Des maths au jour le jour

Jean-Christophe Deledicq ([1])

L'atelier a consisté à présenter différentes expériences (§1) permettant de provoquer chez les élèves l'envie de faire des maths, un peu chaque jour, et ce en dehors des heures normales de cours. Nous avons aussi discuté les aspects didactiques de ces idées (§2), enfin chaque participant s'est essayé à la recherche de quelques problèmes et petits exercices (§3).

1. Trois expériences.

1.1 Les 7 problèmes de la semaine, ou un problème chaque jour.

Depuis 4 ans, sur le site www.mathkang.org, il est possible de télécharger gratuitement, chaque lundi, une page de 7 petits problèmes dont les solutions sont données le dimanche soir. Ces 366 questions ont aussi fait l'objet d'une publication chez ACL : le calendrier perpétuel.
La question du jour était :
« remplacer chacun des 9 tirets par les neufs chiffres de 1 à 9, chaque chiffre n'étant utilisé qu'une seule fois, et ce de manière à ce que les trois égalités suivantes soient justes : - - × - = y   - - / - = y   - - + - = y. Combien vaut y ? »
Solution donnée en fin d'atelier, et à la fin de cet article.

Depuis cette année, il est aussi possible de télécharger chaque semaine un autre ensemble de 7 questions tirées de manuels scolaires d'avant 1905 et de niveau maximun du certificat d'étude. Un CD de ces 366 questions sera disponible en mai 2008 sous le titre : « les maths de nos grands pères ».
L'idée est d'afficher ces 7 problèmes en début de semaine et de laisser chercher les élèves toute la semaine, à leur rythme.
Exemples tirés des maths de nos grands pères :

- *Une salle de classe, ayant 8 mètres de long sur 7m80 de large et 4m20 de hauteur, doit être cubée pour qu'on fixe le nombre d'élèves qu'elle peut contenir. Réglementairement, il faut un volume de 4 mètres cubes par élève, mais il peut être toléré 3 mc 020. Combien par tolérance, la salle pourra-t-elle recevoir d'élèves ? (La 2e année d'arithmétique, 1884).*
- *Dans un pensionnat de 720 élèves on donne chaque jour un litre de vin pour 4 élèves : quelle est la dépense de 320 jours de l'année scolaire si un tonneau qui coûte 228 fr. donne 320 bouteilles et que 4 bouteilles contiennent 3 litres ? (Nouveau traité d'arithmétique décimale, 1836).*

1.2 La question du mois.

J'avais choisi une série facile, souvent proposée à des écoliers de cycle 3. Il s'agissait, en plaçant des signes opératoires entre sept chiffres 2, d'obtenir tous les entiers de 1 à 32 et plus si possible.

---

[1] Kangourou des mathématiques

Afin de faire comme en classe, j'avais affiché les questions (des paragraphes 1, 2 et 3) dans le hall d'accueil et des exposants de ces journées Apmep. Quelques inconnu(e)s s'étaient amusé(e)s à donner des solutions pour les premiers entiers.
Très vite, quelques réponses ont été écrites et nous avons poursuivi la recherche dans l'atelier.

Le premier but, que chacun voit bien, de ce genre d'activité est d'encourager le calcul mental et la manipulation des chiffres et des opérations de bases.
Ce type de problèmes avec plusieurs solutions ressemblantes a aussi pour but de faire chercher longtemps autour d'une même question, calculer, essayer, tourner le problème dans tous les sens, trouver une idée, l'exploiter, en chercher une autre …
Un autre but est de montrer qu'un problème qui a l'air simple peut être difficile et que derrière un énoncé simple se cache peut être bien des choses à découvrir.
Un autre but encore, important lui aussi, apparaît lorsque le « jeu » a commencé et que plusieurs personnes ont déjà apporté des solutions. Ceux qui ne trouvent rien, ou presque, voient alors des solutions qui leur donnent des idées. Certains, même, en découvrent plus que celui qui a trouvé l'idée. Par exemple, comprendre que l'on peut faire 1 en divisant un nombre par lui-même et qu'ensuite on peut le soustraire, le multiplier ou l'ajouter à un calcul, fait découvrir des mines de solutions.
Voyez par exemple : $(2+2+2)! + 2 + 2 - 2/2 = 27$ $(2+2+2)! + 2 + 2 + 2 - 2 = 28$
$(2+2+2)! + 2 + 2 + 2/2 = 29$.

Variante : Écrire la date, par exemple 30 10 2007, et trouver un calcul qui fasse 100.
Dans la variante, on peut « coller » les chiffres par exemple 3 et 0 pour faire 30, mais on ne change pas l'ordre des chiffres. On écrit des signes entre eux.
Voici une première solution : $-30 - 10 + (20 \times (0+7)) = 100$ (1)
Une solution a été donnée par l'un des participants :
$\sin(30) \times 10 \times 20 + (0 \times 7) = 100$ (2)
Autres solutions $(3 \times 0) + 10^2 + (0 \times 0 \times 7)$ (3)
ou $(3 \times 0) + 10 \times (2 + 0! + 0 + 7) = 100$ (4)

On comprend bien, à l'analyse de ces solutions, que la vision d'une solution d'une personne peut donner des idées aux autres. La première solution ci-dessus est purement arithmétique ; mais la (2) fait intervenir une fonction, d'où une nouvelle source d'idées :
$\mathrm{int}(\ln(30 \times 10)) \times 20 + (0 + 7)$ ou $\mathrm{int}\left(\sqrt{30}\right) \times (1+0) \times 20 + (0 \times 7) = 100$
La solution (3) propose une autre astuce, utiliser le 2 comme un carré. Ce qui peut suggérer aussi d'utiliser le premier 3 de la façon suivante : $\left(\sqrt[3]{10^{(2\times 0) - 0! + 7}}\right) = 100$
Enfin la solution (4) fait intervenir la factorielle, et c'est un nouveau gisement de solutions qui s'ouvre :
$-3! - 0 - 1 + 102 - 0! - 0! + 7 = 100$ ou $-3 - 0! + (10 + 2 + 0!) \times (0! + 7) = 100$
ou encore $+3 - 0! + (10 + 2 + 0! + 0!) \times 7 = 100$.

Avec la variante qui autorise toute sorte de fonction, on constate bien vite une appropriation par les élèves de fonctions comme *sin*, *cos,* voire *ln* (au lycée), différentes de celles usuellement manipulées en classe.

1.3 La Joyeuse Muraille des Sagacités (JMS).

Cette idée vient d'un professeur de maths du Lycée Robespierre d'Arras, Jean Michel Slowik. Nous l'avons mise en place lors de camps de vacances Kangourou puis lors de stages de préparation de l'équipe de France aux Olympiades, et ensuite dans plusieurs animations, camps de vacances, semaines de classe verte et classes de maths (de l'école au lycée). Le principe est d'afficher des problèmes, un par feuille ; toutes les feuilles sont mises sur un mur pour former une muraille de problèmes. L'objectif (des élèves, des stagiaires, des participants) est de « détruire » la muraille, autrement dit de résoudre tous les problèmes dans un temps donné. Le temps donné peut varier d'une semaine, en stage, à un mois, en classe.
Chaque participant apporte ses réponses au professeur qui les corrige avec des commentaires et les affiche à côté du problème. Si la solution est fausse ou incomplète, on attend que celle-ci soit corrigée ou complétée par le même élève ou un autre. Si la solution est juste, on attend que tous les autres aient pu la voir, la noter, la comprendre, voire la commenter, puis (après un jour ou deux) le problème est retiré de la muraille.
Les problèmes proposés pour une muraille sont des problèmes de recherche, pour lesquels on demande une démonstration.
Le premier objectif est de donner des problèmes qui restent, plusieurs jours parfois, à trotter dans la tête des participants.
Le second objectif est de créer des discussions entre les participants autour des solutions proposées avant d'enlever le problème de la muraille.
Remarquons qu'il est nécessaire d'avoir de nombreux problèmes dans la muraille, de types différents et de difficulté variable, de manière à ce que chaque participant puisse être tenté d'en chercher 3 ou 4 sans que ceux-ci aient trop de chance d'être trop rapidement résolus par d'autres.
Voyez au paragraphe 3 des exemples extraits de notre muraille.

2. Côté didactique

2.1 La P.N.L.

La Programmation Neuro-Linguistique (PNL) souligne que la mémoire, comme l'expression, privilégie, pour chaque individu, l'un des cinq canaux sensoriels (auditif, visuel, kinésthésique, gustatif, olfactif). L'enseignement traditionnel des mathématiques s'appuie très majoritairement sur le visuel (à de rares exceptions auditives près). Or, tous les élèves ne « voient » pas les problèmes de la même façon et « sentent » ou « ressentent » autrement les solutions, ils s'y « entendent » à leur manière... Les activités que j'ai présentées dans la 1ère partie, permettent de libérer les sens, de laisser marcher les neurones, de laisser courir les idées. Certains élèves s'y sentiront mieux, y percevront différemment et plus, à leur manière, le sens des maths.

On constate à l'expérimentation, comme avec les QCM du Kangourou - dans un autre registre - que ces activités mettent en valeur de nouveaux élèves qui deviennent ainsi « bons en maths ». En effet, le fait de ne pas être en condition de classe, mais de pouvoir, à la récré, à la maison, en marchant, essayer plusieurs démarches permet avec le temps de bien s'imprégner d'une question et de trouver le bon canal pour la comprendre.

2.2 Les maths en marchant.

Rappelons cette maxime des écoles de Steiner : « *Marcher - parler - penser sont trois phases essentielles du développement de l'enfant. Marcher et parler constituent la base pour le développement de la pensée* ».
Notons aussi ces quelques citations :
- « *Le meilleur moment, pour moi, pour penser, c'est lorque je marche sur un chemin légèrement pentu* » (Nietzsche).
- « *La marche a quelque chose qui anime et avive mes idées ; je ne puis presque penser quand je reste en place ; il faut que mon corps soit en branle pour y mettre mon esprit* » (J.-J. Rousseau).
- « *Mes pensées dorment si je les assis. Mon esprit ne va, si les jambes ne l'agitent* » (Montaigne, "Les essais").
- « *C'est en marchant que j'ai eu mes pensées les plus fécondes* » (Soren Kierkegaard).

Et rappelons enfin le texte de Poincaré tiré du chapitre 3 de "Science et Méthode" intitulé "L'invention mathématique" :
« À ce moment, je quittai Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien de mes pensées antérieures parut m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuschsiennes sont identiques à celles de la Géométrie non-euclidienne (…)
Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies sont identiques à celles de la Géométrie non euclidienne. (…)
Ce qui frappera tout d'abord, ce sont ces apparences d'illumination subite, signes manifestes d'un long travail inconscient antérieur. (…)
Il y a une autre remarque à faire au sujet des conditions de ce travail inconscient : c'est qu'il n'est possible et, en tout cas, qu'il n'est fécond que s'il est, d'une part, précédé, et, d'autre part, suivi d'une période de travail conscient.
Mais, on ne peut pas parler de maths en marchant sans rappeler qu'Aristote, il y a environ 2350 ans, donnait ses leçons en se promenant dans le peripatos, c'est-à-dire sous les portiques dans le gymnase du Lycée. Cette façon d'enseigner et de transmettre se nomma donc le péripatétisme. L'école des péripatéticiens (II^{e} siècle)

fut ensuite importée chez les musulmans par Averroès et c'est grâce à eux que l'Occident médiéval connut les œuvres d'Aristote.

Tout ceci pour souligner l'importance de l'inconscient dans le travail de "l'intellect" et le fait que la marche est l'un des éléments moteurs de la pensée, propice aux bons déclics.
Les énoncés de la JMS, les problèmes du jour ou les problèmes de la semaine ou du mois, permettent de "faire des maths en marchant". Il est important de souligner, comme le dit Poincaré, que cette activité doit être précédée d'un travail conscient. Les problèmes sont donnés en classe, pendant une heure de cours et peuvent faire l'objet d'une présentation par l'enseignant. Puis, après un certain temps (une semaine ou deux), ces mêmes problèmes sont l'objet d'une institutionnalisation et d'une validation en classe. La marche n'est que très rarement autorisée en classe, c'est pourquoi ce type de problèmes - qui peuvent aussi être posés dans le bus lors d'une sortie scolaire - est vraiment complémentaire des cours.

3. Quelques problèmes pour chercher

Extraits de la Joyeuse Muraille des Sagacités :

Le concombre déshydraté : Un concombre est constitué de 90 % d'eau et pèse 500 grammes. Après une journée, il n'est plus constitué que de 80 % d'eau. Quel est alors le poids du concombre ?

Les guerriers : Dans une tribu de 90 guerriers, chaque guerrier décore sa lance avec 9 plumes rouges ou blanches. Les plumes sont fixées sur la lance en ligne de telle sorte que 2 plumes rouges ne peuvent pas être côte à côte. Est-ce que tous les guerriers peuvent avoir des lances différemment colorées ?

Les chevaliers : N chevaliers vivent dans un royaume. Ils sont chacun l'un envers l'autre soit ami, soit ennemi. Chaque chevalier a exactement 3 ennemis. Les rapports entre les chevaliers sont régis par la règle : « Les ennemis de mes amis sont mes ennemis ». Quelles sont les valeurs possibles de N ?

4. Fin d'atelier, solutions des exercices

Solution du problème du jour : $39 \times 1 = 45 - 6 = 78 / 2$ et $y = 39$
Solutions des grands-pères : Volume de la salle : $8 \times 7{,}80 \times 4{,}20 = 262{,}08$ m^3.
Nombre d'élèves tolérés : $262{,}08 / 3{,}02 \approx 86{,}78$, soit 86 élèves.
Un tonneau donne $320 \times 3 / 4 = 240$ litres.
Il faut à l'année $720 \times 320 \times 1 / 4 = 57\,600$ litres.
Cela coûtera donc : $57\,600 / 240 \times 228 = 54\,720$ francs.
Solutions de la JSM : le concombre fait 250 g. Pour les guerriers, on pourrait se lancer dans le dessin de toutes les lances, mais un raisonnement sur le nombre n de plumes des lances fait apparaître une suite qui est celle de Fibonacci.
Pour les chevaliers, il y a deux solutions possibles $N = 4$ ou $N = 6$.
Pour recevoir les solutions des sept 2 et des autres problèmes, le texte complet en pdf de Poincaré, ou toute autre précision, vous pouvez m'écrire à :
Kangouroudesmaths@mathkang.org