D'Euclide à Lobatchevski : pourquoi 20 siècles d'attente ?

Jacques Verdier

Résumé : *Dès qu'Euclide eut énoncé son 5^e^ postulat, on a trouvé sa formulation complexe. Certains ont voulu le remplacer par un énoncé plus simple (ex :* Par un point extérieur à une droite on peut tracer une et une seule parallèle à cette droite*). D'autres ont pensé qu'il devait avoir rang de théorème, et donc cherché à le démontrer : sa négation devait aboutir à une contradiction. On n'a pas trouvé de contradiction, mais cette négation entraînait des propriétés géométriques « incroyables », contraires au « bon sens », donc refusées. Jusqu'à ce qu'on finisse, vingt siècles plus tard, par admettre qu'il pouvait exister une géométrie non-euclidienne… C'est cette histoire que j'ai racontée à Besançon, sous forme d'un diaporama.*

La géométrie d'Euclide

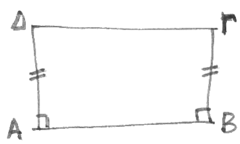
Les **Éléments d'Euclide** commencent par un certain nombre de « définitions », comme par exemple « *Le point est ce dont la partie est nulle », « Une ligne est une longueur sans largeur* », « *Les extrémités d'une surface sont des lignes* », etc. La définition que donne Euclide des parallèles est la suivante : « *Les parallèles sont des droites qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre* ». Suivent un certain nombre de demandes, ou postulats (traduits ici en langage contemporain) : « *Deux points déterminent une droite (unique)* », « *Une droite peut être indéfiniment prolongée* », « *Tous les angles droits sont égaux entre eux* », etc.
Le cinquième postulat, celui qui nous intéresse ici, a une formulation plus complexe : « *Si une droite, tombant sur deux droites, fait [la somme des] angles intérieurs du même côté moindre que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où [la somme des] angles est moindre que deux droits* ». La formulation que l'on utilise maintenant (cf. résumé) n'est pas celle d'Euclide, mais celle de Playfair (XVIII^e^ siècle) ; elle lui est équivalente.
Après ces définitions et ces postulats, Euclide enchaîne, de façon déductive, ses propositions ; elles sont de deux sortes : des constructions (pr. 1 par exemple: « *Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral* ») et des théorèmes (pr. 5 par exemple : « *Dans les triangles isocèles, les angles sur la base sont égaux entre eux, et les côtés étant prolongés, les angles sous la base seront aussi égaux entre eux* »). Les propositions 27 à 31 traitent des parallèles, et forment ce qu'on appelle quelquefois *la théorie des parallèles*. Voici par exemple la 27^e^ : « *Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles alternes égaux entre eux, ces deux droites seront parallèles* ». Chaque proposition est démontrée à l'aide des propositions qui la précèdent et des postulats. Cependant, dans les Éléments, les 28 premières propositions ne nécessitent pas, pour être démontrées, l'utilisation du « fameux » cinquième postulat ; elles forment ce que Bolyaï appellera en 1832 la « *Géométrie absolue* ». Ce postulat n'intervient que pour la démonstration de la 29^e^ (et donc pour la démonstration de toutes les proposition qui découlent de la 29^e^).

Les contestations grecques du 5e postulat.

Dès le IIe siècle av. J.-C., ce postulat n'a pas eu le « bonheur » de plaire. On pensait que c'était un théorème (vu sa formulation) qu'Euclide avait été obligé de mettre là parce qu'il n'avait pas réussi à le démontrer. Deux démarches alors pour s'en « débarrasser » : le remplacer par un axiome plus « primitif », du même style que les autres (exemple : la formulation de Playfair) ou le démontrer à partir des autres postulats (et des propositions de la « géométrie absolue »).
Posidonius donne une autre définition des parallèles : *« Deux droites sont parallèles si et seulement si leur distance est constante en tout point* », et le 5e postulat n'est alors plus nécessaire ; mais sa définition contient implicitement ce 5e postulat…
Ptolémée, Proclus, Géminius, Aganis… proposent successivement des démonstrations du postulat d'Euclide (qui sont bien évidemment toutes fausses, car elles utilisent – le plus souvent implicitement – des propriétés équivalentes de ce postulat).

Les commentateurs arabes d'Euclide

Dès le IXe siècle, al-Gauhari, an-Nayrizi, Tabit ibn Qurra « démontrent » le 5e postulat, qui devient un théorème, duquel ils déduisent la 29e proposition d'Euclide ; ainsi les reste des Éléments retrouve-t-il son agencement initial. Avec pour ibn Qurra une conclusion intéressante : « *Si une sécante coupe deux droites et que celles-ci se rapprochent l'une de l'autre d'un de leurs côtés, alors elles s'en écartent l'une de l'autre de l'autre côté ; et leur rapprochement du côté où elles se rapprochent, et leur écartement du côté où elles s'écartent, vont en croissant* ».
Pour prouver la possibilité de construire des droites infinies, **Ibn al-Haytam** (surnommé al-Hazen) « démontre » que « *la ligne décrite par l'extrémité de la perpendiculaire est une droite équidistante de la droite donnée* ». Cela lui permet de démontrer le 5e postulat en utilisant un quadrilatère qui a déjà trois angles droits (et dont il démontre que le quatrième est aussi droit). Al-Haytam conclut alors qu'il faut supprimer le 5e postulat de la liste des demandes, et le remettre, puisqu'il est désormais démontré, juste avant la 29e proposition où il est utilisé.



'Umar al-Hayyam, partant de la figure ci-contre (deux segments de même longueur perpendiculaires à un troisième segment), tient absolument à démontrer que les deux autres angles sont droits aussi. Sans le 5e postulat, il n'y arrive pas. Mais, après avoir démontré que ces deux angles étaient soit tous deux aigus, soit tous deux obtus, il en déduit que les deux parallèles A□ et B□ vont soit en s'écartant de chaque côté de AB, soit en se rapprochant. Il abandonne alors cette piste : « *Il y aurait alors deux lignes droites coupant une droite selon deux angles droits et dont la distance augmenterait ensuite des deux côtés de cette droite, ce qui est une impossibilité première lorsqu'on se représente le caractère rectiligne d'une droite, et qu'on réalise ce qu'est la distance entre deux droites* ».
Nasir ad-Din at-T□si butera peu après sur une difficulté analogue.

Les commentateurs européens d'Euclide

Le seul qui ait fait preuve d'originalité est **Wallis** (1616-1703), qui connaissait l'œuvre d'At-T□si. Il remplace le cinquième postulat d'Euclide par le suivant : *« Pour une figure quelconque, il en existe toujours une autre de grandeur quelconque qui lui soit semblable »*. Ce principe semble d'ailleurs à l'époque tout à fait naturel et évident (et personne ne se rend compte qu'il équivaut au postulat d'Euclide). A parti de là, Wallis démontre le 5^{e} postulat, qui aura ainsi statut de théorème (proposition).
Legendre (1752-1833) publie de nombreuses éditions différentes de ses Éléments de géométrie (utilisés dans l'enseignement). De la $1^{ère}$ à la 8^{e} édition, il « supprime » le 5^{e} postulat d'Euclide, et il démontre à la place cette proposition : « *Dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux droits* » ; mais sa démonstration est fausse (elle utilise implicitement un équivalent du 5^{e} postulat). Dans les éditions suivantes, il « remet à se place » le 5^{e} postulat, puis démontre à nouveau, d'une autre manière, la proposition ci-dessus (là encore, bien sûr, la démonstration est fausse).

Les précurseurs des géométries non-euclidiennes

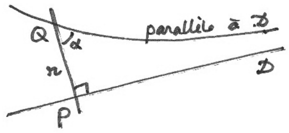
Saccheri (1677-1733) connaît lui aussi l'œuvre d'at-T□si, et la critique. Il utilise le même quadrilatère que 'Umar al-Hayy□m (figure page précédente), et fait explicitement les trois hypothèses concernant les angles □ et □ : soit ils sont droits (et alors on peut en déduire le 5^{e} postulat), soit ils sont obtus (et alors on aboutit rapidement à une contradiction), soit ils sont aigus. Saccheri en déduit toutes sortes de conséquences, et en particulier les deux théorèmes suivants : « *Deux droites sont : soit sécantes ; soit admettent une perpendiculaire commune, et alors elles "divergent" ; soit elles sont "asymptotes" l'une de l'autre* » ; « *Deux droites parallèles peuvent ne pas avoir de perpendiculaire commune* ».
Mais il n'arrive pas à trouver la contradiction qu'il recherche pour réfuter cette hypothèse (car il voulait absolument démontrer le 5^{e} postulat). Finalement ; il « craque » : « *L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse, car elle répugne à la nature même de la ligne droite* ».
Lambert (1728-1777) connaît les travaux de Saccheri, mais préfère s'appuyer, comme Ibn al-Haytam, sur le quadrilatère à trois angles droits. Un des conséquences de « l'hypothèse de l'angle aigu » l'amène à la conclusion que « *Il n'existe pas de triangles semblables* **»**. Connaissant l'œuvre de Wallis, sa curiosité est excitée !
Lambert pense que cette géométrie correspond à une sphère de rayon imaginaire. Il démontre alors le théorème suivant (toujours dans le cas de l'hypothèse de l'angle aigu) : « *L'ensemble des points équidistants d'une droite donnée n'est pas une droite* ». Et lui aussi, il « craque » : il est en effet, comme tout le monde à l'époque, de philosophie Kantienne : les axiomes de la géométrie doivent être le reflet des propriétés de l'espace sensible.

1805-1835, les « 30 glorieuses » : Bolyaï, Gauss, Lobatchevski

Il y a, au début du 19^{e} siècle, deux tendances chez les mathématiciens :
- ceux qui renoncent à s'occuper de ce problème du 5^{e} postulat ;

- ceux qui ont la conviction que le 5e postulat est indémontrable, et qu'on pourrait tout aussi bien le remplacer par son contraire (et on aurait alors une géométrie « imaginaire »).

Bolyaï (1802-1860), jeune officier de l'armée autrichienne, a tenté de démonter le 5e postulat : ce problème le passionnait. En 1825, il avait établi la plupart des principes de sa géométrie (non euclidienne), mais a attendu 1832 pour les publier, sous le titre « *Science absolue de l'Espace* ». Il a ainsi été devancé par Lobatchevski, mais l'opuscule de ce dernier était à l'époque resté totalement confidentiel. Citons un de ses théorèmes : « *On mène par Q la parallèle à une droite D. L'angle* □ [voir figure] *n'est fonction que de la distance r = PQ : on l'appellera « angle de parallélisme* ».



On retrouvera tous les théorèmes de Bolyaï chez Lobatchevski.

Gauss (1777-1855) s'intéresse à cette géométrie depuis l'âge de 15 ans, on en a la preuve par sa correspondance. On peut y lire, par exemple : « *L'hypothèse selon laquelle la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180° conduit à une géométrie complètement différente de la nôtre ; une géométrie tout à fait consistante que j'ai développée pour moi-même (...). Tous mes efforts pour trouver une contradiction ont été vains (...). Considérez ceci comme une communication privée dont aucun usage public ne doit être fait* » [lettre à Taurinus, 1824] ou encore : « *Je crains la clameur des béotiens si je voulais exprimer mes vues sur cette étrange géométrie, tout à fait différente de la nôtre* » [Lettre à Bessel, 1824].

Lobatchevski (1793-1856) a étudié de très près les preuves de Legendre [cf. supra]. Il publie ses résultats en 1829 dans une revue très confidentielle, « le Messager de Kazan ». En réalité, il commence là où Saccheri bloquait, en le posant comme postulat a priori.

Il démontre toute une liste de théorèmes, dont la fameuse proposition 16, correspondant à la figure ci-dessus : « *Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée de ce plan, en deux classes, savoir : en droites <u>qui coupent</u> la droite donnée, et en droites <u>qui ne la coupent pas</u>. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite <u>parallèle</u> à la droite donnée* **».**

Voici d'autres théorèmes de cette « nouvelle » géométrie : « *Si on prolonge de plus en plus loin deux lignes parallèles dans le sens de leur parallélisme, elles s'approcheront de plus en plus l'une de l'autre* » ; « *Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux droits* » ; « *Si deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la somme des angles quelconques d'un triangle rectiligne sera égale à* π », etc.

Les recherches sur la géométrie des parallèles n'intéressent alors plus les mathématiciens : c'est la **FIN** d'un grand problème. Ce n'est qu'après 1860 que les idées de Bolyaï-Lobatchevski se répandent, notamment en France, grâce à un livre de Jules Houël qui comprend : la traduction des études géométriques de Lobatchevski ; la correspondance de Gauss ; la traduction du chapitre *Science absolue de l'Espace* de Bolyaï.