Atelier MA-a70 :
Cerf-volants et axes de symétrie, pas de temps à perdre en classe de sixième…
François DROUIN, Régionale de Lorraine.

Nous sommes convaincus de l'intérêt d'une introduction précoce de la symétrie centrale en classe de cinquième. Le parallélogramme est présenté comme un quadrilatère possédant un centre de symétrie. Les propriétés de la symétrie permettent de justifier les propriétés des parallélogrammes (diagonales se coupant en leur milieu, côtés opposés parallèles et de même longueur, angles opposés de même mesure). Elles seront mises plus tard à contribution pour l'égalité des angles alternes internes délimités par deux droites parallèles coupée par une droite sécante puis pour la somme des angles d'un triangle.

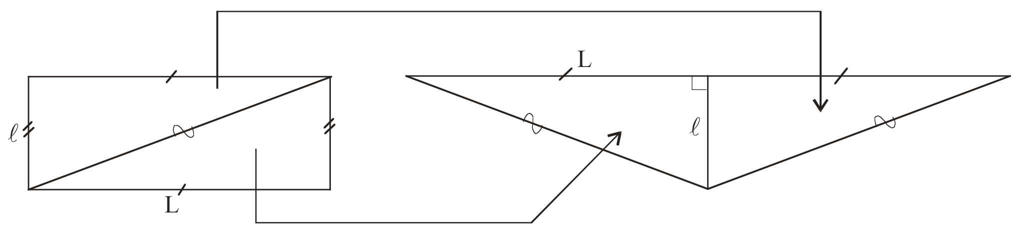
Et en classe de sixième ? Ne pourrions-nous pas prendre appui de façon tout aussi précoce sur la symétrie orthogonale ?

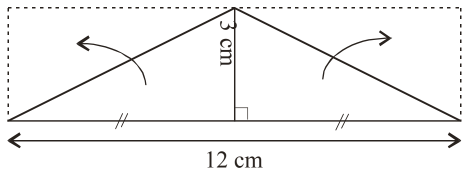
L'exposé relatait un travail mis en œuvre deux années de suite en classe de sixième.
L'envoi de l'ensemble des transparents présentés à Besançon peut m'être demandé à l'adresse « francois.drouin@ac-nancy-metz.fr ». Ils sont téléchargeables sur le site de l'APMEP à l'adresse des journées 2007. (Documents de l'atelier)

Très tôt dans l'année, les élèves ont rencontré les droites parallèles et perpendiculaires à partir de tracé de rectangles et de carrés et ont analysé les trois constructions mises en œuvre dans leurs tracés.
L'étude de la symétrie orthogonale était le second chapitre de géométrie rencontré. Suite au travail présenté lors de précédentes journées nationales par nos collègues belges Michel Demal et Danielle Popeler, l'aspect retournement de la figure était privilégié et l'aspect pliage abandonné.

Les élèves ont ensuite recherché les triangles possédant un axe de symétrie, c'est-à-dire revenant à leur position antérieure après retournement autour de l'axe de symétrie. Un triangle isocèle est alors défini comme un triangle qui a un axe de symétrie.
Les propriétés de la symétrie permettent alors de justifier les propriétés des triangles isocèles : ils ont deux côtés égaux, deux angles de même mesure, l'axe de symétrie passe par le milieu de la « base », l'axe de symétrie partage l'angle « au sommet » en deux angles de même mesure, l'axe de symétrie est perpendiculaire à la « base ».
Différents tracés de triangles isocèles sont proposés.

Un « découpage-réassemblage » de deux parties d'un rectangle permet de réaliser deux triangles symétriques donc de même aire et de justifier que l'aire d'un triangle rectangle et l'aire d'un triangle isocèle sont la moitié de l'aire d'un rectangle.

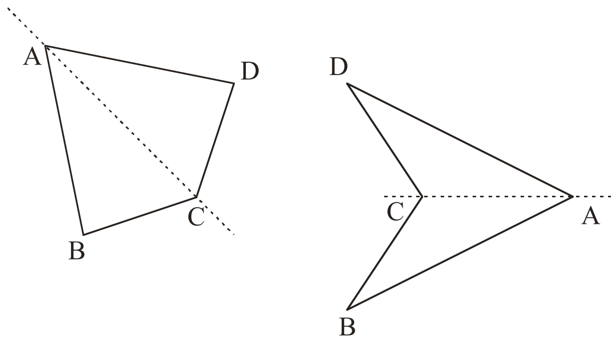




Ces remarques sont ensuite utilisées pour trouver l'aire de triangles isocèles puis quelconques (en découpant en deux triangles rectangles).

Une diagonale d'un quadrilatère détermine deux triangles. Des aires de quadrilatères sont ensuite cherchées.

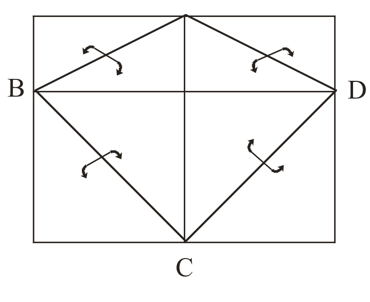
Suite à cette première rencontre avec des quadrilatères, le cerf-volant est présenté comme un quadrilatère dont une diagonale est axe de symétrie.

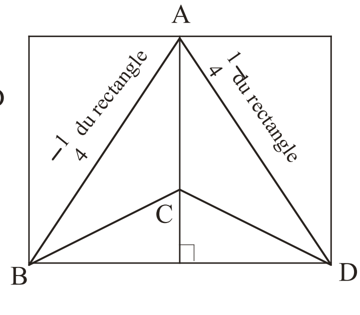


Les propriétés de la symétrie permettent alors de justifier les propriétés des cerfs-volants : Le cerf-volant possède deux paires de cotés consécutifs égaux, deux angles opposés égaux, deux diagonales perpendiculaires (plus exactement, les droites qui portent les diagonales sont perpendiculaires), la diagonale axe de symétrie coupe l'autre diagonale en son milieu et les deux angles qu'elle traverse en deux angles de même mesure.

Divers dessins de cerfs-volants peuvent être proposés. L'aire d'un cerf volant peut se calculer à partir de l'aire de quatre triangles rectangles, de deux triangles isocèles ou de l'aire d'un triangle et de son symétrique.

Une formule possible apparaît en « entourant » le cerf-volant convexe par un rectangle. La méthode est mise en défaut dans le cas d'un cerf-volant concave.



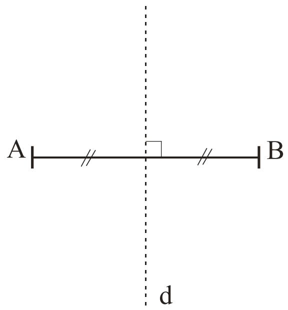


Les élèves de sixième constatent que malgré tout la formule repérée pour le premier cas semble rester valable pour le second, mais ne savent pas pourquoi…

Le losange est ensuite présenté comme un cerf-volant particulier : ses deux diagonales sont axes de symétrie. Des propriétés supplémentaires vont être justifiées : ses quatre côtés sont égaux, ses diagonales se coupent en leur milieu, ses angles opposés ont même mesure.
Pour calculer son aire, la formule mise en avant pour le cerf-volant reste valable.

Les tracés de cerf-volant ou de losange peuvent être mis à contribution pour le tracé du symétrique d'un point par rapport à une droite.

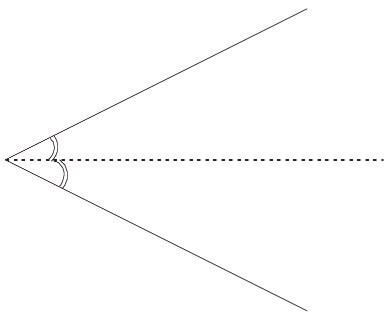
Un segment [AB] admet deux axes de symétrie :la droite qui porte le segment et une deuxième droite "d" tel que le point A soit le symétrique du point B par rapport à cette droite.



Les propriétés de la symétrie permettent alors de justifier les propriétés de la médiatrice d'un segment :elle est perpendiculaire à la droite qui porte le segment, elle passe par le milieu du segment, elle est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

L'axe de symétrie d'un triangle isocèle est la médiatrice de la base de ce triangle. Une des diagonales d'un cerf-volant est la médiatrice de l'autre diagonale, chaque diagonale d'un losange ou d'un carré est la médiatrice de l'autre diagonale.

La bissectrice d'un angle est la partie de l'axe de symétrie qui est à l'intérieur de l'angle.



<u>Conséquences :</u>
La bissectrice d'un angle partage cet angle en deux angles superposables.

L'axe de symétrie du triangle isocèle est la bissectrice de l'angle au sommet.
La médiatrice de la base d'un triangle isocèle est aussi la bissectrice de l'angle au sommet.

L'axe de symétrie du cerf-volant est la bissectrice des angles qu'il traverse.
La médiatrice de la diagonale qui n'est pas axe de symétrie est la bissectrice des angles traversés par l'axe de symétrie.

Les axes de symétrie du losange et du carré sont les bissectrices des angles qu'ils traversent.

Les diagonales du losange et du carré sont les bissectrices des angles qu'ils traversent

Il est ensuite temps de faire rencontrer d'autres quadrilatères qui ont autre chose qu'une diagonale comme axe de symétrie :
Avec un axe de symétrie, nous obtenons le trapèze isocèle (hélas hors programme dans l'enseignement secondaire…). Avec deux axes de symétrie, nous obtenons le rectangle.

Si je considère le carré comme un losange particulier, son aire sera égale à « (diagonale × diagonale) : 2 ».
Si je considère le carré comme un rectangle particulier, son aire sera égale à « côté × côté ».

Les élèves ont été très surpris de ces deux formules d'aire pour le carré…

Voici quelques intérêts que je vois dans cette approche :

Il possible de faire faire des raisonnements déductifs à des élèves de sixième.
Il est possible de faire travailler avec des aires de jeunes élèves (l'aspect mesure est clairement favorisé dans ce travail, il reste à proposer d'autres tâches permettant la comparaison d'aires et l'étude de figures de même aire).
Le cerf-volant introduit récemment dans les programmes trouve ici toute sa place.

La « boite à outils » mise à disposition des élèves est d'un usage aisé : elle contient les propriétés de conservation de la symétrie orthogonale et les éléments de symétrie des objets mathématiques rencontrés.

J'ai fourni l'ensemble des documents utilisés en classe aux collègues présents à Besançon qui le désiraient. Ils vont tester à leur tour cette approche. J'attends leurs remarques (et celles des lecteurs de ce compte-rendu).

Des interrogations demeurent :
J'ai fait tracer dès septembre des carrés et des rectangles. Je ne les rencontre de nouveau que tardivement dans cette approche. Cela n'avait pas perturbé mes élèves, mais était-ce le bon choix ?

Des collègues étaient un peu gênés par le fait que le triangle isocèle ne soit pas défini comme un triangle ayant deux côtés égaux. Je suis revenu assez vite en classe sur la définition classique entendue par certains en cycle III et j'ai dit à mes élèves qu'en sixième nous privilégierions ce qui utilise la symétrie orthogonale. Après tout, en classe de cinquième, le parallélogramme n'est pas défini comme le quadrilatère obtenu en croisant deux bandes à bords parallèles…

Ce qui a été présenté aurait sans doute besoin d'être affiné, amélioré, transformé…Mon but dans ce travail était de tenter de donner un peu de sens dès la classe de sixième à la géométrie des transformations des programmes de collège.

François DROUIN

Enseignant au collège de Saint Mihiel (Meuse) au moment du travail décrit.
Actuellement enseignant à l'IUFM de Lorraine site de Metz
francois.drouin@ac-nancy-metz.fr