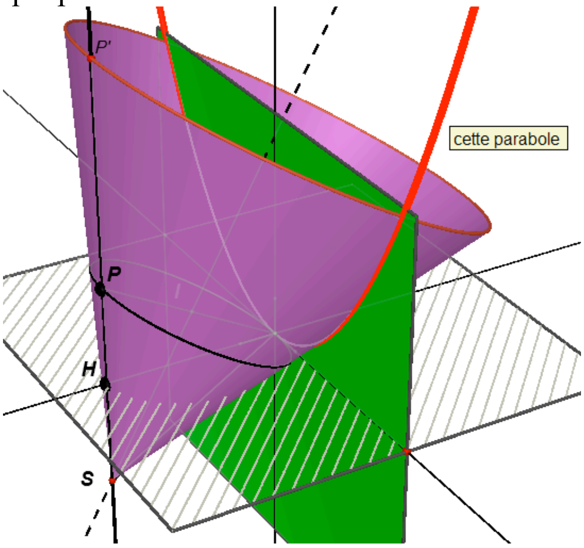
4. Courbe de la fonction carrée en liaison avec la section d'un cône

Cette activité permet de comprendre de manière expérimentale pourquoi les courbes des fonctions du type f(x) = ax^2 sont des coniques au sens d'Apollonius.
On a commencé par construire un cône dont une génératrice est parallèle au plan frontal représentant le plan du tableau pour s'intéresser à l'intersection de ce cône avec justement le plan du tableau.





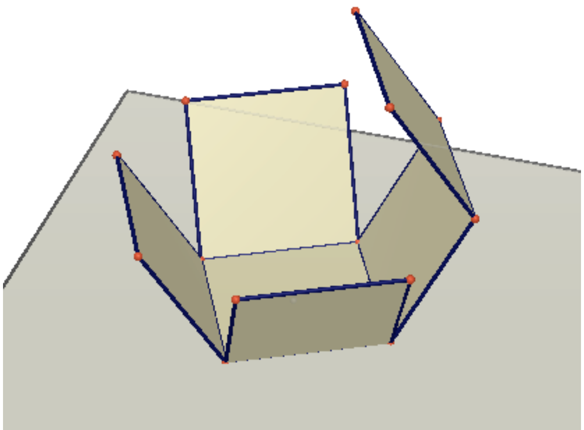
Pour mieux visualiser le problème on prolonge la partie visible du cône en construisant l'homothétique de cette partie visible par une homothétie centrée en S et de rapport défini par le couple de point (P ; P') (P' étant un point de la génératrice verticale). On construit ensuite la courbe intersection du cône avec le plan du tableau. Cabri reconnaît cette courbe en tant que parabole.

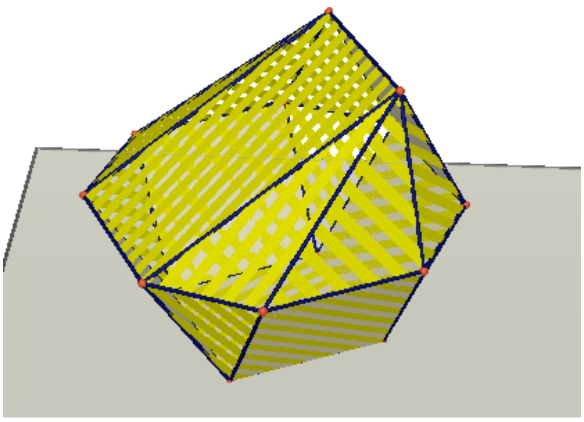


Cette dernière remarque permet de comprendre le niveau déductif assisté par le logiciel dans l'appréhension de cette figure.
Si on place un point M sur cette courbe et qu'on affiche ses coordonnées (x ; y ; z), les coordonnées de ce point dans le plan vert sont y et z.
L'utilisation de la calculatrice de Cabri permet d'afficher le rapport z/y^2. On peut constater que ce rapport reste constant à l'affichage quand on change la position de M sur la courbe intersection. Ceci permet de conjecturer que la section réalisée est très vraisemblablement la courbe représentative d'une fonction du type $y = ax^2$.

5. Enveloppe convexe du patron d'un cube

Ce problème a été présenté ainsi que l'expérimentation menant à la conjecture de son résultat. Ce problème a fait l'objet d'une présentation à Taipei en Décembre 2007 au cours du congrès ATCM. Le compte rendu qui contient la solution complète sera mis en ligne sur le site internet de l'IREM de Toulouse.
Comme on le voit ci-dessous, on a construit l'enveloppe convexe du patron d'un cube en partie replié (modélisant un paquet cadeau élastique) et on s'intéresse à la position donnant un maximum du volume de cette enveloppe. Une simple manipulation (ouverture ou fermeture du patron) permet de s'apercevoir que ce maximum est atteint quand le volume de l'enveloppe vaut environ quatre fois le volume du cube initial.





La solution complète de ce problème nécessite la décomposition de l'enveloppe convexe en sous parties simples du type « prismes droits », « parallélépipède rectangle » et « pyramides à bases trapézoïdales ».
Ce problème est un problème dont l'approche expérimentale est possible grâce à l'environnement informatique utilisé, ce qui était inenvisageable dans l'environnement habituel papier crayon.