Les interactions entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire : cas des équations différentielles en terminale S

Fernand MALONGA MOUNGABIO
IUFM de Lyon, Université Lyon 1
DIDIREM, Université Paris 7
malonga@math.jussieu.fr

1. INTRODUCTION

Le programme actuel de mathématiques de la classe de terminale du lycée (2002) préconise un enseignement coordonné des équations différentielles entre les mathématiques et la physique. Il incite les professeurs des deux disciplines à mener un travail conjoint autour de ce thème qui prend alors une place de premier plan, tant du point de vue de la part qui y est consacrée en physique que du point de vue de l'approche mathématique de la fonction exponentielle. C'est le statut d'outil qui est mis au premier plan.

Par ailleurs, à la lumière du contenu des anciens programmes des mathématiques, les équations différentielles sont traitées comme objet mathématique, son caractère outil apparaît ensuite dans la partie application.

Il en résulte un changement d'optique dans le traitement des équations différentielles. De plus, la méthode d'Euler introduite dans les nouveaux programmes des deux disciplines prend appui sur les TICE (tableur/grapheur) pour contribuer normalement à la synergie mathématiques-physique.

Cette nouvelle optique nécessite un dialogue entre les spécialistes des deux disciplines pour faire vivre cette pratique interdisciplinaire dans ce cas précis. Or il se trouve que, dans la réalité des classes, ce dialogue est peu ou pas du tout, en raison de certaines contraintes institutionnelles.
Une telle intention didactique préconisant une synergie entre deux disciplines scientifiques doit se concrétiser dans la pratique et en premier lieu au niveau des manuels scolaires, éléments du curriculum réel (Perrenoud 1993). Ainsi, un certain nombre de questions se posent alors quant à cette continuité didactique : quelle évocation de l'autre discipline, quelle part de la modélisation et du traitement des modèles est dévolue à chaque discipline, quelle coordination des méthodes, des notations, du vocabulaire, et, *in fine*, quels types de tâches donnés aux élèves et quelles compétences attendues/évaluées.

Le but de cette communication est de montrer, à partir d'une analyse de quelques situations de modélisation, que la continuité didactique que l'on est en droit d'attendre au regard des programmes et des intentions dudit programme se heurte à de nombreux obstacles.

2. ANALYSE DE MANUELS DE MATHÉMATIQUES DE TERMINALE S

L'analyse que nous avons faite des manuels édités lors de la mise en place des programmes a porté sur différents points relatifs à la présence d'équations différentielles. Analyser la place accordée à l'objet "équation différentielle" dans le cadre de la modélisation des phénomènes physiques c'est aussi relever les éléments de rationalité (explicites et implicites), qui permettent le passage de la réalité pseudo-concrète physique au(x) modèle(s) symbolique(s), de l'équation différentielle du physicien à l'équation différentielle du mathématicien et le cas échéant, du traitement (mathématique) de l'équation différentielle au retour à la situation de départ (physique). Il s'agit donc d'une part de relever ce que nous appelons le *champ de départ* de la situation à traiter (cdd) qui est le champ de référence, et le *champ de traitement* de cette situation (cdt) et d'autre part, d'analyser les transitions cdd ➔ cdt et cdt ➔ cdd qui correspondent donc à des changements de cadre de rationalité/d'intelligibilité en examinant la nature des questions, les glissements sémantiques, les changements de statut, etc., à l'œuvre dans les transitions.

Examinons le cas de la situation suivante (étude d'un circuit électrique) :

101 Circuit électrique

Un circuit est constitué d'un condensateur de capacité $C = 75 \cdot 10^{-6}$ farads, d'une résistance $R = 2 \cdot 10^4$ ohms, d'un générateur g et d'un interrupteur.

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur délivre alors une tension V.

La tension U aux bornes du condensateur est alors solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (1) :

$$U(t) + RCU'(t) = V(t) .$$

On suppose que $V(t) = 6\,e^{-\frac{2}{3}t}$ où t est exprimé en secondes.

De plus la charge initiale du condensateur impose la condition :

$$(2) : \ U(0) = \frac{1}{3} V(0) .$$

a. Démontrer que la fonction U définie sur $[0 ; +\infty[$ par $U(t) = (4t + 2)\,e^{-\frac{2}{3}t}$ vérifie la condition (2).

b. Montrer que la fonction U est solution de l'équation différentielle (1).

c. Étudier le sens de variation de U et calculer la limite de U en $+\infty$.

d. Démontrer que l'équation $U(t) = 10^{-3}$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 20[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 1 seconde.

e. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts.

Pour quelles valeurs de t ne détecte-t-il plus la tension $U(t)$?

Passage champ de départ – champ de traitement :

Cet exercice a comme champ de départ l'électricité, et plus précisément le circuit RC. On peut remarquer que le texte fournit déjà l'équation différentielle qui régit le phénomène. On peut donc considérer que la situation est modélisée dès le départ.

Le texte présente quelques abus de notation et de formulation que nous avons signalés ci-après.

- La phrase d'introduction "…le générateur délivre alors une tension *V*" n'y prépare pas car on ne dit pas que *V* n'est pas une constante (contrairement à *C* et *R*). Un élève qui sait ce qu'est un générateur de tension, pensera que *V* est constante et risque de ne pas comprendre ensuite la fonction exponentielle donnée pour *V(t)*.
- Il est particulièrement étonnant de voir un générateur délivrer une tension en exponentielle décroissante. Une telle situation ne se rencontre jamais car cela suppose que ce générateur est soit défectueux, soit cesse de fonctionner dès qu'on ferme le circuit.
- Au niveau du vocabulaire, il ne convient de pas de dire que le générateur "délivre une tension" (il impose une tension et délivre un courant). Dans le même esprit, la phrase "la charge initiateur du condensateur impose la condition …" est certes mathématiquement correcte. Mais, outre le fait que l'on ne comprend pas pourquoi le condensateur (qui est un récepteur) imposerait sa tension initiale au générateur, la condition est donnée sous forme purement mathématique (et non pas une par une spécificité physique).

S'agissant du passage du champ de départ au champ de traitement, nous constatons que l'équation différentielle proposée (second membre non constant) n'est pas au programme de mathématiques de la classe. L'exercice doit donc contenir, comme on le constate effectivement ensuite, un élément / une étape supplémentaire qui en permette la résolution. De sorte que la première question demande simplement de « démontrer » (en fait, vérifier) la conformité de l'expression de U(t) à la relation U(0) = 1/3V(0). La démarche attendue consiste à calculer les valeurs numériques des fonctions U et V en 0 puis de comparer U(0) et V(0)/3. C'est une tâche mathématique – au demeurant triviale – qui est demandée.

De même, les questions b, c et d relèvent d'un traitement purement mathématique.

Comme on le voit, ce sont là des questions que l'on rencontre souvent – en fait, elles sont presque « rituelles » – dans l'étude d'une fonction.

Retour au champ de traitement

La dernière question[1], qui demande d'interpréter le résultat obtenu à la question précédente, propose un retour à la situation physique. Mais ce retour, ambigu du point de vue de la physique, est "symbolique" car on ne sait pas ce que peut être un appareil qui mesure *U(t)*. D'ailleurs, *U(t)* au sens strict, est la valeur numérique de la fonction "tension" *U*. Cet appareil n'existe pas.

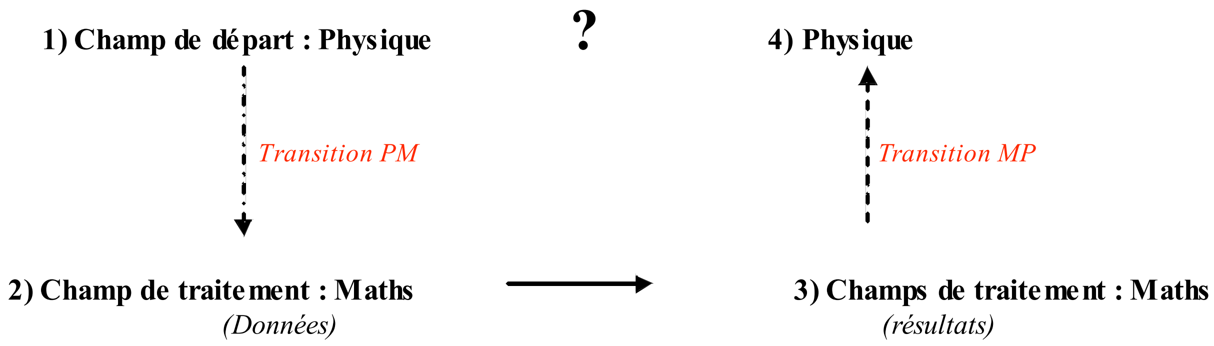
Par ailleurs, *U(t)* étant la valeur numérique de la fonction *U* en t, la représentation symbolique souhaitée ici pour cette équation différentielle est $U + RC\ U' = V$ en précisant que les tensions *U* et *V* sont fonction de temps. Ceci serait en accord avec les notations adoptées par l'auteur du manuel, surtout qu'en classe l'équation différentielle "standard" d'une équation différentielles du premier ordre est $y' = ay + b$.

3. SYNTHÈSE

Du point de vue de la modélisation, les situations proposées dans les manuels sont déjà modélisées. En effet, dans la quasi-totalité des cas traités, aussi bien en activité introductive, en travaux dirigés qu'en exercices, la mise en équation différentielle est prise en charge par l'énoncé. L'équation différentielle qui régit le phénomène à étudier, est déjà donnée ; des indications pour le traitement de la tâche sont souvent données. L'étude dans le champ de traitement des équations différentielles relève généralement du seul cadre des mathématiques. Elle consiste à procéder par des manipulations (en générales des substitutions) pour retrouver l'équation différentielle (qui est d'avance sue) ou alors à vérifier qu'une fonction proposée dans la situation est solution de l'équation différentielle donnée. Quant au traitement proprement dit de l'équation différentielle c'est-à-dire sa résolution, la tâche de l'élève se réduit à reconnaître le type d'équation et à appliquer la procédure (méthode) vue en cours. Il nous semble que le contexte choisi (sciences expérimentales) pour la mise en œuvre de la coordination mathématiques-physique, n'est pas assez exploité. Ce serait l'occasion de se servir des éléments de rationalité issus de l'enseignement de la physique pour développer un début d'apprentissage du processus de modélisation.

Ce constat montre que le jeu de cadre de rationalité attendu, dans le but d'une continuité didactique, est tronqué. En général, voici comment on peut schématiser le traitement des situations de modélisation conduisant à une équation différentielle :

[1] Cette question est particulièrement intéressante dans la mise en œuvre de la relation mathématiques - physique. Elle demande une interprétation (physique) du résultat obtenu. Ce type de questions est souvent inexistant dans la plupart des situations de modélisation rencontrées dans les manuels de mathématiques.



La transition physique – mathématique (PM) est assurée très souvent par l'énoncé. La tâche qui revient à l'élève est le traitement mathématique du problème (passage 2 - 3). De même, dans la plupart des situations analysées, il y a très peu de tâches relatives à la transition mathématique - physique (MP). De plus, même quand le retour champ de départ (physique) est envisagé, la manière dont les questions sont formulées n'indique pas toujours de façon explicite le recours au passage 4 - 1 (physique – physique), c'est-à-dire d'apporter une réponse physique à la question posé dans ce cadre là…

La multiplicité des exercices « habillés » peut alors constituer un obstacle pour atteindre l'objectif de la continuité didactique souhaité.

BIBLIOGRAPHIE

BO hors-série n°4, 30 août 2001. Programme de l'enseignement des mathématiques en classe terminale de la série scientifique. p. 63-72.

Chevallard Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19. n° 2. p. 221-265.

Duval R. *Sémiosis et pensée humaine* ; *Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Éditions Peter Lang. Berne 1995, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation.

Malonga F. (2006) L'enseignement des équations différentielles à l'interface mathématiques - physique dans l'enseignement secondaire français. In Actes du colloque Espace mathématique francophone, 2006, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*. volume 7.1.

Malonga, Beaufils & Parzysz (2007) : Les équations différentielles du premier ordre en physique en terminale S : le lien avec les mathématiques en question. *Bulletin de l'Union des Physiciens (BUP). A paraître.*

Malafosse, D. Lerouge A. et Dusseau J.-M. (2001) Étude en inter-didactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : changement de cadre de rationalité, *Didaskalia* n°18, p. 61-98.

Perrenoud Ph. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (Éd), *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui*, Paris : ESF, p61-76.