Perles mathématiques pour un tricentenaire : trois problèmes inspirés d'Euler (1707 – 1783)

Ces trois problèmes, niveau lycée, illustrent l'article publié dans le BV 473 (nov-déc. 2007) intitulé : « Euler, ou l'art de chercher, découvrir, inventer ».

I. Le problème de Bâle.

Pour n entier naturel non nul, soit $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ et $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

On se propose de calculer une valeur approchée de *S,* puis la valeur exacte de *S,* en nous appuyant sur les méthodes mises en place par Euler tout en se situant dans un enseignement de classe terminale au lycée.

1. <u>Existence de *S* et premiers encadrements.</u>
   a) Vérifier l' identité $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; en déduire pour tout n l'inégalité $S_n < 2 - \frac{1}{n}$
   b) En déduire que *S* existe et proposer un premier encadrement de *S* par deux entiers consécutifs.
   c) Vérifier l'identité $\frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{k-1}{k^2} - \frac{k}{(k+1)^2}$

   Soit $S_n' = \frac{1}{1^2\times 2} + \frac{1}{2^2\times 3} + \frac{1}{3^2\times 4} + ... + \frac{1}{(n-1)^2\times n}$. Démontrer que $S' = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n'$ existe et que $S_n = 1 + S_n' - \frac{n-1}{n^2}$;

   en déduire que *S* = 1 + *S*' et que 1,6 < *S*
2. <u>Valeur approchée à 10^{-3} près.</u>
   a) Pour *k* > 1,Vérifier la double inégalité

$$\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right) < (k+1)^2 < \left(k+\frac{9}{16}\right)\left(k+\frac{25}{16}\right)$$

   En déduire $\frac{16}{16k+9} - \frac{16}{16k+25} < \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k+3}$

   b) Soit alors $R_{(n,N)} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+N)^2}$ pour N entier (N > 0) et *n* entier naturel non nul. Et posons pour n fixé, $R_n = \lim\limits_{N\to+\infty} R_{(n,N)}$

   Déduire du 1) que $\frac{16}{16n+9} < R_n < \frac{2}{2n+1}$ puis, en prenant *n* = 11 que *S* = 1,644, à 10^{-3} près.

3. <u>Une propriété des polynômes.</u>
   a) Soit *P(x)* un polynôme dont le coefficient constant vaut 1, donc

$P(x) = 1 + ax + bx^2$, et supposons qu'il s'annule pour deux valeurs x_1 et x_2, distinctes ou non. Démontrer que l'on a alors la propriété : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-a$

Cette propriété se généralise aux polynômes de degré n quelconque : si un polynôme de degré n a son coefficient constant égal à 1 et s'annule pour n valeurs distinctes ou non, la somme des inverses de ces valeurs vaut l'opposé du coefficient du 1er degré, (propriété (1)).

A l'époque d'Euler, les mathématiciens avaient réussi à développer les fonctions usuelles sous forme de polynômes généralisés[1] que l'on appelle séries entières, tels que :

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+... \text{ pour tout } x \text{ réel}$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+... \text{pour tout } x \text{ réel}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+... \text{pour tout } x \text{ réel, x} \neq 0$$

b) Montrer que les valeurs qui annulent $\frac{\sin x}{x}$ sont tous les nombres réels $k\pi$, k entier relatif non nul.

Posons $u = x^2$. Quelles sont les valeurs qui annulent le polynôme $Q(u)$, où $Q(u) = 1-\frac{u}{3!}+\frac{u^2}{5!}-\frac{u^3}{7!}+....(-1)^n\frac{u^n}{(2n+1)!}...$?

En déduire que la somme S vaut exactement $\frac{\pi^2}{6}$.

II. Relations entre les côtés d'un triangle et ses médianes. Triangles automédians.

Soit ABC un triangle dont les mesures des côtés sont
BC = 2a ; CA = 2b ; AB = 2c et les médianes AA'= f ; BB' = g ; CC' = h, A', B', C' étant les milieux respectifs de [BC] ; [CA] ; [AB].

A. Relations entre côtés et médianes.

[1] Pour ceux qui voudraient connaître la méthode d'Euler pour l'obtention de ces développements, voir la réédition de : Euler, *Introduction à l'Analyse infinitésimale,* tome premier, chap. VIII, par ACL - éditions

1) On désigne par AA'D le triangle (figure 1) dont les côtés mesurent AA' = f ; A'D = g ; AD = h. Démontrer que les médianes du triangle AA'D ont pour longueurs $\frac{3}{2}$a ; $\frac{3}{2}$b ; $\frac{3}{2}$c, c'est-à-dire les $\frac{3}{4}$ des longueurs des côtés du triangle initial ABC.

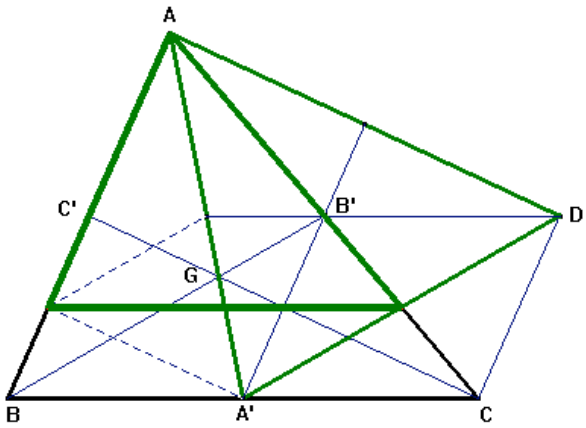


figure 1

2) Démontrer les relations

$f^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$; $g^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2$; $h^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$

3) Démontrer que si $b^2 + c^2 = 2a^2$ (1) alors le triangle AA'D a ses côtés proportionnels aux côtés du triangle ABC et réciproquement. La relation (1) revient à dire que les carrés des côtés sont en progression arithmétique ; on dit aussi que a est moyenne quadratique de b et c.

<u>Définition</u> : Un triangle vérifiant la relation (1) est appelé <u>triangle automédian</u>**.**

B. **Étude de quelques propriétés des triangles automédians**

1) On fixe le côté [BC]. Démontrer que si le triangle ABC est automédian, alors le sommet A décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Démontrer que si le triangle ABC est automédian, alors on a les relations :
$a^2 = 2bc.\cos A$ et $2\cos 2A = \cos 2B + \cos 2C$. (pour cette dernière, on pourra utiliser les relations (2) : $\frac{2a}{\sin A} = \frac{2b}{\sin B} = \frac{2c}{\sin C} = 2R$, où R est le rayon du cercle circonscrit)

3) On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC et par H son orthocentre. Soit G' le symétrique de G par rapport à A' . Démontrer que le triangle GCG' est semblable au triangle ABC, sachant que celui-ci est automédian. En déduire que G' appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, et que B , C, G et H sont cocycliques. (figure 2)

4) Démontrer que les cercles AGB *et* AGC sont tangents à (BC) resp. en B et C.

5) Démontrer que si Si R, R_a, R_b, R_c désignent les rayons des cercles ABC, GBC, GAC, GAB alors on a :

$$R^2 = R_a^2 = R_b.R_c$$

(on pourra utiliser les relations (2))

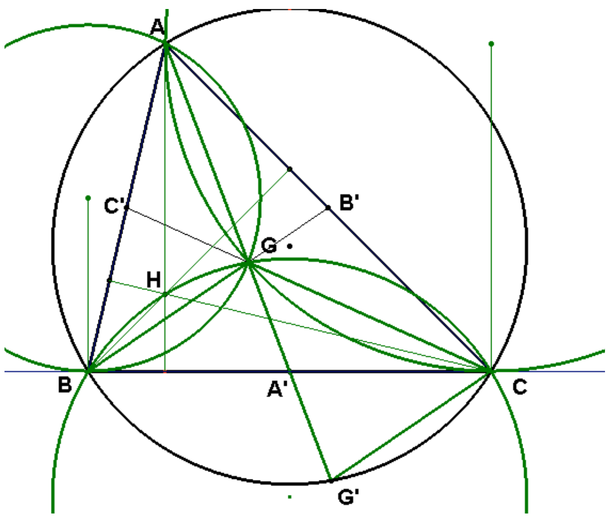


figure 2

C. Solutions entières de l'équation $2x^2 = y^2 + z^2$ (1')

Montrer que l'équation (1'), où x, y et z sont des entiers relatifs, est équivalente à l'équation

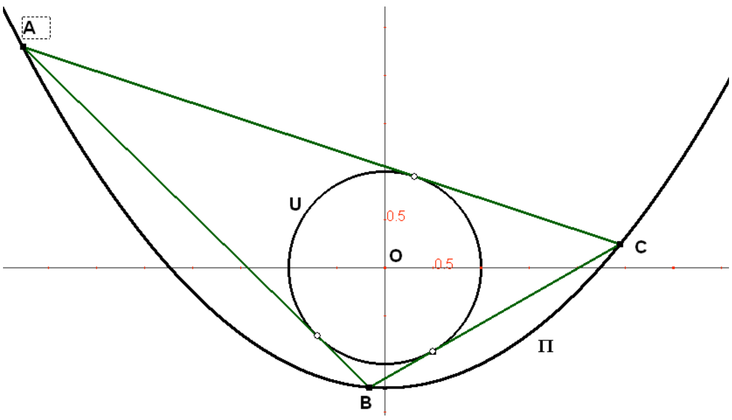
(2) $x^2 = \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-z}{2}\right)^2$

Sachant que les solutions entières de l'équation (3) $u^2 = v^2 + w^2$ sont données par $u = m^2 + n^2$; $v = m^2 - n^2$; $w = 2mn$, *m* et *n* entiers, montrer que les solutions de (1') sont données par $x = m^2 + n^2$; $y = (m+n)^2 - 2n^2$; $z = (m-n)^2 - 2n^2$.

Proposez quelques exemples de triangles automédians à côtés entiers premiers entre eux.

III. Une application élémentaire du théorème d'addition d'Euler.

A. Considérons, relativement à un repère orthonormal (O, $\vec{i}, \vec{j}$), la parabole (P) d'équation $y = \frac{x^2 - 5}{4}$ et le cercle (U) d'équation : $x^2 + y^2 = 1$.



Soient A, B, C trois points de la parabole d'abscisses respectives *a, b, c*.

1) Démontrer que la droite (AB) est tangente au cercle (U) si et seulement si :

$$(1)\ a^2b^2 - a^2 - b^2 + 8ab + 9 = 0$$

Exprimer *b* en fonction de *a* et montrer que *b* est de deux manières possibles une fonction homographique de *a*.

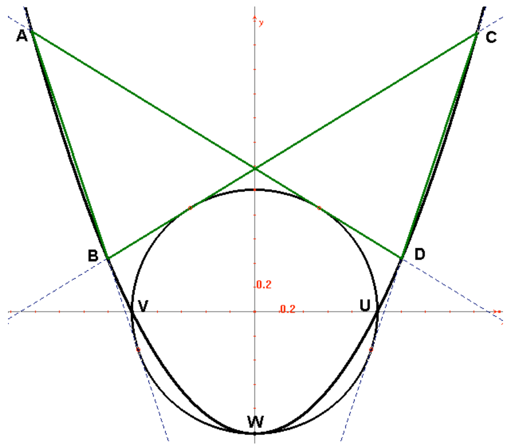
2) En déduire que si (AB) et (BC) sont toutes deux tangentes à (U) alors il en est de même de (AC).

3) Les travaux d'Euler et ce que l'on appelle son théorème d'addition permettent de trouver un paramétrage de la parabole (P) qui va beaucoup simplifier cette démonstration. Montrer que le point M de coordonnées (*x, y*) appartient à (P) si et seulement si $x = x(t) = \sqrt{3}\tan t\ ;\ y = y(t) = \dfrac{3\tan^2 t - 5}{4}$ pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) Soient M (*x, y*) et N (*x', y'*) deux points de (P) correspondants aux paramètres *t* et *t'*, respectivement. Démontrer que (MN) est tangente à (P) si, et seulement si $t' = t + \dfrac{\pi}{3}\ ou\ t' = t - \dfrac{\pi}{3}$. En déduire la propriété du 2).

B. On peut traiter les mêmes questions avec la parabole d'équation $y = x^2 - 1$

Dans ce cas la relation (1) devient :
$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = 1$ et cette fois-ci ce n'est qu'au bout de la 4ème tangente que l'on retourne au point de départ. Ici, la démonstration directe à partir de (1) est simple.



Néanmoins Euler nous permet aussi d'appliquer la méthode de la question 3) et 4) du A, avec le paramétrage : $x = \dfrac{1}{\sin t}\ ;\ y = \dfrac{1}{\tan^2 t}$ pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$

Alors la droite (MN), avec M correspondant au paramètre *t* et N au paramètre *t'*, est tangente à (U) si et seulement si $t' = t + \dfrac{\pi}{2}\ ou\ \ t' = t - \dfrac{\pi}{2}$ et on comprend alors qu'il y ait clôture au bout de la quatrième tangente.

Jean-Pierre Friedelmeyer