Donner du temps à nos élèves pour entrer dans un problème de construction géométrique

Valentina CELI et Annie BESSOT(*)

Résumé. Pourquoi donner du temps à nos élèves pour entrer dans un processus de construction géométrique ? Comment et quand donner ce temps ? A partir du matériel recueilli lors de nos observations dans une classe de Troisième, nous tentons ici de répondre plus ou moins explicitement à ces questions.
Le contenu de cet article s'appuie sur le travail du groupe DICO (DIdactique au COllège) de l'IREM de Grenoble[1].

Notre travail a pour origine certains résultats de la recherche de Celi (2002) portant sur *une comparaison de l'enseignement de la géométrie en France en Italie pour des élèves de 11 à 16 ans*[2].

Dans les manuels italiens, les constructions géométriques de base à l'aide de la règle et du compas occupent une place marginale dans l'ensemble du programme de géométrie de l'enseignement obligatoire. Au contraire, dans les manuels français, les constructions géométriques sont présentes partout : conformément aux prescriptions officielles de l'enseignement obligatoire, des problèmes de construction sont très souvent proposés soit pour introduire et/ou réinvestir des connaissances soit pour des « raisons d'ordre et de soin ».

Néanmoins, les résultats issus de ce travail de comparaison montrent qu'aussi bien les élèves italiens que les élèves français rencontrent des difficultés à articuler les informations graphiques et verbales ; à distinguer un programme de construction de sa justification ainsi que les hypothèses de ce qui en découle.

C'est ainsi que nous avons entrepris un travail dont le questionnement initial est le suivant : *comment faire pour que l'activité de construction soit pour l'élève le point de départ d'une activité mathématique ? Comment faire pour que le dessin réalisé permette l'entrée dans un processus de preuve et de validation ? Quel est le rôle joué par les instruments de dessin ?* En choisissant de nous intéresser aux problèmes de construction, nous avons délimité une notion géométrique, celle de la *tangente à un cercle*.

I. Un questionnaire comme élément d'une enquête sur la vie institutionnelle des problèmes de construction

Les difficultés que des élèves de Collège peuvent rencontrer en géométrie ne sont pas sans relation avec la place et le rôle des constructions géométriques dans l'enseignement et dans la pratique des enseignants en France et à l'étranger. C'est pour cette raison que nous avons conçu un questionnaire s'adressant aux enseignants de Collège français et étrangers (cf. annexe).

Dans l'atelier que nous avons animé aux journées nationales de l'APMEP qui ont eu lieu à Besançon, nous avons pu recueillir les réponses des participants à ce questionnaire.

(*) Groupe DICO, IREM de Grenoble

[1] Ont participé à ce travail Hugues Baudrillard, Serge Cecconi, Christine Marcel, Josiane Roussel. Nous remercions tout particulièrement Hugues (Collège International, Grenoble), Serge (Collège Plan Menu, Voiron) et Josiane (Collège Simone de Beauvoir, Crolles) de nous avoir ouvert leur classe durant l'année scolaire 2004-2005. Nous remercions également leurs élèves.

[2] Celi V. (2002), *Une comparaison de l'enseignement de la géométrie en France en Italie pour des élèves de 11 à 16 ans. Effets sur leur formation.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, IREM.

II. Une hiérarchie des messages comme indice des attentes institutionnelles au Collège en France

A propos de la question 2 du questionnaire[3], il nous paraît intéressant de hiérarchiser les messages en fonction de l'évaluation exprimée par les enseignants qui ont rempli ce questionnaire.

En conformité avec les résultats issus du dépouillement des questionnaires recueillis avant l'atelier, dix participants à l'atelier (sur quatorze) mettent en premier le message 2. Néanmoins, lors de l'atelier, nous avons saisi l'occasion pour demander aux participants d'expliciter les raisons de cette hiérarchie. Voici, ci-dessous, quelques arguments :

- « les objets introduits sont clairement définis » ;
- « un essai de justification est présent » ;
- « on prend en compte la généralisation du problème (contrairement au message 1, l'angle est donné sans mesure) ».

Remarquons que trois participants ont toutefois classé en premier le message 3 :

- « tout dépend de ce que l'on fait avant et quel est objectif fixé : bien que le message 3 présente des défauts (point de contact, distance absents), il s'avère intéressant comme point de départ pour une activité : le centre est le point de départ de la construction, la bissectrice est aussi présente ».

Finalement, le message « rejeté » est celui qui ne tient pas compte de la généralisation du problème (message 1) ; suivant les objectifs visés par l'enseignant et le niveau scolaire des élèves, les exigences se voient modifiées, ce qui permet donc d'accepter aussi le message 3 : ce dernier pourrait permettre dans la classe de s'interroger sur ses lacunes et ses imprécisions.

Mais, dans quelles conditions les trois messages inclus dans le questionnaire ont-ils été produits ?

III. La mise en scène d'un problème de construction et ses raisons

Prenons un peu de temps pour exposer la mise en scène du problème et analyser les choix et les raisons de cette mise en scène.

Organisés par équipes de deux ou de trois, des élèves d'une classe de Troisième ont reçu une fiche[4] dont le texte est donné dans l'encadré 1 ci-après.

> **Binôme n°**
> **Nom :** **Prénom :**
> **Nom :** **Prénom :**
> Écrire un programme de construction qui permette à un camarade de 3ème de construire un cercle tangent aux côtés d'un angle donné.
> ATTENTION ! TOUT DESSIN DANS LE PROGRAMME DE CONSTRUCTION EST INTERDIT
> Vous ne devez jamais utiliser les mots « tangent », « tangente », etc.
> Votre programme sera transmis à un binôme d'une classe de 3ième d'un autre établissement.
>
> ✂---
> Programme

Encadré 1 – Texte de la fiche distribuée aux équipes

[3] Nous conseillons au lecteur de se reporter à la question 2 du questionnaire figurant en annexe.
[4] La fiche réelle est présentée sur une feuille en format A4.

Le problème choisi conduit à revisiter une notion, celle de tangente à un cercle, déjà enseignée en Quatrième et pour laquelle la distinction entre *dessin* et *figure*[5] est particulièrement cruciale. Est-ce que cette distinction est présente dans les stratégies des élèves ? Comment peut-on l'observer ou lui permettre d'être observable par l'enseignant ?
La mise en scène du problème dans la séquence doit permettre de donner le temps aux élèves pour engager une réflexion sur leurs procédés de construction, pour débattre sur la validité de leurs procédés et entrer ainsi dans une véritable géométrie expérimentale.
Le choix de mettre les élèves par *équipe de deux* permet, au travers des interactions, l'extériorisation verbale de connaissances, de projets et de prises de décisions et ainsi l'entrée dans un processus de preuves et réfutations pour convaincre le partenaire. Ce choix doit aussi permettre d'augmenter les chances de l'observateur (qui peut être l'enseignant) d'observer des contradictions entre différentes stratégies liées à des connaissances différentes, la présence ou l'absence de la distinction figure et dessin dont nous avons parlé plus haut ainsi que quelques difficultés de ses élèves et la manière dont ils tentent de les surmonter.
Chaque équipe doit communiquer *par écrit* une solution commune *à des pairs absents*. L'écriture du programme de construction pour être utilisé par d'autres élèves inconnus – sur lesquels les émetteurs n'ont pas de contrôle – devrait favoriser la prise de conscience et la prise en charge de problèmes de généralisation.
Si le message avait été adressé à l'enseignant, les élèves auraient répondu par rapport aux attentes de l'enseignant, et non (seulement) par rapport à la production d'une solution générale et fiable pour *un autre ayant les mêmes connaissance, les mêmes difficultés*.
Pour la consigne, nous avons choisi :
- *une formulation en termes généraux*, en particulier sans mesure, pour favoriser des messages produisant des dessins interprétables comme des modèles matériels d'une figure géométrique ;
- *de ne pas accompagner l'énoncé du problème d'un dessin* car, en accord avec Gobert (2007)[6], « la présence d'un dessin dans un énoncé de problème *a priori* géométrique, fait basculer celui-ci dans le domaine des problèmes spatio-graphiques, ne permettant pas aux élèves de repérer les caractéristiques liées au premier type de problème » ;
- d'utiliser une expression mathématique courante *« angle donné »* (Est-elle familière ? Sinon, comment peut-elle être comprise ?) ;
- d'*interdire l'introduction de tout dessin dans le message*, cela pour que les élèves rédigent des énoncés de nature géométrique ; de plus, le dessin de la tangente montrerait de manière ostensive ce qu'est une tangente en basculant ainsi dans le spatio-graphique et non dans le géométrique ;
- *d'interdire le terme « tangent »* et ses variantes pour contraindre les élèves à une explicitation de ce terme fondamental pour le problème de construction choisi.
De plus dans le libellé de la consigne et en accord avec les programmes de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$, nous avons choisi de parler de construction *sans mentionner d'instruments*. Ils sont donc libres. Le sont-ils vraiment ?

---

[5] Parzysz B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution de l'étude de la relation voir – savoir*. Thèse de doctorat. Paris VII. Dans cet ouvrage, l'auteur propose de réserver « le terme de figure à l'être géométrique » et d'employer « le mot dessin pour une représentation graphique (plane) de cette figure ». Cette distinction a depuis été retenue par nombre de didacticiens comme par exemple : Laborde C. et Capponi B. (1994), *L'apprentissage de la notion de figure géométrique*, RDM, vol. 14/1-2, La Pensée Sauvage, Grenoble.
[6] Gobert S. (2007), *Conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive*, Petit x, n° 74, pages 34-59, IREM de Grenoble.

IV. Que se passe-t-il si on donne plus ou moins de temps aux élèves pour entrer dans le problème de construction ?

Prenons maintenant le temps d'analyser les trois messages qu'un binôme (appelé binôme 8 par la suite) a produits durant le temps des interactions, dans la classe de Troisième de Hugues Baudrillard du Collège International de Grenoble. Ces trois messages sont donnés dans l'encadré 2 ci-après[7].

Le *premier message* est inachevé : en parlant d'un « troisième côté », les deux élèves s'appuient sur l'angle formé par deux côté d'un triangle (isocèle) ; leur conception de la tangente est liée au dessin (« qu'il ne coupe pas… ») : ils évitent ainsi tout recours à la notion de rayon du cercle et à celle de distance qui lui est liée.

Dans le *deuxième message*, l'apparition de la bissectrice fait disparaître le « troisième côté » et, par conséquent, son milieu comme centre du cercle. Les perpendiculaires aux deux côtés de l'angle donné définissent le centre du cercle, mais sans la preuve que les deux perpendiculaires se coupent sur la bissectrice. Le rayon continue à être absent.

Dans le *troisième message* apparaît le codage des points comme moyen de communication. Il est précisé qu'il faut tracer « les droites perpendiculaires aux deux côtés qui passent par A et B et coupent la bissectrice en un point C ». Or, même si on fait le dessin soigné des trois droites, elles semblent former un « petit triangle[8] » : qu'elles se coupent est un savoir, non justifié, qui contrôle le tracé et la lecture graphique.

Ce programme se suffit à lui-même pour produire un dessin, bien qu'il ne soit pas justifié : pourquoi les trois droites se coupent-elles en un seul point, centre du cercle cherché ? Pourquoi le cercle est-il bien tangent aux deux côtés de l'angle donné ? Cependant, cette absence de justification nous paraît conforme aux attentes de l'institution où un programme de construction est *la suite des étapes qui permettent de construire une figure*.

Soulignons que c'est le temps laissé aux deux élèves qui leur a permis d'aboutir à un message institutionnellement acceptable, c'est-à-dire apparaissant comme réalisable à la règle et au compas.

Mais, qu'en est-il en réalité ? Quels instruments et quels dessins ont fonctionné au cours de l'interaction entre les deux élèves ? Quel rôle ont-ils joué dans l'évolution des messages?

V. Que s'est-il passé entre les différents messages ?

Le film des interactions du binôme 8 garde la mémoire du processus interactif conduisant les élèves à la rédaction d'un premier message, son abandon pour l'écriture d'un deuxième, lui-même rejeté en faveur d'un ultime message.

Ce film atteste, dans ce processus, du recours constant des élèves à différents dessins : dessins totalement ou partiellement à main levée, dessins avec instruments tout particulièrement dans la mise à l'épreuve de chacun des trois messages. Ces dessins apparaissent à la fois comme des preuves et des contre-exemples pragmatiques et comme des procédés graphiques de vérification. Ils permettent aux interactions de se développer dans un processus où « le su et le vu »[9] s'entremêlent. Le dernier message, réalisable à la règle et au compas, a en fait été vérifié très soigneusement à la règle, au rapporteur et à l'équerre, le compas ne servant qu'à tracer le cercle final. La construction à la règle et au compas est un jeu mathématique qui n'a aucune raison d'être ici : n'en est-il pas de même dans les problèmes de construction au collège ?

---

[7] Soulignons que le message final est en partie le message de l'élève 2 du questionnaire.

[8] Comme dans la situation du tracé des trois médiatrices d'un triangle proposée par Brousseau G. (1983), *Études de question d'enseignement. Un exemple : la géométrie*, Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, LSD IMAG, Grenoble.

[9] Parzysz B. (1989), ouvrage déjà cité.

Premier message (après 17 minutes d'interaction)

tracez le troisième côté ~~du~~ de l'angle. prenez le milieu de ce côté comme centre du cercle et tracez le de façon à ce qu'il ~~pas~~ ne coupe

Deuxième message (après 27 minutes d'interaction)

Tracez la bissectrice de l'angle donné. ne droite perp. aux
Tracez ensuite ~~les hauteurs~~ ~~des~~ 2 côtés de cet angle de façon à ce qu'elles coupent la bissectrice en un même
point ~~même~~. Prenez ce point comme centre du arcc.

Dernier message (après 31 minutes d'interaction)

- Tracez la bissectrice de l'angle donné.
- placez un point A et un point B sur chaque côté de l'angle et à égale distance du sommet.
- Tracez les droites perpendiculaires aux 2 côtés, qui passent par A et B et coupent la bissectrice en un point C.
- Prenez le point C comme centre du cercle et la longueur AC comme rayon.

Encadré 2 – Les trois messages du binôme 8

VI. Perspectives

Une fois les productions des élèves recueillies, on peut se demander comment organiser le passage de la sphère privée du travail en groupe à la sphère publique de la classe.
Contre le choix de demander à un représentant du groupe de venir exposer le travail commun ou celui de laisser à l'enseignant le soin de commenter certains messages, nous optons pour un *travail coopératif élèves- enseignant* de mise en place d'un débat scientifique au sens de Legrand[10]. Le but de ce débat est de transférer aux élèves une problématique pertinente sur la notion de tangente en donnant au dessin le statut officiel de dispositif expérimental de production de conjectures et en validant ces conjectures par la construction coopérative d'une preuve mathématique. Mais quelles conjectures mettre en débat ? Comment gérer le débat ? La recherche de réponses à ces deux questions ouvre une longue réflexion d'ordre épistémologique qui ne fait pas l'objet de cet article.

[10] Legrand M. (1988), *Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique*, RDM, vol.9/3, La Pensée sauvage, Grenoble. On pourra aussi se reporter aux textes des trois ateliers du groupe « Responsabilité et débat scientifique » de l'IREM de Grenoble, parus dans ce même bulletin.

Annexe

Questionnaire « A propos des constructions géométriques »

Nous sommes un groupe d'enseignants de mathématiques (Collège, Lycée, Université) travaillant au sein de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Grenoble. Nous menons une étude sur les difficultés des élèves de Collège en géométrie et sur la place des constructions géométriques dans la pratique des enseignants en France et à l'étranger. Si vous pouviez prendre un peu de votre temps pour remplir anonymement ce ***questionnaire****, cela aiderait à l'avancement de nos réflexions.* ***MERCI****.*

Ville et département où est situé votre établissement :
Vous êtes enseignant de Collège depuis ___________ ans
Vous avez l'expérience des classes de (Cochez les cases correspondantes) :
6ème ☐ 5ème ☐ 4ème ☐ 3ème ☐

QUESTION 1
A) Parmi les 6 constructions suivantes, lesquelles abordez-vous généralement ? ***Cochez la (les) case(s) correspondante(s) aux classes (6e, 5e, 4e, 3e) dans la(les)quelle(s) vous les abordez et dans quelle partie de votre enseignement.***

CONSTRUCTIONS	abordées en											
	Activité préparatoire				Cours				Exercice			
	6e	5e	4e	3e	6e	5e	4e	3e	6e	5e	4e	3e
1. Cercle inscrit dans un triangle												
2. Tangente à un cercle donné passant par un point qui appartient au cercle												
3. Tangentes à un cercle donné passant par un point qui n'appartient pas au cercle												
4. Cercle inscrit dans un triangle équilatéral												
5. Cercle inscrit dans un carré												
6. Cercle tangent aux côtés d'un angle donné												

B) Abordez-vous d'autres constructions relatives à la tangente au cercle ? Précisez-les en indiquant la classe concernée.

C) Choisissez l'une des constructions de 1 à 6 indiquées ci-dessus. Quelles consignes donneriez-vous à vos élèves pour que cette construction soit le point de départ d'une activité sur la notion de tangente (*enseignée précédemment*).

D) Donnez deux pré-requis que vous jugez indispensables à cette activité.

QUESTION 2

Des élèves de Collège ont eu à résoudre le problème suivant : « *Donner une méthode permettant de construire un cercle tangent aux côtés d'un angle donné. Attention ! Tout dessin est interdit ainsi que les mots 'tangent', 'tangente', etc.* ».

Nous avons choisi les copies de trois élèves.

A) Pourriez-vous corriger leur travail (directement sur cette feuille, à côté de chaque production) comme vous le feriez pour vos propres élèves ?

Élève 1

1. Tracer un angle $B\hat{A}C$ de 50° sachant que AB=AC=6cm *2. Tracer la bissectrice de l'angle $\hat{A}$.* *3. Tracer les médiatrices de AB et AC, en appelant les points I et J.* *4. Appeler le point d'intersection « O ».* *5. Tracer un cercle qui a pour centre le point O et pour rayon IO (ou JO)*	

Élève 2

Tracer la bissectrice de l'angle donné. *– Placez un point A et un point B sur chaque côté de l'angle et à égale distance du sommet.* *– Tracez les droites perpendiculaires aux 2 côtés, qui passent par A et B et coupent la bissectrice en un point C* *– Prenez le point C comme centre du cercle et la longueur AC comme rayon.* *On obtient bien le cercle demandé puisque [AB] et [CB] sont deux rayons du cercle perpendiculaires aux côtés de l'angle.*	

Élève 3

Tout d'abord, tracer un angle donné. Prendre ensuite le compas et tracer la bissectrice de cet angle. À partir d'une mesure quelconque, choisir un centre pour le cercle (sur la bissectrice), prendre le rayon approprié à l'ouverture de l'angle (da façon à ce que le rayon touche la droite : ni plus grand ni plus petit). Tracer enfin le cercle et vous obtiendrez la figure qu'on vous demande.	

B) Attribuez à chacune des trois copies une note de 0 à 10 ainsi qu'une appréciation.

	NOTE	APPRECIATION
Copie de l'élève 1	**…/10**	
Copie de l'élève 2	**…/10**	
Copie de l'élève 3	**…/10**	

MERCI