Structure et genèse des Éléments *d'Euclide*

Bernard Vitrac, CNRS UMR 8567—Centre Louis Gernet, Paris

I. En guise d'introduction :
un mot sur la construction historique des mathématiques dans l'Antiquité grecque

La construction de traditions mathématiques dans l'Antiquité grecque présuppose — comme condition nécessaire — la transmission continue des connaissances pour qu'il ait pu y avoir accumulation, poursuite de questions non ou mal résolues, reprises de problèmes selon d'autres approches, réorganisations au moins partielles et récurrentes du savoir mathématique. Pour le dire brutalement, sans transmission, sans enseignement, pas de construction des mathématiques.

D'où une première difficulté : alors que les différentes sciences mathématiques — dans l'Antiquité grecque, cela signifie : géométrie, arithmétique, mais aussi astronomie, optique, harmonique, mécanique — sont assez tôt reconnues comme des disciplines à part entière — ce, dès le début du IV^{e} siècle avant notre ère —, leur transmission a été confinée à la sphère privée. Malgré les vœux ou les prescriptions des programmes politiques de Platon, aucune cité ne s'est soucié de l'enseignement des mathématiques au-delà de l'école élémentaire — quand elle existait. Même quand la domination romaine a imposé une administration exigeant de nouvelles demandes de formation en ce qui concerne le droit, la rhétorique voire la philosophie, aux III^{e}-IV^{e} s. de notre ère, aucune chaire impériale d'enseignement des mathématiques n'a été créée. Par conséquent, la « visibilité publique » des mathématiques pendant la majeure partie de l'Antiquité grecque — du VI^{e} s. avant notre ère au VI^{e} s. après — a été très faible.

Combinée avec le fait que les mathématiques sont — et étaient — considérées comme une étude difficile, cette absence de « publicité » a fait que les vocations ont été rares et les mathématiciens peu nombreux. Pour les douze siècles de l'histoire grecque ancienne, on connaît les *noms* de trois à quatre cents personnes *qui ont eu affaire* avec les mathématiques (j'y inclus des philosophes comme Platon et Aristote, mais aussi des adversaires des mathématiques comme Protagoras ou Sextus Empiricus). Parmi elles, un certain nombre — qu'on peut bien appeler « mathématiciens » — a contribué à la production et/ou à la reproduction de résultats : un peu plus de 100 textes mathématiques — entendues en un sens très large (40, si on se limite à la géométrie et à l'arithmétique) — nous sont parvenus (voir

Annexes, I). Ils sont d'extension très variable[1] et ils ont été rédigés, par une bonne quarantaine d'auteurs, des débuts de l'époque hellénistique (vers 320[a]) jusqu'à la fin de l'Antiquité soit environ 9 siècles. Rien ne nous a été transmis des époques archaïque et classique (VI[e]-IV[e] siècles), sinon quelques précieux fragments et des témoignages littéraires et philosophiques.

Ces mêmes témoignages et les textes conservés nous parlent d'autres ouvrages, perdus — environ 130[2] — mais dont on nous transmet un titre, et ils mentionnent aussi des thématiques qui avaient sans doute été l'objet d'une ou plusieurs publications écrites, soit une fourchette de 30 à 70 ouvrages supplémentaires. En cumulant tout ça, malgré d'évidentes incertitudes méthodologiques, on aboutit à un totale de 270 à 310 titres[3], produits par une centaine d'auteurs. Il faut noter la forte proportion d'ouvrages conservés — environ le tiers — alors que, pour le reste de la littérature antique, on évoque plutôt de 5 à 10 % d'écrits parvenus jusqu'à nous. J'insisterai aussi et surtout sur la petite taille de l'échantillon : on connaît les noms de plus de 8000 philosophes ; les listes des écrits d'auteurs prolifiques comme Aristote ou Chrysippe transmises par Diogène Laërce comptent chacune plus de 150 titres. L'œuvre du célébrissime médecin Galien de Pergame occupe plus de 20 000 pages dans l'édition Kühn[4].

Un nombre total aussi faible de spécialistes implique qu'à chaque instant et en n'importe quel lieu du monde grec, les mathématiciens, au pire, étaient des individus isolés, au mieux, constituaient de tout petits groupes. Comme les préfaces de l'époque hellénistique le montrent, la vitalité d'une telle communauté était suspendue à la possibilité que les hommes et les écrits circulent à l'intérieur d'un réseau centré sur une métropole, par exemple Alexandrie[5]. A l'époque classique, il semble qu'Athènes ait pu jouer un rôle comparable, mais sur une échelle chronologique et géographique plus petite. Inutile de souligner que cette circulation était infiniment plus compliquée (et risquée) dans l'Antiquité qu'elle ne l'est aujourd'hui.

*

[1] Le petit traité attribué à Héron, intitulé *Chirobaliste,* représente 2,5 pages de texte grec; le manuel d'arithmétique de Domninos de Larissa, une quinzaine de pages. A l'opposé du spectre, l'*Almageste* de Ptolémée occupe 1150 pages dans l'édition de Heiberg, les 13 Livres des *Éléments* d'Euclide environ 800 pages, et la *Collection mathématique* de Pappus, environ 550 pages dans l'édition de Hultsch (alors qu'il manque le Livre I et une partie des Livres II et VIII).

[2] Dont une soixantaine pour la géométrie et l'arithmétique.

[3] De 115 à 130 pour la géométrie et l'arithmétique. Voir les tableaux dans les Annexes, II.

[4] Elle représente 1/8 de toute la littérature grecque conservée pour la période qui va d'Homère à la fin du II[e] siècle.

[5] Je me permet de renvoyer à une étude à paraître très prochaînement : « Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens » dans *Liber amicorum Jean Dhombres,* P. Radelet-de-Grave (éd.) avec la collaboration de C. Brichard. Collection Réminisciences (n°8). Louvain-la-Neuve, Centre de Recherches en histoire des sciences de l'Université. Turnhout: Brepols, 2008, pp. 519-556.

La continuité des traditions est un trait constitutif de l'histoire de la philosophie grecque ancienne telle que la décrivent les Anciens, bien au-delà de la réalité historique. On restitue des filiations parfois imaginaires entre penseurs, on postule la pérennité des principales écoles. Pour ce faire, on a même inventé un genre littéraire, celui des *Successions* (*Diadochai*), également opératoire pour la médecine et la rhétorique, qui s'appuie toutefois sur une réalité "institutionnelle" des époques classique et hellénistique — la désignation d'un "successeur" (du Fondateur) —, mais qui fut également appliqué aux premiers philosophes et savants avec beaucoup d'incertitude et d'imagination.

Une telle continuité, même reconstruite, est rare ou inexistante en mathématiques. Je ne connais que deux exemples où des témoignages suggèrent une continuité intellectuelle et institutionnelle sur (au moins) trois générations :

• L'une pour l'école qu'Eudoxe de Cnide avait fondée à Cyzique ; Ménechme et son frère Dinostrate, Hélicon de Cyzique, Polémarque et peut-être Callippe de Cyzique furent ses disciples. L'école était encore active à la charnière des III^e^-II^e^ avant notre ère, quelques 40 ans après la mort du fondateur.

• L'autre est un célèbre témoignage dans le Livre VII de la *Collection mathématique* de Pappus :

> « Il (<Apollonius>) a toutefois pu ajouter certaines choses qui manquaient encore à ce lieu, parce qu'il avait eu l'imagination préalablement frappée par ce qui avait déjà été publié sur ce lieu par Euclide, et qu'il avait étudié avec les disciples d'Euclide à Alexandrie un long moment, d'où il avait acquis une disposition d'esprit non dépourvue d'expérience » (προσθεῖναι δὲ τῷ τόπῳ τὰ λειπόμενα δεδύνηται προφαντασιωθεὶς τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου γεγραμμένοις ἤδη περὶ τοῦ τόπου καὶ συσχολάσας τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν ’Αλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον, ὅθεν ἔσχε καὶ τὴν τοιαύτην ἕξιν οὐκ ἀμαθη)[6].

A ces deux exemples, on pourrait ajouter le témoignage de Galien[7] qui rapporte que son arrière-grand-père, son grand-père et son père étaient architectes et géomètres — trois générations là aussi —, mais la transmission avait sans doute été familiale et non pas institutionnelle. Galien lui-même mit fin à cette étonnante lignée en choisissant la médecine et la philosophie, même s'il est un grand admirateur des géomètres en général et d'Euclide en

[6] Pappus, *Coll. math*. VII, 678.8-12 Hultsch. Trad. Ver Eecke, p. 507. Hultsch y voyait une interpolation dans la *Collection*. Quand bien même l'indication ne proviendrait pas de Pappus, cela n'invalide pas sa valeur historique et la mention d'Aristée l'Ancien dans la portion précédant ce texte (voir Annexes, IV, Témoignage 1) présuppose certainement l'existence d'une source hellénistique.

[7] *Sur ses propres livres,* XIV. 4. Ed. V. Boudon-Millot. Paris, Les Belles-Lettres, 2007, pp. 164-165.

particulier[8]. Pour le reste, on nous dit qu'Eudoxe avait étudié avec Archytas[9]. Théétète (et peut-être Platon[10]) avait suivi l'enseignement de Théodore de Cyrène[11] … Bref, les témoignages sur la formation des mathématiciens sont rarissimes.

Il faut ajouter que le caractère essentiellement privé de l'activité mathématique a également eu comme conséquence qu'aucun auteur ancien n'a cru bon de recueillir leurs biographies comme on l'a fait pour les hommes politiques, les rhéteurs ou les philosophes. Leurs vies n'avaient rien d'édifiant et ne constituaient pas un modèle à promouvoir auprès de la jeunesse.

A la différence des médecins, il n'y avait pas de « mathématicien public » recruté par la Cité, à l'exception possible des architectes et des ingénieurs militaires, qui devaient posséder des connaissances mathématiques, mais leur sélection ne se faisait pas nécessairement sur ce critère. Par conséquent les mathématiciens sont quasiment absents des inscriptions et décrets honorifiques que l'on connaît pour d'autres sortes d'intellectuels.

Dernier constat du même genre : les papyri constituent les documents d'origine scolaire les plus proches des réalités antiques. On en connaît des milliers de fragments qui portent un passage des poèmes homériques, reflétant leur rôle primordial dans l'éducation durant toute l'Antiquité. Les extraits de Platon, les exercices de grammaire ou de rhétorique sont assez nombreux également. Seulement cinq fragments concernent les mathématiques « savantes », par ailleurs transmises dans des manuscrits médiévaux. Il faut noter que tous ces (petits) fragments portent des extraits des *Éléments* d'Euclide.

Pour conclure ces remarques, j'ajouterai que la continuité des communautés savantes dans l'Antiquité était d'autant plus importante que le support du livre ancien — autrement dit les rouleaux de papyrus auxquels je viens de faire allusion —, était fragile, du moins avant qu'on adopte définitivement, sans doute vers le IV^{e} s. de notre ère, le codex de parchemin. La simple conservation et transmission d'un texte supposait sa reproduction périodique et donc un minimum d'intérêt de la part de l'élite cultivée.

II. Euclide

Euclide est d'abord un auteur d'ouvrages mathématiques : grâce aux mentions que portent les manuscrits, grâce aux témoignages de ses commentateurs tardifs, en particulier Pappus (IV^{e} s.) et Proclus (07-08/02/412—17/04/485), nous pouvons dresser la liste

[8] Il cite à plusieurs reprises les *Éléments,* ainsi que les *Phénomènes*. Pour un exemple, voir Annexes, IV, Témoignage 3.
[9] Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres,* livre VIII, § 86.
[10] *Ibid*., livre III, § 6.
[11] La source essentielle à ce sujet est évidemment le dialogue *Théétète* de Platon.

(généreuse ?) des écrits qu'on lui attribuait durant l'Antiquité et le Moyen-Âge (voir Annexes, III). Plusieurs sont perdus ; pour d'autres il n'en existe qu'un résumé ou une version dérivée ; quelques-uns ont été, et sont parfois encore, soupçonnés d'être inauthentiques.

Dans l'Antiquité tardive, Euclide est d'abord l'auteur des *Éléments* (τὰ στοιχεία, ἡ στοιχείωσις) et c'est pourquoi on le désigne par un surnom, le στοιχειωτής[12]. Déjà au cours de la période romaine (Ie-IIIe s. de notre ère), Euclide est devenu un des symboles de la géométrie, entendue comme science démonstrative. Incidemment, le témoignage de ce genre le plus ancien n'est pas grec, mais latin (Cicéron[13]). C'est d'autant plus significatif que les Romains ne s'intéressaient guère à la géométrie. C'est sans doute par la reconnaissance qu'Euclide avait acquise dans certains milieux philosophiques, notamment stoïciens, que sa notoriété s'est étendue à l'élite cultivée hellénophone de l'Empire.

Toutefois, à partir de la description précédente, on ne sera pas étonné d'apprendre que de la biographie d'Euclide, on ne sait à peu près rien. On ne connaît ni sa cité d'origine, ni le nom de son père — les indications les plus souvent données chez les Anciens pour distinguer les homonymes — ni évidemment avec qui et où il appris les mathématiques, qui furent ses disciples si — comme le suggère le témoignage déjà cité de la *Collection* de Pappus — il en eut effectivement.

Dudit texte, les historiens modernes déduisent — peut-être imprudemment — qu'Euclide lui-même avait enseigné à Alexandrie. La mise en relation avec la capitale des Lagides est très certainement valide, à cause de la conservation des écrits d'Euclide et de la très forte corrélation qu'il y a, pour cette époque, entre conservation et lien avec Alexandrie. Mais ce lien aurait pu s'instituer à partir de ces mêmes disciples, non nommés dans la *Collection,* sans qu'il faille supposer la présence d'Euclide lui-même en ces lieux.

Le second témoignage biographique, transmis par Proclus dans son commentaire au premier Livre des *Éléments*[14], à la suite du célèbre "Résumé de l'histoire de la géométrie", est

---

[12] Première occurrence : Porph. *In Ptol. Harm.,* puis Pappus, Marinus, Proclus, Simplicius, les *Definitiones* du pseudo-Héron, bref tous les commentateurs connus d'Euclide !

[13] Voir Annexes, IV, Témoignage 2.

[14] « οὐ πόλυ δὲ τούτων νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών. γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· καὶ γὰρ ὁ 'Αρχιμήδης ἐπιβαλὼν καὶ τῷ πρώτῳ μνημονεύει τοῦ Εὐκλείδου, καὶ μέντοι καί φασιν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν, εἴ τίς ἐστιν περὶ γεωμετρίαν ὁδὸς συντομωτέρα τῆς στοιχειώσεως· ὁ δὲ ἀπεκρίνατο, μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν. νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, πρεσβύτερος δὲ 'Ερατοσθένους καὶ 'Αρχιμήδους. οὗτοι γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥς πού φησιν 'Ερατοσθένης. καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατωνικός ἐστι καὶ τῇ φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος, ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν ». *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii,* ed. G. Friedlein. Teubner, Leipzig, 1873, pp. 68.6-23. Trad. P. Ver Eecke, modifiée.

donc invoqué pour confirmer sa présence et même sa mise en relation avec le souverain Ptolémée I dit Sôter (roi de 306 à 287) :

> « (*i*) Pas beaucoup plus jeune que ceux-ci (Hermotime de Colophon, Philippe de Medma = d'Oponte ?) est Euclide, celui qui rassembla *les Éléments*
>
> (*ii*) et qui, d'une part, mit en ordre beaucoup de théorèmes d'Eudoxe, d'autre part perfectionna beaucoup de ceux de Théétète,
>
> (*iii*) et encore, éleva les plus faiblement démontrés par ceux d'avant lui jusqu'à des démonstrations irréfutables.
>
> (*iv*) Cet homme-là vivait du temps du premier Ptolémée; car Archimède, suivant de très près aussi le premier Ptolémée, mentionne Euclide, et remarquons qu'on dit que Ptolémée lui demanda une fois s'il y avait, en ce qui concerne la géométrie, quelque chemin plus court que l'*Enseignement des Éléments* ; et il répondit : pas de sentier royal vers la géométrie !
>
> (*v*) Il est donc d'une part plus jeune que les disciples de Platon, d'autre part plus âgé qu'Ératosthène et Archimède; car ceux-ci sont contemporains comme le dit quelque part Ératosthène.
>
> (*vi*) Il est platonicien dans son intention et familier avec cette philosophie, c'est pourquoi il se proposa, comme achèvement des *Eléments* dans leur ensemble, la construction des figures appelées platoniciennes ».

Ce passage de Proclus est *LE* témoignage fondamental sur Euclide : il propose une détermination de l'époque à laquelle il vivait (*iv*)-(*v*) ; il indique deux sources des *Éléments* : les travaux d'Eudoxe et de Théétète (*ii*) et il caractérise la contribution d'Euclide : une mise en ordre et un perfectionnement démonstratif (*i, iii*) ; il identifie son obédience philosophique : platonicien (*vi*).

Je ne reviendrai, ici, ni sur les incertitudes de ce texte, ni sur le fait que la chronologie qu'il propose est difficilement compatible avec une interprétation stricte du témoignage de Pappus. Je me contenterai de souligner le caractère inférentiel de la démarche de Proclus (ou de sa source éventuelle). C'est évident pour la chronologie d'Euclide, par encadrement. Mais le fait qu'il soit platonicien (*vi*) est également déduit du fait que les *Éléments* s'achèvent avec la construction et la comparaison des cinq polyèdres réguliers que Proclus, en bon commentateur du *Timée,* rattache immédiatement à l'enseignement de Platon. On peut donc légitimement s'interroger sur la fiabilité de ce témoignage en ce qui concerne les sources et la contribution d'Euclide (*ii-iii*), j'y reviendrai.

Nous avons vu que la notoriété d'Euclide était certainement considérable dans l'Antiquité impériale puis tardive. Son nom était synonyme de géométrie ; il figurait dans les listes convenues des personnages les plus éminents incarnant par là-même une discipline[15]. Cette grande réputation s'est maintenue au Moyen-Âge, arabe et latin, puis à la Renaissance mais, dans un certain nombre de travaux modernes, l'idée s'est peu à peu insinuée qu'une telle réputation était peut-être usurpée. Selon les formulations, on a voulu le rabaisser au rang d'un simple compilateur ou, dans une perspective un peu différente, réinscrire son activité dans le domaine de l'*édition* de textes mathématiques, voire, dans quelques cas extrêmes, l'envisager comme le pseudonyme d'un collectif d'auteurs hellénistiques selon un modèle plus récent bien connu. On a souvent fait remarquer que les grands textes mathématiques fondateurs dans les civilisations anciennes : les neuf chapitres chinois, le papyrus Rhind, les grandes tablettes mésopotamiennes type BM 13901 … étaient anonymes.

Mais, à cela on peut faire trois objections :

• Prendre un pseudonyme n'est pas la même chose que faire circuler un écrit anonyme. C'est reconnaître qu'il faut un nom d'auteur, même fictif.

• A la différence de ce que nous observons dans les civilisations du Proche-Orient ancien, la culture grecque s'est développée dans un contexte de communication extrêmement agonistique, scandée par les polémiques, les querelles de priorité, les accusations de plagiat … et elle a par conséquent développé un sens aigu de la propriété intellectuelle et du statut d'"auteur".

• Les *Éléments* ne sont pas un texte fondateur ; ils constituent seulement l'ouvrage complet de géométrie et d'arithmétique grecques le plus ancien qui nous soit parvenu, mais des mathématiques de ce style avaient été développées depuis plus d'un siècle (peut-être plusieurs) avant Euclide.

Si l'on veut s'obstiner dans cette direction et pour s'inscrire dans des modalités de publication que d'autres auteurs antiques ont connues, on pourrait imaginer qu'Euclide avait enseigné la matière qui constitue les *Éléments* sans leur donner la forme achevée que nous leur connaissons. Un ou plusieurs de ses disciples se serai(en)t acquitter de cette tâche. On connaît au moins deux exemples de ce genre, obéissant d'ailleurs à des scenarii assez différents :

(*i*) les écrits du philosophe Plotin édités par son élève Porphyre ;

(*ii*) les œuvres "scolaires" d'Aristote, éditées officiellement seulement au Ie siècle avant notre ère, entre autres par Andronicos de Rhodes.

[15] Voir Annexes, IV, Témoignages 2-6.

Selon le modèle (*i*), on pourrait imaginer qu'Apollonius a joué un rôle dans l'édition des *Éléments,* puisque plusieurs indices suggèrent qu'il avait repris des thématiques euclidiennes. Mais on voit aussi que c'était plutôt pour aller plus loin qu'Euclide (théorie des irrationnelles inordonnées, comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère), voire pour en modifier certaines fondations (axiomes ou notions communes ; constructions fondamentales) si l'on en croit les indications quelque peu incertaines rapportées par Proclus. Si donc Apollonius avait édité les *Éléments,* ils ne coïncideraient pas avec ce que nous avons.

Le schéma (*ii*) impliquerait une discontinuité dans la tradition des *Éléments* qui n'aurait rien d'étonnant, compte tenu de ce que nous avons dit auparavant, d'autant que les institutions savantes alexandrines ont semble-t-il beaucoup souffert des péripéties politiques du milieu du II^e^ s. avant notre ère. On pourrait par exemple imaginer que Héron, au début de l'ère chrétienne, ait été l'initiateur d'un renouveau euclidien. Mais on n'a aucune trace d'un tel phénomène que les commentateurs n'auraient probablement pas manqué de signaler. En outre, cela paraît peu compatible avec deux autres informations : (*i*) à partir de Proclus, il paraît quasiment certain que Géminus (I^e^ s. avant notre ère) avait discuté des *Éléments* d'Euclide, du moins des fondements du premier Livre ; (*ii*) la tradition arabe présente plutôt Héron comme un commentateur (le premier ?) et certaines de ses prises de position concernant le texte des *Éléments* présuppose l'existence d'une version antérieure.

Il paraît donc plus vraisemblable de s'en tenir à une édition hellénistique des *Éléments* par Euclide lui-même. Il faut toutefois reconnaître que l'on ne sait à peu près rien de leur destinée au cours des trois siècles de l'époque hellénistique (III^e^-I^er^ avant notre ère).

Quant à réduire la contribution d'Euclide à une simple compilation ou à une action éditoriale, c'est aller un peu vite en besogne :

• Même s'il constitue le point de départ de cette interprétation, le témoignage de Proclus (*ii-iii*) ne dit pas exactement cela.

• Même s'il y eut, peut-être, de nombreux écrits mathématiques composés selon le style « élémentaire », parmi ceux qui ont été conservés, nous n'en connaissons que trois :

— les *Éléments* d'Euclide.

— Les Livres I à IV des *Coniques* d'Apollonius qui, d'après leur auteur, appartiennent à ce genre.

— Les *Équilibres-plans* d'Archimède que lui-même cite parfois sous le titre *Éléments de mécanique.*

Le moins que l'on puisse dire est qu'à l'époque hellénistique le style « élémentaire » n'est pas cultivé seulement par des mathématiciens de seconde catégorie.

• Même si certains des écrits qui lui sont attribués dans le domaine des sciences mathématiques appliquées aux sensibles sont d'un contenu modeste, on peut observer qu'il ne s'agit pas de géométrie — laquelle avait déjà connu des développements considérables — et, surtout, on n'oubliera ni les traités perdus traitant de la géométrie supérieure des courbes ou de la théorie des lieux que lui attribue Pappus (*Coniques, Lieux à la surface, Porismes*), ni le témoignage d'Apollonius lui-même :

> « Et c'est en les (<les nouveaux théorèmes du Livre III des *Coniques*>) concevant que j'ai vu en même temps que le lieu à trois ou quatre droites n'était pas construit par Euclide, mais seulement une de ses parties, au hasard, et ceci d'une manière qui n'est pas heureuse ; car il n'était pas possible d'en achever la construction dans les découvertes ajoutées par moi »[16].

Certes il s'agit d'une critique, mais aussi de la confirmation qu'Euclide avait bien travaillé dans un des "domaines de pointe" de cette époque : la théorie des coniques. Je n'ai pas mobilisé la totalité des témoignages anciens sur Euclide. Certains, comme l'anecdote rapportée par Stobée à partir de Sérénus[17], confirmeraient, s'ils n'étaient pas aussi tardifs et conventionnels, qu'Euclide avait enseigné la géométrie, ce qui n'a rien d'improbable.

Compte tenu de ce que j'ai dit en commençant, il y a peu de chances que notre (non) connaissance de la biographie d'Euclide change prochainement, sauf découverte exceptionnelle : il n'est pas complètement impossible que la trouvaille d'un nouveau papyrus vienne bouleverser le paysage ; peut-être moins improbable pourrait être la redécouverte du commentaire de Héron aux *Éléments,* dans sa traduction arabe. L'inventaire de cette tradition n'est pas achevé et peut encore réserver des surprises. Ledit commentaire permettrait peut-être de mieux identifier les sources des informations transmises par Proclus ; il pourrait en apporter d'autres. En attendant de tels miracles, c'est surtout l'analyse interne du traité que l'on peut mobiliser pour essayer de comprendre les intentions et les manières de faire d'Euclide. Les commentateurs anciens et médiévaux, mais aussi les historiens modernes, ne se sont pas privés de le faire.

---

[16] Apollonius, *Coniques,* I, préface.. Ed Heiberg, p. 4.13-17 : « … ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν ».

[17] Jean Stobée, *Anthologie.* Ed. C. Wachsmuth & O. Hense, II, 228.25-29.

III. La genèse des *Éléments*

L'hypothèse, foncièrement conservatrice, à laquelle je me suis rallié est donc qu'Euclide a composé les *Éléments* en 13 Livres, dotés de la structure globale que nous leur connaissons grâce aux manuscrits conservés les plus anciens (ils datent du IX^e s. de notre ère), mais aussi par un certain nombre de citations explicites de tel ou tel livre, voire de certains théorèmes. Soulignons que la mention *explicite* du fait que les *Éléments* sont en treize Livres est tardive : il faut attendre Marinus (V^e s.), puis Jean Philopon (VI^e s.). Pour leurs prédécesseurs, cela allait sans doute de soi et, pour ma part, j'y vois un indice de l'ajout d'au moins un des deux Livres additionnels non attribués à Euclide. Dire que son traité est en 13 Livres est une autre façon de dire que ce qui suit n'est pas de lui.

On dit souvent que le Livre XIV est dû à Hypsiclès d'Alexandrie. Évidemment, si tel était le cas, cela confirmerait des *Éléments* en treize Livres dès cette époque (première moitié du II^e s. avant notre ère). Mais il suffit de lire la préface d'Hypsiclès pour voir qu'il a rédigé une monographie, non pour l'adjoindre aux *Éléments* d'Euclide qui ne sont même pas explicitement cités, mais pour corriger ou compléter un travail d'Apollonius sur les deux polyèdres réguliers complexes. Et c'est bien plus tard, très probablement après Pappus, peut-être à l'époque de Marinus, que ladite monographie a été transformée en ce qui est, pour nous, le Livre XIV.

Le titre de l'écrit d'Euclide — τὰ στοιχεία — fait référence aux unités textuelles qui composent l'ouvrage ainsi qu'à un genre littéraire. Pour peu nombreux qu'ils soient, les traités mathématiques grecs adoptent différentes modalités d'exposition, démonstrative ou non, et, même en se limitant à ceux qui procèdent par démonstration, on distinguera aisément des monographies, des grandes synthèses, des commentaires … Le genre « *Éléments de ...* » n'a pas été inventé par Euclide : selon le seul témoignage dont nous disposons à ce sujet — on l'appelle traditionnellement « Résumé de l'histoire de la géométrie » quoiqu'il se propose seulement l'archéologie du traité d'Euclide, les premiers éléments de géométrie avaient été composés par Hippocrate de Chio, donc vers 450-430 avant notre ère. Le résumé historique de Proclus mentionne encore plusieurs auteurs de cette tradition dont deux, Léon et Theudios de Magnésie, rassemblèrent et ordonnèrent les éléments avant Euclide :

> « (*i*) … En effet, Hippocrate, parmi ceux qui sont mentionnés, est le premier qui a aussi rassemblé par écrit des éléments (στοιχεῖα συνέγραψεν) …
>
> (*ii*) A cette époque, il y avait et Léodamas de Thasos, et Archytas de Tarente et Théétète d'Athènes, par lesquels les théorèmes furent augmentés et progressèrent vers un arrangement plus scientifique (παρ' ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ

προῆλθεν εἰς ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν). Et plus jeune que Léodamas, Néoclide et son disciple Léon procurèrent beaucoup de résultats s'ajoutant à ceux de leurs prédécesseurs (οἳ πολλὰ προσευπόρησαν τοῖς πρὸ αὐτῶν), en sorte que Léon put et rassembler les *Éléments* (ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι) — avec davantage de soin, tant en ce qui concerne la quantité que l'utilité des résultats démontrées —, et trouver les déterminations quand le problème cherché est possible, et quand il est impossible.

(*iii*) Et Eudoxe de Cnide, un peu plus jeune que Léon, une fois devenu membre du cercle de Platon, augmenta, le premier, le nombre des théorèmes dits généraux, et aux trois médiétés, il en ajouta trois autres, et fit progresser la quantité des résultats au sujet de la section dont le point de départ se trouve chez Platon et en leur appliquant les analyses. Et Amyclas d'Héraclée, un des compagnons de Platon, et Ménechme, qui était auditeur d'Eudoxe mais qui fréquentait aussi Platon, ainsi que son frère Dinostrate, rendirent la géométrie entière encore plus achevée. Et Theudios de Magnésie eut la réputation d'un esprit distingué, tant dans les mathématiques que dans le reste de la philosophie; et, en effet, il mit en ordre les éléments de façon tout à fait convenable (καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν) et rendit de nombreux résultats particuliers plus généraux …

(*iv*) Et Hermotime de Colophon fit progresser sur de nombreux points les résultats procurés auparavant par Eudoxe et Théétète (τὰ ὑπ' Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλέον), découvrit beaucoup d'éléments (καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε) et réunit par écrit certaines choses sur les lieux …

(*v*) Et donc ceux qui ont écrit les histoires conduisent le perfectionnement de cette science jusqu'à celui-ci.

(*vi*) Pas beaucoup plus jeune que ceux-ci est Euclide … »[18].

Il est probable que certaines des sources utilisées par Proclus — il en reconnaît l'existence dans (*v*) — étaient assez anciennes, car plusieurs des géomètres cités sont connus seulement par ce texte. Une confirmation que le genre « *Éléments de …* » remonte, pour ce qui concerne la géométrie, au moins au IV^e^ siècle avant notre ère est fournie par la discussion, impliquant Ménechme, de deux sens du mot "στοιχεῖον", elle aussi rapportée par Proclus[19], et par de célèbres témoignages d'Aristote :

---

18 Proclus, *In Euclidem* I, 66.7-8 + 66.14—67.15 + 67.20-23 + 68.4-7 Friedlein ; ici se place le témoignage sur Euclide discuté plus haut.

19 Voir Proclus, *In Euclidem* I, 72.23—73.14 Friedlien.

« Il en est à peu près de même pour ce qu'on nomme éléments des propositions géométriques (τὰ τῶν διαγραμμάτων στοιχεῖα), et, en général, pour les éléments des démonstrations (τὰ τῶν ἀποδείξεων). En effet, les premières démonstrations, et qui se trouvent à la base de plusieurs démonstrations, sont appelées éléments des démonstrations (αἱ γὰρ πρῶται ἀποδείξεις καὶ ἐν πλείοσιν ἀποδείξεσιν ἐνυπάρχουσαι, αὗται στοιχεῖα τῶν ἀποδείξεων λέγονται) … »[20].

« Il faut essayer aussi de bien posséder les lieux communs sous lesquels retombent le plus souvent les arguments : car, de même qu'en Géométrie il est utile d'être versé dans la connaissance des éléments (ὥσπερ γὰρ ἐν γεωμετρίᾳ πρὸ ἔργου τὸ περὶ τὰ στοιχεῖα γεγυμνάσθαι), et, en Arithmétique, de savoir sur le bout du doigt la multiplication des dix premiers nombres (ce qui, en effet, a une grande importance pour la connaissance des multiples des autres nombres aussi), de même aussi, dans les arguments, c'est un grand avantage de tenir bien en main les principes et de connaître par cœur les prémisses »[21].

*

Le biographe maghrébin Ibn ‘Abd al-Malik rapporte l’anecdote suivante au sujet du mathématicien Ahmad ibn Ibrâhîm ibn ‘Ali Ibn Mun‘im al-‘Abdarî, mort en l’an 626 de l’Hégire, soit 1228, et qui a enseigné à Marrakech :

« Et on rapporte au sujet de sa passion pour cet art [la géométrie] qu’il ne dormait pas des nuits <entières>, jusqu’à ce qu’il passe <en revue> le livre des *Éléments* d’Euclide, commençant par la dernière proposition qu’il <contient> et allant à reculons vers celle qui la précède et ainsi de suite jusqu’à la première proposition puisque la compréhension de chaque proposition est basée sur la compréhension de celle qui la précède. Il était célèbre et connu pour cela. Et c’est notre ami Abû l-‘Abbâs, son fils, que Dieu lui soit miséricordieux, qui m’en a informé »[22].

Je ne connais pas d’insomnie comparable dans l’Antiquité, mais il n’y a pas de doutes que Proclus adhérait au même schéma idéal sous-jacent concernant la structure déductive des *Éléments* : une longue chaîne déductive procédant de la Proposition 1 du premier Livre à la

[20] Aristote, *Métaphysique* Δ, 3, 1014 a 35—b 2.
[21] Aristote, *Topiques* VIII, 14, 163 b 17-28.
[22] Je dois cette information à A. Djebbar, ainsi que la traduction française du témoignage. Je l’en remercie.

Proposition 18 du Livre XIII[23]. En fait, il n'en est évidemment rien. Examinons la structure globale du traité.

La matière des *Éléments* est répartie en trois grands sous-ensembles (voir Annexes, V) : la géométrie plane (Livres I-IV et VI), l'arithmétique (Livres VII-IX) et la stéréométrie (Livres XI-XIII). Il n'y a donc que deux objets fondamentaux dans le traité : la figure, plane ou solide, et le nombre (correspondant à peu près à nos entiers naturels ≥ 2). Deux Livres — parmi les plus discutés — procèdent d'un autre point de vue : celui du *relatif* pour parler comme Aristote. Le Livre V introduit la notion de grandeur abstraite (μέγεθος), c'est-à-dire indépendamment de la dimension et de la position, et il est consacré à la notion de rapport entre grandeurs homogènes, à l'identité ou non de tels rapports, à leurs manipulations, indépendamment de la commensurabilité ou non de ces grandeurs. Il a donc un degré de généralité plus grand que les Livres I-IV ou VI, puisque les résultats qu'il expose s'appliquent aux livres stéréométriques. A l'inverse, le Livre X réduit considérablement le spectre des objets géométriques pris en considération : ce seront seulement des droites et des aires rectilignes. Il porte sur les relations de commensurabilité ou d'incommensurabilité qui peuvent se produire entre ces grandeurs. Sa place est justifiée par le fait que certains résultats arithmétiques interviennent dans cette théorie, représentée, pour l'essentiel, par une classification considérable, sans équivalent dans le reste des *Éléments* et probablement dans le reste de la littérature mathématique grecque.

Proclus a partiellement raison sur un point : le Livre XIII, avec la construction des cinq polyèdres réguliers et la comparaison de leurs arêtes, est le seul à dépendre des trois grands sous-ensembles que je viens d'indiquer et des Livres "relationnels" V et X. Si, à l'instar d'Ibn Mun'im, nous listons les Propositions utilisées dans la preuve de XIII. 18, puis celles mobilisées pour établir celles-là et ainsi de suite, on obtiendra des Propositions sélectionnées dans tous les Livres sauf le XII, mais seulement 222 sur 464 possibles ! Elles représentent une bonne partie de la géométrie plane et de la théorie des proportions, mais seulement 40 des 102 Propositions arithmétiques[24], un peu moins du tiers des Livres X et XI.

L'affirmation de Proclus sur la "fin" des *Éléments* sera donc soit une constatation banale — s'il fallait comprendre que "τέλος" désigne la dernière Proposition —, soit une assertion hyperbolique, s'il s'agit de désigner la finalité ultime visée par Euclide : celui-ci avait manifestement d'autres objectifs que la construction des polyèdres et deux autres "fins", au moins, sont perceptibles :

---

[23] J'utilise la numérotation des Propositions dans l'édition critique du texte grec par Heiberg, qui est aussi celle de ma traduction.

[24] Trois seulement du Livre IX !

• l’exposé complet de la classification des irrationnelles du Livre X, présentée pour elle-même.
• Les célèbres résultats de proportionnalité du Livre XII, établis à l’aide de la non moins célèbre méthode dite d’exhaustion.

J’ajouterai :

• que l’exposé arithmétique, surtout dans le Livre IX, va bien au-delà de ce qui était requis pour les exposés des Livres X et XIII.
• que le critère déductif, mis en œuvre dans les considérations précédentes, n’est pas le seul qui ait conduit à l’inclusion de certains résultats dans les *Éléments.* Ainsi, la théorie euclidienne de l’exprimabilité et de l’irrationalité du Livre X dépend des relations arithmétiques : « avoir comme rapport celui d’un nombre carré à un nombre carré (ou celui de deux nombres plans semblables) ». Bien qu’il n’introduise aucune considération sur les irrationnelles cubiques, Euclide a cependant établi les résultats analogues — quand c’était possible — pour les nombres cubes ou solides semblables, bien que cela soit sans usage dans la suite du traité. Dans le même ordre d’idées, un certain nombre de théorèmes concernant les figures planes dans les Livres I et VI trouveront leurs analogues pour les solides dans le Livre XI, même s’ils ne sont impliqués dans aucune chaîne déductive.

*

Revenons maintenant sur le témoignage de Proclus concernant les sources et la contribution d’Euclide :

> « … Euclide … d’une part, mit en ordre beaucoup de théorèmes d’Eudoxe (πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας), d’autre part perfectionna beaucoup de ceux de Théétète (πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος), et encore, éleva les plus faiblement démontrés par ceux d’avant lui jusqu’à des démonstrations irréfutables (ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών) ».

Ledit témoignage suit la mention des “historiens” de la géométrie, mais cela ne nous permet pas vraiment d’en identifier le responsable : il y a de grandes chances que ce soit Proclus lui-même, mais il se pourrait aussi, comme le croyait Tannery, que le Diadoque reproduise ici un montage dû à l’un de ses prédécesseurs[25]. Il ne nous dit pas que les auteurs d'*Éléments* précédemment nommés : Hippocrate, Léon, Theudios figuraient parmi les sources d’Euclide, probablement parce que l’auteur dudit témoignage ne sait rien de ces recueils

[25] Tannery optait pour Géminus de Rhodes, mais ce pourrait être un des commentateurs antérieurs des *Éléments* : Héron, Porphyre ou Pappus. Récemment L. Zhmud a soutenu l’idée que Proclus devait beaucoup à Porphyre.

antérieurs. De plus, on peut s'interroger sur ce qu'a fait Euclide à partir des travaux d'Eudoxe et Théétète[26], compte tenu de ce que le Résumé dit déjà d'Hermotime de Colophon. Enfin, on peut penser que notre témoignage, dans cette partie comme dans ce qui suit, sur Euclide, est le résultat d'une reconstruction "historique" à partir des indications suivantes :

• Archimède, dans les préfaces de plusieurs des écrits qu'il a envoyés à ses correspondants alexandrins, attribue explicitement la démonstration de ce qui, pour nous, constitue les Propositions XII. 7 — ou plutôt son corollaire[27] — et XII. 10[28] à Eudoxe. A partir de là, il était facile d'inférer que le Livre XII devait beaucoup au célèbre Cnidien. C'est d'ailleurs ce que suggèrera aussi Héron, un peu plus tard (I^er^ s. de notre ère ?), dans sa préface au Livre I des *Métriques,* en lui attribuant cette fois XII. 10 et XII. 2[29].

• Le Résumé historique conduit à penser qu'il pourrait en être de même du Livre V (voir *supra,*le début de l'assertion (*iii*) relative à Eudoxe). C'est d'ailleurs ce qu'affirme une scholie ancienne, très probablement d'origine néo-platonicienne[30] :

> « L'objectif, dans ce cinquième Livre, est d'expliquer ce qu'il en est des proportions; car ce Livre est commun à la géométrie et à l'arithmétique et à la musique et, tout simplement, à l'ensemble de la science mathématique. Car les choses qui y sont démontrées s'appliquent non seulement aux théorèmes géométriques mais aussi à toutes les choses ordonnées par la science mathématique, comme cela a été annoncé. Tel en est donc l'objectif, tandis que certains disent que la découverte de ce Livre est d'Eudoxe, le maître de Platon (ὁ μὲν οὖν σκοπὸς οὗτος, τὸ δὲ βιβλίον Εὐδόξου τινὲς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου) »,

et c'est aussi ce qu'admet, à de rares exceptions près, la critique moderne.

• Le dialogue de Platon qui porte son nom suggère que Théétète a joué un rôle dans l'élaboration de la théorie des lignes incommensurables. Mais la terminologie utilisée et même la conception sous-jacente de l'exprimabilité n'est pas celle du Livre X des *Éléments,* ce qui a tout naturellement induit leur confrontation. Ceci pouvait conduire à faire des travaux de Théétète le point de départ qui aboutira au Livre X. C'est d'ailleurs ce qu'affirme l'auteur du premier Livre du *Commentaire au Livre X* attribué à Pappus. Il dit même davantage : s'appuyant sur l'autorité de l'historien Eudème de Rhodes, il attribue l'introduction de trois des

---

[26] Ces deux géomètres sont mentionnés, non pas selon l'ordre chronologique (aussi bien pour Euclide que pour Hermotime), mais selon l'ordre d'"apparition" de leurs résultats dans les *Éléments* : si l'on identifie les théorèmes généraux cités par le Résumé à la théorie du Livre V, Eudoxe apparaît en premier.

[27] « A partir de ceci il est évident que toute pyramide est la tierce partie du prisme ayant la même base qu'elle et de hauteur égale ».

[28] « Tout cône est la tierce partie du cylindre qui a la même base que lui et une hauteur égale ».

[29] « Les cercles sont l'un relativement à l'autre comme les carrés sur leurs diamètres ».

[30] Scholie N° V. 1, *EHS,* V, 1, 211.1-8 Heiberg.

espèces fondamentales d'irrationnelles du Livre X : médiale, binomiale et apotomé à Théétète[31]. Une scholie ancienne, parfois assignée à Proclus et (mal ?) inspirée par le dialogue platonicien, affirme que la Proposition X. 9 est due à Théétète[32]. Si cette attribution particulière n'est pas à prendre au pied de la lettre, reste que l'implication de Théétète dans le développement de la théorie des irrationnelles est certainement l'un des points les moins douteux de l'histoire des mathématiques grecques pré euclidiennes !

• Puisque nous avons parlé des scholies anciennes et de leurs incertitudes, il faut encore en mobiliser une, la scholie liminaire au Livre XIII[33] :

> « Dans ce Livre, c'est-à-dire le 13e, sont décrites les 5 figures dites de Platon, lesquelles ne sont pas de lui : trois des 5 figures susdites sont pythagoriciennes, à savoir le cube et la pyramide et le dodécaèdre; de Théétète sont et l'octaèdre et l'icosaèdre. Elles ont reçu la désignation « de Platon » à cause de la mention qu'il fait d'elles dans le *Timée.* Mais ce Livre-ci doit être attribué à Euclide à cause de la mise en ordre élémentaire qu'il a imposée aussi à cet élément-là ».

Ainsi 3 des 5 polyèdres réguliers (cube, pyramide, dodécaèdre) appartiendraient aux Pythagoriciens, les deux autres (octaèdre, icosaèdre) à Théétète. Si l'on accepte ce témoignage dans sa globalité, on devra probablement en déduire que l'étude des figures régulières par les Pythagoriciens ne visait certainement pas l'exhaustivité — on comprendrait mal qu'ils n'aient pas construit l'octaèdre) — et cette recherche serait à porter au crédit de Théétète. A titre de "confirmation", on peut citer le témoignage du très tardif dictionnaire de la *Suda* — entrée *Théétète* — qui affirme que celui-ci a été le premier à composer un écrit sur les cinq figures régulières.

Nous ignorons quelle peut être la source ancienne de ces assertions tardives. On pourrait croire qu'on les a conçues à partir du constat que le seul usage du Livre X repérable dans les *Éléments* se trouve dans les Propositions XIII. 6, 11, 16, 17, 18 et du lien, mieux assuré, entre le Livre X et Théétète. Mais une telle hypothèse ne rendrait pas compte de la

---

[31] « Cette science a son origine dans la secte de Pythagore, mais connut un important développement dans les mains de l'Athénien Théétète qui avait une aptitude naturelle tant pour cela que pour les autres branches des mathématiques, digne d'admiration au plus haut point … ce fut néanmoins Théétète qui distingua les puissances qui sont commensurables en longueur de celles qui sont incommensurables et qui divisa les lignes irrationnelles plus généralement connues selon les différentes moyennes, assignant la ligne médiale à la géométrie, la binomiale à l'arithmétique, et l'apotomé à l'harmonie, comme cela est affirmé par Eudème le péripatéticien ». *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's* Elements. Arabic text and translation by W. Thomson with introductory remarks, notes, and a glossary of technical terms by G. Junge et W. Thomson. Cambridge, Harvard Univ. Press, 1930, p. 63. L'assertion relative à Théétète constitue le Fragment 141 I d'Eudème dans l'édition Wehrli. La "conversion" du résultat de Théétète en termes euclidiens est exposée dans le livre II du même commentaire, §§17-20, *op. cit.,* pp. 138-144.

[32] Scholie N° X. 62, *EHS,* V, 2, 113.23-24 Heiberg. Elle s'inspire également du premier Livre du *Commentaire au Livre X* attribué à Pappus, § 10, *op. cit.,* pp. 72-74.

[33] Scholie N° XIII. 1, *EHS,* V, 2, 291.1-9 Heiberg.

répartition des polyèdres indiquée par la scholie : c'est évidemment pour caractériser les arêtes des deux polyèdres complexes (dodécaèdre et icosaèdre) que les irrationnelles euclidiennes sont mobilisées, pas pour l'octaèdre. On en saurait peut-être davantage si les commentaires de Proclus ou de Chalcidius sur la portion du *Timée* dans laquelle interviennent les polyèdres réguliers étaient conservés. Malheureusement ce n'est pas le cas. Eva Sachs a souligné la structure similaire de la scholie N° XIII. 1 et du début du *Commentaire au Livre X* ; elle en faisait un argument pour rapporter ladite scholie à Pappus (suggérant, en dernière instance, l'autorité d'Eudème). Pour ma part, je suis convaincu que le Livre I de ce *Commentaire* n'est pas dû au seul Pappus, mais qu'il contient aussi (seulement ?) des développements d'origine néo-platonicienne[34]. Cela ne contredit ni la parenté des deux témoignages ni leur valeur informative en ce qui concerne les travaux de Théétète.

Si nous récapitulons les informations transmises par Archimède, le commentaire attribué à Pappus et les scholiastes, nous confirmons l'assertion transmise ou élaborée par Proclus au sujet des sources des *Éléments* ; nous pouvons même la préciser : les sources fondamentales des trois "fins" principales du traité d'Euclide (Livres X, XII et XIII) sont les travaux de Théétète et Eudoxe. Pouvons-nous glaner d'autres bribes d'informations sur ses hypothétiques sources ? Peut-être.

Nous avons cité à plusieurs reprises le péripatéticien Eudème de Rhodes. Ce disciple d'Aristote est en effet le seul historien des sciences mathématiques — en fait de trois d'entre elles : géométrie, arithmétique, astronomie — appartenant à la fin de l'époque classique (2^e^ moitié du IV^e^ siècle avant notre ère) et connu de nous. Il est notamment la source de deux des plus précieux et des plus anciens fragments concernant l'histoire pré euclidienne de la géométrie :

— le témoignage sur la quadrature des lunules par Hippocrate de Chio rapporté par Simplicius ;

— la solution d'Archytas au problème de l'insertion des deux moyennes, transmise par le commentateur d'Archimède, Eutocius d'Ascalon.

Or le premier texte explique qu'Hippocrate avait établi le résultat contenu pour nous dans XII. 2 dont nous avons déjà parlé. L'une des difficultés avec Eudème est qu'il est un adepte de la reconstruction rationnelle. On le voit à propos de Thalès à qui il attribue la Proposition I. 26 des *Éléments,* parce que sa connaissance aurait été requise pour justifier une méthode de calcul de l'éloignement d'un navire mise au point par Thalès.

Beaucoup d'historiens ont donc récusé le témoignage sur XII. 2 en disant qu'Archimède l'attribuait à Eudoxe. Mais ce n'est pas vrai : c'est Héron qui le fait. Dans la préface à la *Quadrature de la Parabole,* Archimède compare la démarche qu'il a suivie à celle qui, auparavant, avait permis d'établir les résultats contenus pour nous dans XII. 2 et 18, XII. 7

[34] Voir Euclide : *Les Eléments*. Traduction et commentaires par B. Vitrac. Collection Bibliothèque d'histoire des sciences. Paris, P.U.F., Vol. 3 : Livre X, 1998, pp. 418-419.

Por. et XII. 10. Mais, à ce point, il cite, *non pas Eudoxe, mais les géomètres antérieurs* sans plus de précision :

> « … en admettant pour la démonstration le lemme que voici : l'excès de la plus grande de deux aires inégales sur la plus petite peut dépasser, s'il est ajouté à lui-même, toute aire finie donnée. Or les géomètres antérieurs ont fait appel eux aussi à ce lemme; car c'est en se servant de ce lemme qu'ils ont démontré que *les cercles ont entre eux le rapport doublé de [celui] des diamètres.* Et que *les sphères ont entre elles le rapport triplé de [celui] des diamètres,* et que *toute pyramide est la tierce partie du prisme ayant même base que la pyramide et une hauteur égale,* et que *tout cône est la tierce partie du cylindre ayant même base que le cône et une hauteur égale,* ils l'ont démontré en prenant un lemme semblable à celui que nous venons d'indiquer ».

Et c'est seulement quand il se limite à XII. 7 Por. et XII. 10, dans deux autres préfaces (*Sphère et cylindre, Méthode*), qu'il le nomme et en fait l'éloge. Si l'on croit que ces variantes sont significatives, on conclura à tout le moins que l'attribution à Hippocrate n'est pas incompatible avec le témoignage d'Archimède.

Un autre témoignage tardif, celui de l'*Institutio musica* de Boèce[35], suggère fortement qu'Archytas — le maître d'Eudoxe selon Diogène Laërce — connaissait la Proposition VIII. 8 des *Éléments* et l'utilisait pour montrer qu'on ne peut pas introduire de moyen proportionnel entre deux nombres en rapport épimore (ce qui, soit dit en passant, inclus comme cas particulier une preuve arithmétique de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré).

Hippocrate de Chio, Théétète d'Athènes, Archytas de Tarente et Eudoxe de Cnide : soit quatre géomètres mentionnés dans le Résumé historique de Proclus dont les travaux figuraient très probablement parmi les sources d'Euclide. En revanche, je ne crois pas que l'on puisse accepter sans réserve d'autres assertions de type historique — qu'elles proviennent ou non d'Eudème — et qui concernent la période d'avant Hippocrate, laquelle — il faut le souligner — correspond à celle du développement, dans tous les domaines, de la littérature technique en prose. Ces "informations" complémentaires sont fournies par les *Commentaires* aux Livres I et X, par certaines scholies, par Plutarque (I[er]-II[e] s. de notre ère) et quelques autres prosateurs hellénistiques ou romains.

Outre l'attribution de quelques résultats très élémentaires à Œnopide de Chio, il s'agit, pour l'essentiel d'identifier les contributions respectives des très hypothétiques pères fondateurs que sont Thalès et Pythagore. Deux principes sont à l'œuvre :

— les thématiques de l'irrationalité et des polyèdres réguliers sont présentes dans les dialogues de Platon. Dès l'époque de l'ancienne Académie, certains disciples essaient d'imposer l'idée que le pythagorisme est l'une des sources du platonisme. D'autres auteurs, plus hostiles,

[35] Boèce, *Institutio musica,* III, 11 = DK 47 A 19.

accusent Platon de plagiat à l'égard de Pythagore ou de Philolaos. Plus tard, on reconstituera même, à partir du *Timée,* l'écrit de Timée de Locres dont Platon est censé s'être inspiré ! L'une des sources d'Euclide sur ces sujets était sans doute les travaux de Théétète. Il est donc vraisemblable qu'il en aille de même pour son ami Platon. Mais certains ont voulu conférer une plus grande antiquité à ces théories en les attribuant à d'anciens pythagoriciens, en fait :

• à Pythagore lui-même, dans la version du Résumé de Proclus[36];

• à un certain Hippase — ou Hipparche —, de Crotone selon certains, de Métaponte selon d'autres, dans une version alternative passablement embrouillée et transmise par Jamblique de Chalcis (2^{e} moitié du III^{e} s.—1^{e} moitié du IV^{e} s. de notre ère)[37].

Ainsi, deux des "fins" des *Éléments* auraient déjà été esquissées dès l'époque de l'Ancien Pythagorisme.

— Le second principe à l'œuvre dans cette écriture de l'"histoire" des mathématiques est le postulat que l'ordre logique de l'exposé euclidien reflète l'ordre chronologique des découvertes. Il est donc légitime de chercher, parmi les prédécesseurs d'Hippocrate de Chio, Théétète d'Athènes, Archytas de Tarente et Eudoxe de Cnide, les sources des autres Livres et, tout particulièrement, des premiers : deux scholies — mais il n'est même pas certain qu'elles soient d'origine antique plutôt que byzantine — attribuent le Livre IV aux pythagoriciens[38] ; selon Eudème, *dixit* Proclus, il faut aussi leur rapporter la technique de l'application des aires ; le Diadoque, mais aussi Plutarque, discutent les découvertes de Pythagore lui-même, notamment le célèbre théorème de l'hypoténuse (I. 47), etc.

Chacun de ces deux principes soulève de redoutables problèmes. Aucun texte de l'époque classique ne témoigne d'une quelconque activité mathématique de Pythagore. Quand ils parlent de physique ou de philosophie des mathématiques, Aristote et les aristotéliciens, plus prudents, préfèrent évoquer les pythagoriciens d'une manière collective, en conséquence de quoi nous ne savons pas exactement de quelle période ils parlent. Une grande partie de la tradition fait d'Archytas un pythagoricien, mais c'est un contemporain strict de Platon. On peut d'ailleurs remarquer qu'Aristote ne dit jamais qu'Archytas est un pythagoricien. A l'inverse, Jamblique n'hésite pas à inscrire Théodore de Cyrène dans son catalogue des membres de cette école, alors que Platon le présentait comme un disciple de Protagoras. L'histoire rapportée au sujet d'Hippocrate et de l'escroquerie dont il avait été la victime ressemble beaucoup au mythe étiologique par lequel Jamblique explique la divulgation de la géométrie pythagoricienne et le

---

[36] Proclus (p. 65, l. 20-21) rapporte la théorie des irrationnelles et la construction des figures dites cosmiques (sans discrimination d'aucune sorte) à Pythagore lui-même. Dans l'introduction du *Commentaire au Livre X* attribué à Pappus, c'est collectivement aux pythagoriciens qu'on attribue les débuts de la théorie des irrationnelles ; dans la scholie N° XIII. 1, comme nous l'avons vu, c'est la construction de trois des polyèdres réguliers.

[37] Voir Jamblique, *Vie de Pythagore,* § 88 et § 247 et *De communi mathematca scientia liber,* § XXV. Hippase (de Métaponte ?) aurait divulgé l'inscription du dodécaèdre dans la sphère, une découverte du Maître. Celui qui aurait divulgé l'irrationalité aurait été rejeté de la secte pythagoricienne ou aurait péri en mer. Même sort pour Hippase.

[38] Scholies N° IV. 2. 4, *EHS,* V, 1, 204.18-19 et 205.7-8 Heiberg respectivement.

même auteur associe d'ailleurs Hippocrate et Théodore[39]. On ne peut certainement pas écarter complètement l'idée qu'il y eut une contribution pythagoricienne à l'histoire de la géométrie dans les premières générations de l'école. Mais, même si c'est le cas, nous n'en connaîtrons jamais la teneur, car les témoignages tardifs sont surdéterminés par des enjeux concernant l'exégèse de Platon, voire celle d'Euclide.

De même, il est probable que certains des résultats mathématiques anciens, présupposés par les travaux de Théétète ou d'Eudoxe repris par Euclide, se trouvent dans les *Éléments.* Mais nous ne savons pas lesquels, nous ne connaissons pas le niveau d'élaboration déductive de leurs exposés — j'ai déjà souligné que ceux-ci étaient censés avoir été améliorés deux fois, par Hermotime et par Euclide — et il est très clair que l'ordre logique ne saurait coïncider avec l'ordre chronologique. Il est au contraire probable que certains résultats ont été explicités seulement au moment de la réorganisation euclidienne. Celle-ci, comme le remarquait déjà Heiberg, privilégiant la démarche déductive et la dimension architecturale, rend difficile la restitution des contextes d'élaboration des principaux résultats consignés dans les *Éléments.* Elle fait écran aux questionnements heuristiques.

Pourtant, les historiens modernes, durant un siècle au moins, de Paul Tannery (1887) à David Fowler (1987), en passant par Heinrich Vogt, Eva Sachs, Hieronymos Zeuthen, Oskar Becker, Van der Waerden, Arpad Szabó, Wilbur Knorr, Maurice Caveing, … vont emboîter le pas aux Anciens et confronter, à leur tour, les témoignages historiques, notamment le Résumé de Proclus, avec le traité d'Euclide — plus précisément avec ce qu'ils identifient comme les anomalies de sa structure — pour en reconstituer l'histoire. C'est ce que j'ai appelé la lecture « archéologique » des *Éléments.*

IV. Lecture « archéologique », exégèse et structure des *Éléments*

Cette manière de lire le traité d'Euclide est en quelque sorte l'aboutissement du long travail d'exégèse que les commentateurs de l'Antiquité, du Moyen-Âge, puis de la Renaissance lui ont appliqué. Ce travail, autant que cette lecture, reconnaissent que les *Éléments* sont d'abord une construction. Tant que le traité sera mathématiquement stimulant, on s'efforcera de renforcer ladite construction et ce sont donc les pierres les plus fragiles, ou les plus exposées, qui seront l'objet de l'attention des commentateurs :

• Particulièrement exposés sont les principes sur lesquels est fondé le discours euclidien : les Définitions, Demandes (postulats) et Notions communes (axiomes). Leur critique était d'autant plus prévisible que l'on disposait d'une théorie de la démonstration et de la définition scientifiques dans les *Seconds Analytiques* d'Aristote et qu'il y avait suffisamment de points communs et autant de divergences entre la théorie aristotélicienne et la mise en œuvre euclidienne pour alimenter des discussions sans fin. A ces raisons logico-philosophiques

[39] Jamblique, *De communi mathematca scientia liber,* § XXV.

s’ajoutaient éventuellement des problèmes textuels liés à la transmission manuscrite, ou des difficultés apparaissant dans la confrontation de traditions mathématiques divergentes. Dès l’Antiquité (depuis Géminus au moins), on a proposé des définitions alternatives, interrogé la distinction « postulat / axiome », mis en cause le statut logique des Demandes 4 et 5 (le célèbre postulat des parallèles). Un autre passe-temps favori des commentateurs — jusqu’aux modernes — a été de traquer les assomptions implicites qu’Euclide aurait dû expliciter sous forme de principes[40].

• La critique ne s’est pas limitée aux principes : un certain nombres de preuves ont été jugées non satisfaisantes, voire insuffisantes, et ce, soit dans la simple mise en œuvre, soit parce que sa méthode de démonstration paraissait critiquable. En conséquence de quoi des preuves alternatives ont été proposées pour un nombre assez important de Propositions[41].

L’insatisfaction avec le traitement euclidien n’était pas la seule motivation : prouver un résultat autrement est aussi une façon de montrer sa maîtrise du sujet, de mettre en évidence une connexion mathématique imprévue … Mais dans un certain nombre de cas, l’insatisfaction ne fait aucun doute. Par exemple les preuves des Propositions VIII. 22-23 ont été jugées irrecevables à un certain moment de la transmission et cela a entraîné leur remplacement par d’autres, plus sophistiquées, dans la version arabe dite de Ishâq-Thâbit (traduction de Ishâq ibn Hunayn, révisée par Thâbit ibn Qurra). Les preuves des premières Propositions du Livre XI (1-3, 7) sont notoirement insuffisantes, entre autres parce qu’Euclide n’a pas introduit de postulats stéréométriques et a cru pouvoir fonder entièrement sa géométrie des solides sur celle des figures planes. En ce qui concerne les méthodes, les preuves indirectes ne plaisaient ni à Héron, ni à Ménélaos — celui-ci le dit explicitement dans l’introduction de ses *Sphériques* — et, dès la Renaissance, peut-être bien avant, le recours à la superposition dans les Propositions I. 4, I. 8, III. 24, a été contesté car considéré comme empirique.

Un explication commune à ces remises en cause, tant des principes que de ce qui en découle, réside dans l’idéal que doit satisfaire, non seulement un texte mathématique, mais aussi, si l’on en croit Aristote, tout ce qui prétend être une belle chose : on n’en peut rien retrancher, ni rien y ajouter[42]. Dans le cas d’un texte déductif comme les *Éléments,* cela signifie qu’il ne saurait souffrir aucune lacune, aucune redondance. C’est d’ailleurs les qualités

---

[40] J’ai listé les principaux sujets de discussion de cette sorte dans un tableau ; voir Annexes, VI.

[41] Je me permets de renvoyer à l’article que j’ai consacré à cette question : « A propos des démonstrations alternatives et autres substitutions de preuve dans les *Éléments* d'Euclide ». *Archive for History of Exact Science,* 59, 2004, pp. 1-44.

[42] « ὅθεν εἰώθασιν ἐπιλέγειν τοῖς εὖ ἔχουσιν ἔργοις ὅτι *οὔτ’ ἀφελεῖν ἔστιν οὔτε προσθεῖναι* ». *Eth. Nic.,* II, 5, 1106 b 10-11. L’expression, *quasi* proverbiale est utilisée par Jamblique (*In Nic. Ar.,* 5.24 Pistelli) pour décrire la façon dont il utilise Nicomaque dans sa propre *Introduction*; je remercie N. Vinel d’avoir attiré mon attention sur ce point.

que lui reconnaît Proclus[43], mais la tradition exégétique n'a pas toujours été aussi clémente. Les Modernes sont bien plus critiques encore : certaines définitions euclidiennes sont superflues et les termes qu'elles introduisent, par exemple point, ligne, plan … auraient dû figurer parmi les termes primitifs de l'axiomatique euclidienne. A l'inverse, beaucoup de propriétés de la droite ou du cercle, dites aujourd'hui « topologiques, sont tacitement admises dans les *Éléments* et comme les commentateurs l'avaient signalé dès l'Antiquité un certain nombre de principes font défaut, introduisant des lacunes déductives ou, si l'on préfère, des recours à l'intuition mal fondés. Au-delà de ces remises en cause ponctuelles qui font les délices des commentateurs, un certain nombre de critiques portant sur la structure et le plan du traité ont été émises.

*

La plupart des philosophes anciens qui ont parlé des mathématiques, depuis Platon et Aristote, admettent que l'arithmétique est « antérieure » à la géométrie, de par la plus grande simplicité de ses objets (qui n'ont pas besoin de la notion de position) et donc de ses principes ; par conséquent, la connaissance qu'elle a de ses objets est plus précise que celle de la géométrie. Les auteurs Néo-pythagoriciens de l'époque romaine et les Néo-platoniciens de l'Antiquité tardive considèrent que cette antériorité logique de l'arithmétique se double d'une primauté en dignité et aussi bien Nicomaque, Théon de Smyrne que Jamblique estiment devoir commencer leur traitement des mathématiques par l'arithmétique. Ils avaient probablement observé que ce n'était pas le cas chez Euclide. Il est fort possible qu'ils aient désapprouvé sa démarche, mais je ne connais pas de critique antique *explicite.* En fait, à l'instar de ce que j'ai évoqué à propos des sources des *Éléments,* ces auteurs et leurs épigones, par exemple Anatolius d'Alexandrie (2e moitié du IIIe s.), Eutocius d'Ascalon (Ve s.— VIe s. de notre ère), vont proposer une interprétation « logico historique » du *quadrivium* : la théorie des proportions, par exemple, a son origine dans les nombres ; elle a été ensuite transposée au domaine des grandeurs[44]; les premiers savants, tel Pythagore, ont d'abord développé les mathématiques "pures" (arithmétique et géométrie) avant qu'on ne les envisage comme instruments pour les mathématiques appliquées aux choses sensibles[45].

---

[43] Proclus, *in Eucl.* I, 69.27—70.1 : « ἢ καὶ τὸ τυχὸν προσθεὶς ἢ ἀφελὼν οὐκ ἐπιστήμης λανθάνεις ἀποπεσὼν καὶ εἰς τὸ ἐναντίον ψεῦδος καὶ τὴν ἄγνοιαν ὑπενεχθείς; » (D'ailleurs ne sait-on pas qu'en leur ajoutant ou en leur retranchant quelque chose on s'éloigne de la science et qu'on est enclin à une erreur contradictoire et à l'ignorance, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1948, p. 63).

[44] Cf. Eutocius, *In Apoll. Coniques,* 220.17-25 Heiberg.

[45] Voir Pseudo-Héron, *Definitiones,* 138.3 (ἐκ τῶν ʼΑνατολίου), 160.24—162.10 Heiberg.

Ces généalogies sont fictives, comme l'est aussi l'interprétation proposée par certains auteurs médiévaux qui affirment, en s'"inspirant" des *Éléments,* que, pour les Grecs, la géométrie inclut l'arithmétique. Certes, comme on l'a vu en passant, le Livre V, à certains égards, interrompt l'exposé de géométrie plane et certains, dès l'Antiquité, pensait que son caractère général ou commun lui valait de s'appliquer à toutes les sciences mathématiques, y compris l'arithmétique. C'est par exemple ce que disait l'auteur de la scholie n°V. 1[46]. Marinus, auteur ou inspirateur de cette scholie (?), ne suggérait pas autre chose, quand il faisait le parallèle entre les traitements euclidiens du "donné" (δεδομένον) et des rapports, soulignant leur caractère général (καθόλου), mais remarquant tout de même qu'Euclide, avant tout géomètre, en avait particularisé l'exposé aux *seules* grandeurs « dans son 5e des Livres plans »[47]. Certains Modernes, par exemple Heath, seront moins prudents et admettront que le Livre V s'applique aux nombres parce que ceux-ci constituent un cas particulier des grandeurs ; ce qui, compte tenu de la caractérisation qu'en donnent les Anciens, revient à considérer le non indéfiniment divisible comme un cas particulier de l'indéfiniment divisible !

La lecture archéologique va reprendre ces différents ingrédients et en proposer une interprétation de type historique, non pas selon une grille logique, comme le faisaient les Anciens, identifiant ce qui est le plus simple à ce qui est chronologiquement antérieur, mais dans une perspective épistémologique beaucoup plus stimulante (et certainement plus plausible), faisant appel aux notions de "crise", d'objets "pathologiques" … Dans son ouvrage *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* (1887), Tannery reprend les assertions incertaines du résumé de Proclus — à ce moment-là, on l'attribuait sans état d'âme à Eudème —au sujet de Pythagore. Celui-ci aurait découvert le phénomène de l'incommensurabilité. Tannery avance même l'idée d'un « scandale logique », formule qui fera fortune. Hasse et Scholz surenchériront et parleront d'une « crise des fondements » dans les mathématiques grecques à la suite de la découverte de l'incommensurabilité[48], crise quelque peu paradoxale car, compte tenu de la chronologie, il ne pouvait s'agir, au mieux, que d'une crise fondatrice.

• Mais aucune source *classique* n'évoque une telle crise. Platon et Aristote sont les auteurs de l'époque (classique) les plus prolixes au sujet des mathématiques et ils font allusion à de nombreuses reprises à l'existence de grandeurs incommensurables : jamais l'idée de "crise" n'apparaît chez eux.

---

46 Voir *supra,* note 30.

47 *Introduction aux Data,* 254.20-27 Menge.

48 Hasse, H. et Scholz, H., Die Grundlagen-Krisis der griechischen Mathematik. *Kants-Studien* 33, 1928, pp. 4-34.

• La thématique des « fondements » des mathématiques est à peine esquissée chez Platon et elle est avant tout aristotélicienne. Il s'agit donc probablement d'une thématique du IV^{e} plutôt que du V^{e} siècle, époque assignée à la dite découverte.
• La période qui va d'Hippocrate de Chio à Eudoxe de Cnide, loin d'apparaître comme celle d'une crise qu'affronterait la recherche mathématique, apparaît plutôt comme l'une des plus fécondes de l'histoire grecque.
• Le trouble suscité par la question des irrationnelles n'apparaît que chez des auteurs très tardifs (Jamblique, l'auteur du premier livre du commentaire au Livre X) dans un contexte soit de divulgation, soit d'une malhonnête appropriation de résultats, avec des incertitudes sur lesdits résultats, sur les protagonistes et sur les modalités de la "punition" infligée en retour.
En fait, il n'y a pas vraiment de base textuelle sérieuse à l'hypothèse de Tannery concernant la « crise des irrationnelles ». Manifestement, le contexte mathématique contemporain — les débats autour des fondements de la récente théorie des ensembles au tournant des XIX^{e}-XX^{e} siècles — favorisait une telle grille d'interprétation.

Les seuls indices tangibles qu'avançait Tannery résidaient dans le plan même suivi par Euclide pour ses dix premiers Livres, plan qui reflèterait l'histoire pré euclidienne. Ainsi, les quatre premiers Livres évitent d'utiliser la théorie des proportions parce qu'ils correspondraient aux résultats obtenus dans la période intermédiaire qui va de la découverte de l'incommensurabilité par Pythagore à la mise au point d'une théorie générale des proportions par Eudoxe de Cnide. Celle contenue dans le Livre VII, désormais insuffisante, représente donc l'état antérieur de ladite théorie. Elle est donc inutile et Euclide ne l'aurait maintenue que comme une sorte de témoignage historique ou de fossile. D'ailleurs, selon Tannery, la place des Livres arithmétiques constitue une énigme[49]. Bien entendu, les géomètres de cette époque connaissaient aussi certains des résultats des Livres VI, XI, XIII qu'Euclide fonde désormais sur la nouvelle théorie. Ceci expliquait aussi la présence de certains doublons, par exemple II. 11 et VI. 30, concernant la section d'une droite en extrême et moyenne raison, I. 47 et VI. 31 pour le théorème de l'hypoténuse et, bien sûr, la réplication de certains résultats de la théorie des proportions du Livre V dans le Livre VII, par exemple les Propositions VII. 11-14, répliquant respectivement V. 19, 12, 16, 22.

Pour Tannery, la découverte de l'existence de grandeurs incommensurables, puis le développement d'une théorie des irrationnelles, la généralisation de la théorie des proportions qui en était la conséquence obligée, tout cela constituerait le noyau central de l'histoire des

---

[49] *Op. cit,* p. 102, note 1 : « sont-ce les travaux de Théétète qui ont déterminé l'introduction dans les *Eléments* des Livres arithmétiques au *rang singulier* qu'ils occupent ? A-t-il lui-même travaillé sur ce sujet ? Ces questions, actuellement, me paraissent insolubles » ; c'est moi qui souligne.

mathématiques grecques dans sa période la plus ancienne. Répétons-le une fois encore, si l'on décolle les yeux des *Éléments,* cette description générale ne paraît pas exacte. L'époque pré euclidienne paraît surtout riche en développements concernant les mathématiques « appliquées aux sensibles » et, même en géométrie, il ne manque pas de thématiques étrangères à la tradition élémentaire : quadrature du cercle, duplication du cube, théorie des coniques et autres lieux …

Surtout, les apparentes incongruités du plan euclidien peuvent s'expliquer autrement. Trois principes d'interprétations sont importants pour notre présent propos et on peut argumenter pour soutenir l'idée qu'ils sont reconnus par Euclide :

1. Dans les *Éléments,* l'insertion d'une Proposition, d'un groupe de Propositions, voire d'un Livre se fait — sauf rares exceptions (notamment pour les converses) — le plus près possible du lieu où celle(s)-ci est (ou sont) utilisée(s) (quand c'est le cas !).
2. Les mathématiques grecques opposent de manière polaire deux types de quantités : les *arithmoi* et les *megethê,* disons les quantités discrètes et les continues, les nombres et les grandeurs géométriques.
3. Dans une science démonstrative (en particulier en mathématiques), les principes (non démontrés) doivent être les moins nombreux possibles. Ceci est explicitement affirmé par Aristote (*De cælo,* III, 4, 302 b26-30).

Ce premier principe ne fait guère de doutes. Dans les Livres I à VI, il vaut même pour les Définitions. C'est également ce qui conduit Euclide à insérer des résultats de géométrie plane dans ses Livres XII-XIII : ainsi XII. 1-2 sur le cercle qui servira dans les Propositions sur les cônes et cylindre ; XII. 16, lemme plan d'intercalation d'un polygone entre deux cercles concentriques mobilisé dans la Proposition qui suit, analogue spatiale (insertion d'un polyèdre entre deux sphères homocentriques); les deux premières parties du Livre XIII sont consacrées respectivement à la section d'une droite en extrême et moyenne raison et à certaines propriétés du pentagone régulier. Euclide aurait certainement pu les insérer soit dans le Livre IV consacré aux polygones réguliers, soit dans le Livre VI, mais ces Propositions sont autant d'étapes préliminaires pour la construction de l'icosaèdre (XIII. 16) et du dodécaèdre (XIII. 17). Nous pourrions multiplier les exemples.

C'est évidemment ce principe qui justifie l'insertion du Livre X avec ses notions d'exprimabilité et d'irrationalité, avant le Livre XIII — son seul usage —, avant le Livre XI aussi car la géométrie du Livre X est plane et, bien sûr, cela rend compte également de la place des Livres arithmétiques, juste avant le Livre X. Il n'y a là aucun mystère.

Nous avons déjà vu en quel sens la théorie du Livre V peut être dite générale : non prise en considération de la dimension, de la position et de la commensurabilité ou non des termes, mais, ainsi que le soulignait Marinus, elle reste une théorie géométrique. Chez Euclide, comme déjà chez Aristote, le nombre ne saurait être un cas particulier de la grandeur. En revanche, ils avaient bien vu qu'un cas particulier des rapports de grandeurs — quand elles sont commensurables — se ramènent à un rapport de nombre à nombre. Les *Éléments* tentent d'établir ce point, imparfaitement, dans les premières Propositions du Livre X. Mais les objets restent distincts et l'opposition « *arithmoi* \ *megethê* » justifie pleinement les deux théories des proportions, dans les V et VII, fondées sur des Définitions différentes. On ne saurait donc dire que VII. 11-14 sont des doublons de V. 19, 12, 16, 22. Les deux groupes mettent en évidence le parallélisme opératoire qui existe au niveau des relations. On pourrait dire la même chose pour les débuts des Livres VII et X qui sont l'un et l'autre fondés sur l'algorithme d'anthyphérèse.

Quant au principe logique d'économie — pour les Anciens, introduire un principe dont on peut se passer reviendrait à introduire une fausse "causalité", il justifie qu'Euclide établisse dans ses quatre premiers Livres tous les résultats de géométrie plane qui peuvent l'être sans recours à la théorie des proportions et à la similitude des figures rectilignes. La démarche est peut-être un peu artificielle, mais elle ne reflète pas des difficultés propres à une période historique intermédiaire. Il y a d'autres exemples du même genre : les 28 Propositions du Livre I ne dépendent pas du 5^{e} postulat dont l'intervention a été différé autant que possible, jusque dans I. 29.

Conclusion

En résumé, il est bien vrai que le plan des *Éléments* est singulier — de fait, il n'a rien de "naturel" ou d'inévitable —, mais on peut l'expliquer, non par les circonstances historiques de certaines découvertes, comme le voulait Tannery, mais en relation avec les principes suivis par Euclide pour construire son recueil. Entendons-nous bien ; je ne dis pas que cette structure est parfaite :

(*i*) au niveau logico-mathématique, la coordination, au début du Livre X, des deux théories des proportions, requises à cause des deux types d'objets considérés, est déficiente.

(*ii*) La fin du traité, la Proposition XIII. 18, n'est pas non plus très satisfaisante en l'état.

Les réactions, à cet égard, ont été contrastées : dès l'Antiquité, peut-être dès Apollonius, le traitement euclidien a été perçu comme incomplet. A l'époque tardive, au Moyen-Âge, arabe et latin et jusqu'à Clavius, on a ajouté des livres entiers consacrés aux

polyèdres réguliers jusqu'à ce que le thème en paraisse trop particulier. Ainsi Simson l'exclut-il de ses *Éléments*; il pouvait même, par conséquent, supprimer les Livres VII-VIII-IX-X et proposer une version (1756) ramassée en 8 Livres seulement.
(*iii*) Surtout, d'un point de vue pédagogique, la progression euclidienne est certainement assez désastreuse.

Le Livre V représente un saut considérable après la lecture des quatre premiers, plutôt élémentaires. Euclide s'y maintient à un très grand degré de généralité, n'introduit pas encore, à ce stade, la distinction entre grandeurs commensurables et incommensurables et se contente d'établir les propriétés générales de la proportionnalité. Les Définitions 5 et 7 sont perçues comme non motivées ; la complexité de leurs formulations et les aléas de la transmission manuscrite feront qu'elles seront comprises par la plupart des Médiévaux comme des propriétés à établir à partir d'autres définitions. Tous les commentateurs, depuis al-Mâhânî, an-Nayrîzî, Ibn al-Haythâm, al-Gayyânî, 'Umar al-Khayyâm, Campanus jusqu'à Clavius, anticipent donc sur la question de l'exprimabilité des rapports dès le Livre V.

Euclide a manifestement privilégié les contraintes de construction par rapport à l'efficacité pédagogique. Ce qui est assez surprenant, c'est qu'on ait admis son choix si longtemps : malgré les innombrables variantes ponctuelles qu'attestent les manuscrits anciens, les traductions et les adaptations médiévales, ladite structure a été maintenue. C'est même à peu près la seule chose qui ait été maintenue ! Le premier auteur que je connaisse qui la remet en cause est Maurolyco ; celui-ci, dans son *Compendium* du Livre V de 1567, propose (enfin) un traitement unifié de la théorie des proportions.