LE TP DE MATHS-INFO EN TERMINALE S AVEC XCAS

Michèle GANDIT – Bernard PARISSE
michele.gandit@ac-grenoble.fr

Qu'est-ce que XCAS ?

Xcas est le « couteau suisse » du logiciel pour faire des mathématiques du lycée à l'agrégation. Il combine dans un même logiciel des fonctionnalités allant du calcul formel, au tableur et à la géométrie dynamique, dans le plan et dans l'espace. Il fonctionne sous Linux, MacOsX.4 et WindowsXP, on peut le télécharger gratuitement en saisissant XCAS à partir d'un moteur de recherche. Certaines particularités de Xcas par rapport à d'autres logiciels s'expliquent par son histoire et son mode de développement, que nous détaillons un peu.

Petit historique

De 1993 à 2000, Bernard Parisse a développé le module de calcul formel des calculatrices HP, la HP40G est ainsi devenue, à la rentrée 2000, la calculatrice formelle la moins chère du marché, mais sa diffusion a été assez confidentielle, en raison d'une part, du matériel utilisé (microprocesseur de 10 ans d'âge) et, d'autre part, de la position dominante de TI sur le marché. HP a donc mis en veille les calculatrices. Bernard Parisse a alors décidé de lancer un projet de logiciel de calcul formel dont le développement ne soit pas entravé par les décisions d'une entreprise (que ce soit un constructeur ou éditeur de logiciels tels que Maplesoft), d'où le choix d'être libre, multi-plateforme et performant pour proposer une alternative aux logiciels de calcul formel commerciaux. Renée De Graeve, qui avait initié la collaboration avec HP et écrit la documentation du calcul formel des HP, a accepté de continuer à documenter, tester et proposer des algorithmes et des améliorations.

Le projet était au départ monolithique, puis il a été partagé en deux parties : le noyau de calcul (Giac) et les interfaces, dont Xcas est la plus complète, mais Giac peut aussi s'utiliser depuis un navigateur via « Xcas en ligne » conçu par Jean-Pierre Branchard (http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~branchar/cgi-bin/giac_online/giac.pl?langue=fr). Du point de vue calcul, Giac fournit aujourd'hui tous les outils nécessaires jusqu'au niveau de l'agrégation. Dès le début, Xcas a évolué avec l'ajout de fonctionnalités à destination du lycée (géométrie, tableur), grâce à deux enseignantes de l'IREM de Grenoble : Michèle Gandit et Christiane Serret. Il reste néanmoins à la base un logiciel de calcul formel faisant également du tableur et de la géométrie dynamique 2D ou 3D, et de la géométrie de type Logo. Il est vite apparu que la première mouture de l'interface Xcas était trop difficile à utiliser, une refonte complète de l'interface a commencé fin 2005, elle est à peu près stabilisée aujourd'hui. Le cercle des enseignants utilisant Xcas avec des classes s'est petit à petit élargi, le premier livre traitant entre autres de Xcas va bientôt sortir (G. Connan, S. Grognet). Enfin Xcas a reçu le 3ème prix aux Trophées du Logiciel libre 2007 dans la catégorie des logiciels scientifiques.

Aujourd'hui

Le développement de Giac/Xcas continue dans le même esprit que depuis le début du projet. Comme il n'y a qu'une personne (Bernard Parisse) pour écrire le code à la fois du noyau de calcul et de l'interface, celle-ci n'est pas aussi soignée que celle d'un logiciel commercial bien établi et il faut prévoir une période d'apprentissage avant d'en maîtriser toutes les fonctionnalités. Ceci dit, une bonne partie de cet apprentissage est de toute façon nécessaire si l'on souhaite se servir d'un logiciel de calcul formel (ou d'une calculatrice formelle). Nous nous efforçons, dans la mesure du temps disponible, d'implémenter toute suggestion d'amélioration précise, mais on ne peut pas non plus réaliser des miracles (toute personne souhaitant participer au développement logiciel, ou aider à la documentation sera la bienvenue !). Le forum de Xcas permet d'échanger sur les suggestions, les bugs, l'usage. Des pages web maintenues par des enseignants comme M. Gandit, G. Connan, J-J. Bataille, J_E. Visca, et d'autres que j'oublie, proposent des exemples de TP ou/et des explications pour faciliter la prise en main.

Une des forces de Xcas, qui peut motiver de passer le temps nécessaire à sa maîtrise, est de combiner tous les aspects habituellement séparés, on peut ainsi étudier successivement le même problème au tableur (en calcul exact, ou décimal avec un nombre de décimales au choix), par une construction géométrique (exacte ou approchée), par un calcul exact sur, par exemple, l'équation d'un cercle ou d'une droite. Cela permet également de traiter de manière beaucoup plus complète les thèmes du programme de la section scientifique du lycée. Nous proposons ci-dessous quelques extraits de TP et comptes-rendus, comme ceux qui ont été proposés dans notre atelier aux Journées APMEP de Besançon, TP utilisant en général au moins deux fonctionnalités de Xcas.

Mathématiques expérimentales avec Xcas

Notre intention n'est pas de fournir des documents qui permettent le bachotage en vue de l'épreuve expérimentale, qui devrait voir le jour, au baccalauréat de la série S. Il est de montrer comment on peut intégrer, dans le cours, conformément au programme de la série S, une approche expérimentale des mathématiques. L'expérimentation en mathématiques ne repose pas que sur l'utilisation des TICE. Parmi les TICE, l'utilisation des calculatrices, même les moins performantes, peut ouvrir la voie à une démarche expérimentale fort riche. Nous en sommes parfaitement convaincus. Cependant nous avons choisi de présenter comment on peut intégrer au cours de mathématiques « normal » l'utilisation de Xcas. Les extraits de TP et les réponses d'élèves que nous proposons ci-dessous pour illustrer notre propos se rapportent à une classe de terminale S[1].

Pourquoi avons-nous choisi de ne pas regarder directement du côté de l'épreuve expérimentale elle-même ? D'une part, les contraintes incontournables liées au fait qu'il s'agit d'une épreuve d'examen ne favorisent ni l'expérimentation réelle de la part des candidats, ni la richesse des sujets. La mise en place de cette nouvelle épreuve d'examen nous semble n'être qu'un prétexte pour impulser dans les classes une dimension plus expérimentale en mathématiques. D'autre part, les programmes de la série S (première et terminale), nous le savons tous, sont très chargés. Or les thèmes abordés dans les sujets proposés pour cette épreuve ne nous semblent pas toujours en adéquation avec le programme à traiter en terminale. Notre idée est donc qu'un bon entraînement tout au long de l'année dans le cadre des programmes devrait permettre aux élèves de réagir positivement lors d'une épreuve où c'est avant tout le côté expérimental qui prime. Nous n'excluons pas, évidemment, de proposer à nos élèves quelques sujets du type de ceux qui ont été proposés lors de l'expérimentation 2006/2007, pour qu'ils aient une idée de ce qui peut leur être demandé. Mais ceci est, pour nous, vraiment secondaire. Le principal est que les élèves, au travers de l'expérimentation mathématique, à l'aide de Xcas, s'approprient mieux les notions au programme en découvrant un aspect autre que celui que l'on développe dans le cadre d'un cours papier-crayon.

Les élèves vont régulièrement en salle informatique (en moyenne, environ une heure par quinzaine). Ils travaillent en binômes, mais, à l'issue de la séance devant ordinateur, ils

[1] Il s'agit de la classe de T6S (2007/2008) du lycée international Europole de Grenoble.

doivent rédiger un compte-rendu personnel, qui est relevé. Celui-ci porte principalement sur le problème mathématique traité dans le TP, il doit comporter une conclusion, mais il intègre aussi une partie qui relève de l'utilisation du logiciel. Certaines instructions, ou plutôt certains comportements à adopter dans son utilisation, sont en effet à mémoriser, sans lesquels la prise d'initiative devient impossible. Les énoncés fournis aux élèves sont en effet rédigés de façon à favoriser cette prise d'initiative, ils ne sont pas du type « presse-bouton ».

Pour illustrer notre propos, voici un extrait de l'un des TP (proposé en TS en novembre 2007), qui utilise à la fois le calcul formel et la géométrie dynamique. L'une[2] des parties de ce TP porte sur la détermination, dans le plan rapporté à un repère orthonormal, d'un lieu de points caractérisé par une condition portant sur leur affixe. Il s'agit de déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z-3}{z+i+1}$ soit un nombre réel. L'énoncé désigne par f la fonction de C dans C définie par $f(z) = \dfrac{z-3}{z+i+1}$.

** Avec XCAS, résoudre les équations f(z) = 1, f(z) = 2, f(z) = –1, f(z) = 1/2, f(z) = 1/3, et, dans chaque cas, visualiser à l'écran le point qui a pour affixe la solution de l'équation, si elle existe.*
** Dans le compte-rendu, on donnera l'ensemble des solutions pour chacune de ces équations et on rédigera la résolution de l'une d'entre elles, au choix.*
** Construire une figure dynamique qui permette de faire une conjecture précise sur l'ensemble E. Dans le compte-rendu, on rédigera la manière de procéder, ainsi que la conjecture obtenue.*

Les élèves doivent savoir saisir la fonction f, résoudre une équation dans C, puis placer un point d'affixe donnée. Une demi-page d'aide pour l'utilisation du logiciel est fournie aux élèves, mais elle reste succincte. En voici un extrait :

** Pour résoudre une équation comme, par exemple, f(z)=2i où f est une fonction de C (ensemble des nombres complexes) dans C, z est l'inconnue qui est un nombre complexe, on peut utiliser la commande* `solve` *: par exemple,* `solve(f(z)=2*i,z)` *renvoie la solution de l'équation f(z)=2i.*
** Pour n'importe quelle valeur du paramètre k, il peut être utile de résoudre l'équation f(z) = k. On pourra justifier que, si k ≠ 1, cette équation admet une seule solution, que l'on peut trouver en saisissant l'instruction* `solve(f(z)=k,z)`.
** A l'aide de la nouvelle fonction ainsi définie (de la variable k), qui est la fonction réciproque de f, on peut plus facilement construire des points du lieu cherché (on expliquera comment) : pour définir cette nouvelle fonction, notée g par exemple, il suffit de saisir* `g(k) :=`*……… (les pointillés étant remplis par l'expression obtenue pour* `solve(f(z)=k,z)`*, recopiée à la souris).*

Il faut avoir compris la nécessité de saisir d'abord la fonction f si l'on veut pouvoir résoudre une équation du type $f(z) = k$, de même que celle de recourir à un paramètre réel si l'on veut pouvoir rendre dynamique la figure en faisant varier le paramètre. Voici un extrait de la copie d'un élève (la rédaction et la mise en page sont intégralement respectées), représentative du travail d'une majorité de la classe, qui montre que l'utilisation de Xcas favorise une attitude tout à fait scientifique de la part des élèves, attitude qu'ils adopteraient difficilement dans un simple environnement papier-crayon.

Pour faire une figure dynamique nous permettant d'émettre une conjecture concernant l'ensemble E, on définit un paramètre. Pour cela, on tape :

```
assume (h=[0,-10,10])
```

On utilise ensuite Xcas pour résoudre l'équation f(z)=h.
Pour cela on tape :

---

[2] Elle est précédée d'une partie où les élèves doivent construire des points, un par un, qui appartiennent au lieu cherché.

$\boxed{\text{solve(f(z)=h,z)}}$
On obtient la solution S={[1/(-h+1)(-(-1-i)*h+3)]}.*
Enfin, pour faire la figure dynamique, on place le point M d'affixe, la solution S déterminée précédemment. Pour cela, on tape :
$\boxed{\text{M :=point([1/(-h+1)*(-(-1-i)*h+3)])}}$.
En faisant varier h, on remarque que les points M décrivent une droite d'où la conjecture C_1.
<u>Conjecture C_1</u> : Pour tout f(z) réel, l'ensemble E est une droite.

Cet élève prend l'initiative de définir un paramètre *h*, de résoudre l'équation *f*(*z*) = *h* et il comprend que le lieu cherché est celui des points *M* qui ont pour affixe la solution de cette équation, fonction de *h*.

Ce même TP demande ensuite une preuve faite à l'aide de Xcas, puis « à la main », de la conjecture sur la nature de l'ensemble des points *M*, d'affixe *z* telle que *f*(*z*) est un nombre imaginaire pur. L'extrait suivant d'un compte-rendu d'un autre élève montre une approche expérimentale avec Xcas, mais cette fois dans le domaine de la preuve. Cet élève a des résultats faibles en devoir surveillé, mais se révèle beaucoup plus efficace devant un ordinateur. Le compte-rendu montre qu'il comprend ce qu'il fait.

Grâce à Xcas on peut obtenir l'expression de la partie réelle de f(z) en fonction des parties réelle et imaginaire de la variable z.
Dans le menu « edit », on sélectionne ajouter equation, puis re(f(z)), ce qui nous donne :

$$\frac{(re(z)-3)\times(re(z)+1)}{(re(z)+1)^2+(im(z)+1)^2}-\frac{\left(im(z)\times(im(z)-1)\right)}{(re(z)+1)^2+(im(z)+1)^2}.$$

Pour simplifier l'expression on fait « simplify(re(f(z)) », ce qui nous donne :

$$\frac{im(z)^2+im(z)+re(z)^2-2re(z)-3}{im(z)^2+2\times im(z)+re(z)^2+2\times re(z)+2}$$

On trouve le lieu avec Xcas :
dans le menu Geo, cercle, on précise : cercle(M_1,M_2,M_3).
Un cercle qui comprend tous les points trouvés précédemment apparaît, on remarque que lorsqu'on fait varier la valeur M_k, la position du point M_k varie sur ce cercle.
Le logiciel nous donne plus d'informations sur ce cercle :
dans le menu Geo, on sélectionne cercle, puis on précise cercle(M_1,M_2,M_3).
Xcas nous donne : cercle(point(1,-1/2),sqrt(17)/2) et les coordonnées du point centre du cercle qui sont Ω (1,-1/2), ainsi que son rayon r=√17 /2.

Puis il entreprend la preuve « à la main ».

Ce texte comporte certes des maladresses, mais il montre une approche expérimentale de la preuve, dans deux directions : l'expression simplifiée de la partie réelle de *f*(*z*) et l'obtention du centre et du rayon du cercle qui contient le lieu cherché. La recherche de l'expression de la partie réelle de *f*(*z*) avait été suggérée en classe, mais il n'est pas sûr qu'alors cet élève ait compris l'intérêt que cela pouvait présenter pour reconnaître la nature du lieu. Comme il avait placé plusieurs points du lieu cherché, dont ceux qu'ils nomment *M_1, M_2 et M_3*, il demande au logiciel des « informations sur le cercle » puisqu'il a reconnu la nature du lieu cherché. Avant de faire la preuve « à la main » (qu'il rédige ensuite), l'élève sait ce qu'il doit obtenir, c'est un avantage considérable, qui l'aide à reconnaître l'équation d'un cercle (privé d'un point).

Chaque chapitre du programme de TS (mais aussi de celui de1è S) peut donner lieu à un TP, articulé avec le cours, où l'élève ait des initiatives à prendre, dans la recherche et dans la preuve d'un résultat, TP qui lui permettre de mieux appréhender les notions au programme. Le fait que Xcas soit téléchargeable gratuitement permet aussi aux élèves un travail plus approfondi, puisqu'ils peuvent travailler chez eux ou sur les ordinateurs disponibles au lycée.