Régionale APMEP de Poitou - Charentes
APMEP

Corol’aire

Décembre 2024 n° 139

Un nouveau ministre, une nouvelle réforme ?

Frédéric de Ligt

Chaque nouveau ministre de l’éducation voulant apporter sa pierre à ce grand édifice en permanente construction, une pierre chassant l’autre, le chantier n’avance pas. Le temps politique et le temps de l’éducation ne peuvent pas être synchrones. Il faudrait laisser au ciment le temps de sécher pour se rendre compte si l’ensemble tient bien debout. Mais non. Une réforme ou un programme, à peine sont-ils mis en place, qu’il faut déjà passer à une autre réforme, un autre programme sans que les précédents aient été, ne serait-ce qu’un peu, évalués. Ces changements incessants lassent les meilleures volontés qui finissent par regarder passer les réformes comme on regarde passer les trains.

Dans une municipalité bien administrée, le maire qui envisage de construire une maison de santé commence par organiser une réunion publique, entouré de professionnels de santé, pour connaître les besoins de la population et informer de ses intentions. Un projet est monté, discuté puis voté en conseil municipal. À la suite de quoi, des fonds sont recherchés, un architecte est nommé, des appels d’offre sont lancés et enfin la construction peut commencer. Le maire, ou son adjoint à l’urbanisme, suit l’avancement des travaux et guette les malfaçons. Il y a parfois des dépassements au budget initial ou le maire n’est pas toujours réélu avant la fin des travaux, mais la maison de santé sort finalement de terre au bénéfice de tous dans un délai raisonnable.

À vous de chercher des points communs avec la gestion du chantier de l’éducation nationale.

Tous les membres du Comité s’associent à moi pour vous souhaiter de bonnes fêtes de fin d’année.

Sommaire

Comité de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Mercredi 11 décembre 2024 à l'IREM&S

Organisation de la Journée de la Régionale

La Journée de la Régionale aura bien lieu le mercredi 15 janvier au lycée de la Venise Verte de 8 h 30 à 17 h. Le programme de la Journée est disponible à l'adresse : https://www.apmep.fr/13e-journee-de-la-Regionale-Poitou-Charentes-2025

Comme les années précédentes, les IPR de mathématiques sont bien sûr invités.
35 collègues en activité y sont inscrits. Pour finaliser l'organisation, un questionnaire va leur être envoyé. Un café augmenté est prévu le matin et l'après-midi.

Concernant l'installation de l'exposition Maths & images, Dominique Gaud envoie les informations nécessaires à Raphaël Nivelle que nous remercions vivement de nous accueillir dans son lycée.

Dans les ateliers-débats, une petite fraction du temps sera consacrée à une discussion sur les propositions et revendications de l'APMEP. Ces ateliers seront aussi l'occasion de demander aux collègues s'ils souhaitent mettre en relation des projets communs.

Rallye

Le courrier comportant les documents du Rallye a été envoyé aux collègues le lundi 9 décembre. Des collègues qui enseignent en classe de sixième nous ont fait part de leur regret de ne pas pouvoir participer à la nouvelle édition du Rallye faute de propositions d'épreuves à ce niveau. Nous leur avons renouvelé les raisons de cette baisse de notre offre. Quelques inscriptions nous sont déjà parvenues.

Expositions

La future exposition sur les solides se prépare. Les contenus ont été discutés puis acceptés avec les responsables de l'espace Mendes-France sous réserve que l'ensemble reste accessible au plus grand nombre.
Du matériel doit être fabriqué. Les difficultés administratives pour le paiement des factures par l'IREM&S contraignent la Régionale à prendre en charge cette dépense. La brochure qui accompagnera l'exposition sera payante.

Corol'aire

La mise en ligne dans Publimath de tous les numéros du Corol'aire, depuis le numéro 0, article par article, se poursuit. La moitié des 138 numéros a déjà été traitée. Il faudra aussi faire attention à l'avenir à vérifier que le droit à l'image est bien respecté dans les différents clichés publiés, c'est un problème qui prend de l'importance.

Liens avec le National

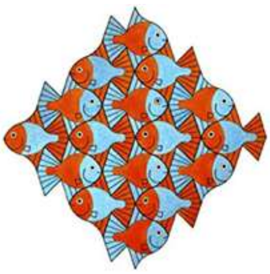
Frédéric de Ligt rappelle que le CFC verse à l'association nationale une importante somme liée aux droits de reprographie des brochures de l'APMEP. C'est pourquoi il est important pour les collègues, quand leur établissement est sélectionné, de bien répertorier tous les documents de l'APMEP qui ont été utilisés dans les classes.

Prochain comité

La prochaine réunion du comité de la Régionale est programmée le mercredi 12 mars en présentiel. Il est adopté par le comité, pour des raisons d'économie sur les frais de déplacement, d'alterner le présentiel et le distanciel pour ses réunions et ce à partir du prochain comité.

RALLYE 2025 : C'est parti !

Corinne Parcelier



La partie thème du Rallye a été finalisée lors d'une réunion en visio le 13 novembre dernier. Comme annoncé précédemment, nous avons souhaité attiser la curiosité des élèves sur quelques exemples de pavages du plan, en particulier les pavages figuratifs « à la Escher ».

Outre quelques petites recherches documentaires, nous proposons donc à chacun des niveaux l'étude, la création et la réalisation d'un tel pavage.

Le Rallye 2025 n'est donc pas proposé aux classes de $6^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ cette année. Au vu des messages reçus de la part de quelques collègues, il nous semble nécessaire d'expliquer notre positionnement. Certains établissements ont mis en place des « groupes » sur ces deux niveaux sans réelle hiérarchisation des élèves et peuvent se demander pourquoi ils ne peuvent pas participer. Il y a cependant d'autres établissements dans l'académie dans lesquels des groupes « de besoin », voire « de niveau » ont été institués. Dans ces conditions, l'épreuve du Rallye telle que nous la concevons ne peut avoir lieu équitablement : certains groupes partiraient avec un avantage évident quand d'autres s'autocensureraient et ne s'inscriraient pas. C'est cela que nous avons voulu éviter et c'est bien à contrecœur que nous avons pris cette décision. Rappelons en effet que les classes de $6^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ ont toujours constitué le plus gros de l'effectif des classes participantes au Rallye Mathématique de Poitou-Charentes.

Côté transmission des documents, nous avons encore une fois bénéficié du soutien de l'Inspection Pédagogique Régionale, tant pour les collèges et lycées que pour les lycées pro. Nous espérons que l'information sera également diffusée vers les collègues du premier degré.
L'envoi par message sur les boîtes professionnelles académiques nous simplifie la tâche mais la rédaction des courriers est toujours un exercice fastidieux : il faut pister les erreurs de dates, d'adresse, de courriel… Et malgré nos efforts, il en reste toujours !

L'ensemble des sujets de l'épreuve d'entraînement a été mis en ligne sur notre site ; vous pouvez en prendre connaissance à cette adresse : https://www.apmep.fr/Rallye-2025

La prochaine réunion est programmée le 18 décembre ; il nous faudra alors décider des problèmes qui seront donnés à l'épreuve finale qui aura lieu le mardi 18 mars 2025.


RMPC
Rallye Mathématique de Poitou-Charentes
Mardi 18 mars 2025
MATHS & PAVAGES
Régionale APMEP de Poitou - Charentes
APMEP
https://www.apmep.fr/La-Régionale-Poitou-Charentes
Université de Poitiers
mgen
casden
MAIF
tangente
académie Poitiers
APMEP, IREM
Bât H3, Site du Futuroscope
11 Bd M. et P. Curie, TSA 61 125
86073 POITIERS Cedex 9
regapmep16177986@gmail.com

À propos des expositions de la Régionale

Depuis plus de 20 ans, la Régionale APMEP de Poitou-Charentes, en collaboration avec l'espace Mendès France de Poitiers, l'IREM&S de Poitiers et l'AGEEM propose au public et aux élèves du primaire à l'université des expositions de Mathématique.

Ces expositions « itinérantes » se composent de panneaux (environ une vingtaine) et de nombreuses manipulations.
Actuellement, quatre expositions sont proposées à la location pour les établissements scolaires ; il s'agit de « Comment tu comptes » (2010), Maths et Puzzles » (2016), « Maths et Mesures » (2020) et la dernière « Maths et Images » (2023). Des fiches d'activités (fiches défis) sont aussi fournies. Pour plus de renseignements, consulter le site de la Régionale : https://www.apmep.fr/Expositions-Regionale-Poitou-Charentes.
Le tarif est de 90 € pour une semaine, puis de 60 € par semaine supplémentaire.
Le transport de l'exposition est à la charge de l'établissement. Les locations sont du lundi au vendredi. Pour le transport, prévoir une grande voiture. Les expositions sont stockées dans la réserve de l'IREM&S au bâtiment de Mathématiques sur le site du Futuroscope (en cas de location un plan vous sera fourni). Elles sont retirées le vendredi après-midi précédent la période de location et rapportées le vendredi après-midi de la dernière semaine de location, sauf exceptions*.
De façon à pouvoir exploiter l'exposition avec des élèves, il est indispensable de prévoir une salle suffisamment grande, des grilles pour les panneaux (environ une vingtaine) et des tables pour les manipulations.
Le principe, pour la location, est le suivant : vous contactez la personne en charge de la circulation des expos (actuellement jeanmarieparnaudeau@gmail.com). Suivant le calendrier des locations et des souhaits des équipes pédagogiques, une période de location est définie, un devis est envoyé à l'établissement, puis une convention de location entre la Régionale et l'établissement est établie. En fin de location, une facture est envoyée.
De par les thèmes abordés (sinusoïdes, spirales, exponentielles, courbe de Gauss…) l'exposition « Courbes » (2013) est plutôt à destination des lycéens. Elle ne comporte que des panneaux (23). En général, elle est prêtée gratuitement aux labos de maths des lycées.

* Dans certains cas, en accord avec la Régionale et les collègues, les expositions circulent d'un établissement à l'autre, sans repasser par l'IREM, de façon à minimiser les frais de transport.

Georges Borion nous a quittés.

Georges est décédé le 5 octobre dernier à l'âge de 91 ans. Certains de nos membres ont participé à la cérémonie funéraire le 11 octobre en l'église Saint-Porchaire de Poitiers avec le dépôt d'une gerbe.

Les anciens de la Régionale l'ont bien connu. Il enseignait au collège France Bloch-Sérazin de Poitiers et, militant de la première heure, il faisait partie du groupe « Jeux » de notre Régionale qui a publié les quatre Ludi-Math et réalisé une première version de l'expo Cube.
Il a ensuite intégré l'équipe du Rallye et a rejoint bénévolement l'équipe audiovisuelle de l'IREM de Poitiers avec les réalisations des séries de diapositives et d'affiches pour la classe.
Au niveau national, il a fait partie du groupe JEUX de l'APMEP et a participé activement à la réalisation des premières brochures JEUX.

Son activité associative débordante restera dans nos mémoires.

La future exposition se prépare…

Un solide bien curieux : l'oloïde[1]

Dominique Gaud

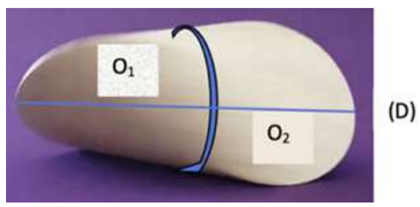
Paul Schatz[2] (1898-1979) est un chercheur, technicien et artiste d'origine allemande, installé en Suisse. Il a inventé en 1933 l'oloïde à la suite de recherches sur l'inversion du cube[3], en lien avec des réflexions philosophiques sur les solides de Platon, recherches qui l'ont amené à créer le cube inversé formé de 3 kaléïdocycles irréguliers fermés.
En 1974, Paul SCHATZ fonde la société OLOID AG. Au départ, son idée était d'utiliser l'oloïde comme une hélice pour les bateaux, mais il est très vite apparu que l'oloïde était plus adapté au brassage, à l'agitation et à l'aération de divers fluides. OLOID AG a donc développé dans ce but un système mécanique permettant de mettre en mouvement l'oloïde[4]…

Quel est cet objet appelé oloïde ?

Aspect visuel

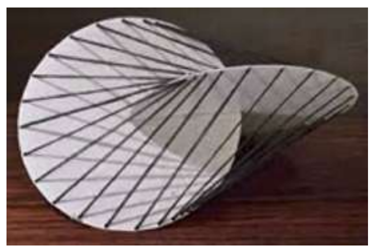
L'oloïde[5] :

- a une seule face, 2 arêtes qui semblent être des arcs de cercles et 4 points « singuliers » extrémités des arcs de cercle qui semblent être dans un même plan (P).
- possède deux plans de symétrie (ceux des deux arcs de cercles).
- La droite (D) qui joint les milieux des deux arcs est axe de symétrie. L'oloïde est composé de deux parties O_1 et O_2 qui semblent se déduire l'une de l'autre par une isométrie de l'espace : symétrie par rapport au plan (P) suivie d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.



Définition

Prenons deux cercles de même rayon dont les plans sont orthogonaux, chacun passant par le centre de l'autre. L'enveloppe convexe à cet objet formé par ces deux cercles définit l'oloïde. L'enveloppe est le plus petit solide convexe qui contient ces deux cercles.



---

[1] L'oloïde a été le thème d'un article du Bulletin Vert 459 de l'APMEP, pages 477-483.
https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AAA05051.pdf

[2] https://www.paul-schatz.ch/

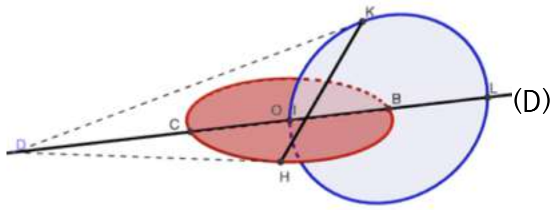
[3] On peut consulter de nombreuses vidéos en tapant *Cube inversé Paul Schartz* dans un moteur de recherche.

[4] https://www.mathcurve.com/surfaces.gb/orthobicycle/tipe%20oloide.pdf

[5] https://www.oloide.nl/

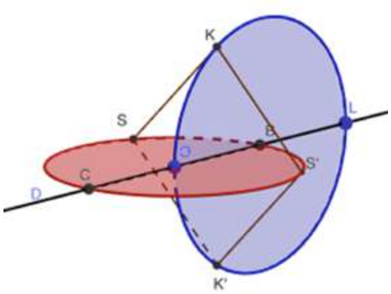
Construction

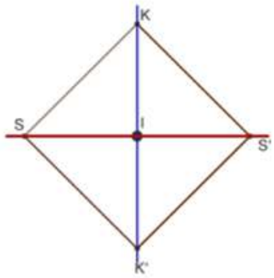
C'est une surface réglée construite ainsi : à chaque point D de (D) (qui est la droite définie par les centres des deux cercles), on mène les tangentes aux deux cercles et on joint les 2 points de contact H et K. Quand D varie sur demi-droite de (D) d'origine C ne contenant pas O, HK engendre un huitième d'oloïde. Ce huitième symétrisé par rapport au plan du cercle de diamètre CB, puis l'ensemble symétrisé par rapport au plan du cercle de diamètre OL donne la moitié de l'oloïde (O_1).

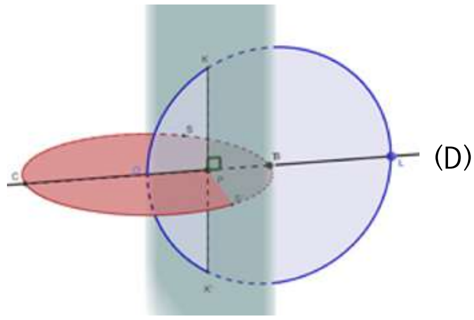


L'autre moitié (O_2) s'obtient en faisant varier le point D sur la demi droite de (D) d'origine L ne contenant pas B.

Les points limites (quand D est en C ou bien en L) S, S' K et K' sont coplanaires. Leur plan est orthogonal à (D) en I milieu de OB. Les quatre points forment un carré dont le centre est le milieu de OB.



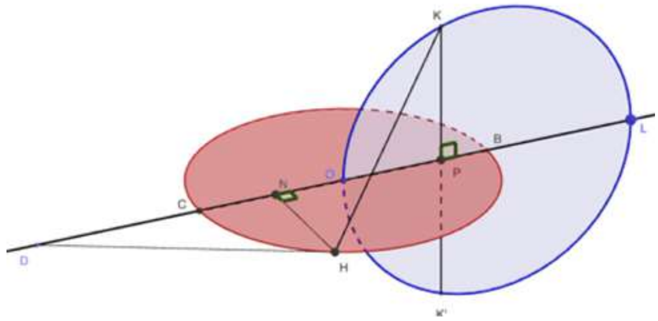




Ainsi nous retrouvons la partie O_2 à partir de la partie O_1 en effectuant une symétrie par rapport au plan du carré, suivie d'une rotation d'axe (D) d'angle $\frac{\pi}{2}$.

La longueur de la génératrice HK est constante et vaut $R\sqrt{3}$ où R est le rayon commun des deux cercles. Il suffit de le démontrer dans le cas ci-dessous compte tenu des isométries et la démonstration vous est proposée en recherche dans la rubrique *Rubri'colag*e.

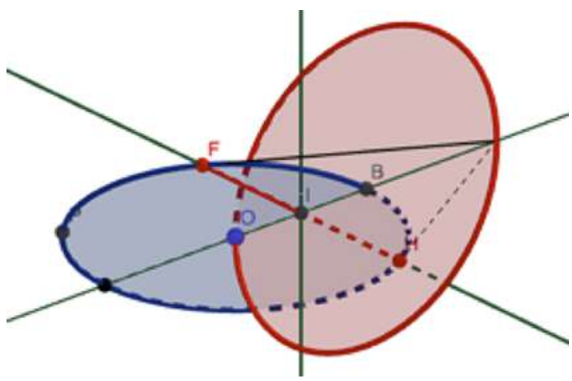
Cette propriété permet de matérialiser l'oloïde avec des génératrices à partir de deux cercles de rayon R emboîtés perpendiculairement : chaque « règle » de longueur $R\sqrt{3}$ placée en un point H du cercle, donne un point K de l'autre cercle.



Autres résultats mathématiques

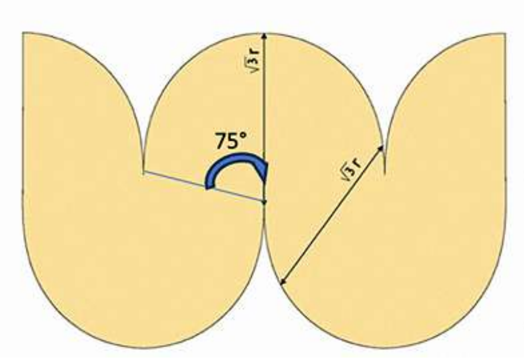
L'oloïde est une surface algébrique[6] de degré 8 (axes en vert).

$$4x^2+4x^3-7x^4-8x^5+2x^6+4x^7+x^8+4y^2+4xy^2-18x^2y^2-16x^3y^2+14x^4y^2+12x^5y^2-11y^4-8xy^4+22x^2y^4+12x^3y^4-6x^4y^4+10y^6+4xy^6-8x^2y^6-3y^8+4xz^2-6x^2z^2-48x^3z^2-46x^4z^2-12x^5z^2-10y^2z^2-52xy^2z^2-46x^2y^2z^2+12x^3y^2z^2+6x^4y^2z^2+24xy^4z^2+12x^2y^4z^2+6y^6z^2+z^4-8xz^4-50x^2z^4-36x^3z^4-6x^4z^4-12y^2z^4+12x^2y^2z^4-9y^4z^4-2z^6-20xz^6-8x^2z^6+6y^2z^6-3z^8=0$$



Ce solide possède un patron que l'on peut obtenir en faisant rouler l'oloïde sans glisser.

[6] https://mathcurve.com/surfaces/orthobicycle/orthobicycle.shtml




L'aire de sa surface est $4\pi R^2$ comme celui de la sphère. Mais la formule du volume est loin d'être simple car R^3 est multiplié par ce coefficient[7] : $2\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt{1+2\cos t}}{(1+\cos t)^2}\,dt$

Propriétés physiques

Cet objet possède des propriétés physiques uniques décrites dans la vidéo[8].
Ce solide roule sur un plan, mais contrairement à :

- la boule qui touche le plan en un seul point et, en roulant, tous ses points ne sont pas en contact avec le plan
- au cylindre dont une génératrice est en contact permanent avec le plan mais dont tous les points n'entrent pas en contact avec le plan (bases),

l'oloïde est en contact avec le plan sur une génératrice et en roulant tous les points de l'oloïde entrent en contact avec le plan.

Ce solide a trouvé des applications industrielles dans le traitement des eaux usées mais aussi comme agitateurs[9] et aérateurs de surface[10].
Vous voulez en savoir plus ! Vous pouvez consulter :
https://alchetron.com/Paul-Schatz
Pour une étude mathématique plus complète on peut consulter :
https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg01_05/jgg0113.pdf
Pour en savoir plus sur les cubes inversibles (qui sont liés à l'loloïde !) :
https://www.kuboid.ch/shop/fr/product/invertible-cube-cardboard-coloured/

---

[7] J'ignore comment on obtient ces formules. Mais nul doute : un lecteur les établira !
[8] https://fr.video.search.yahoo.com/yhs/search?fr=yhs-trp-008&ei=UTF-8&hsimp=yhs-008&hspart=trp&p=oloide&type=Y241_F163_226003_022624#id=2&vid=dba0b2cbb98e434db693d5abac724fa7&action=click

[9] http://www.triarticulation.fr/AtelierTrad/TDK/DF1296.pdf

[10] https://www.oloid.de/

Égalité, priorités, pas facile…
…et pourtant ça marche !!!

Jean-Marie Parnaudeau

Un jour un grand-père propose à l'un de ses petits-fils de le faire réviser en vue du brevet.
Voilà un des exercices proposés (Asie Juin 2023) :

Exercice 3

On considère le programme de calcul suivant :

Nombre de départ
↓
- Calculer le carré de ce nombre
- Multiplier par 5
- Ajouter 4
- Multiplier par 2
- Enlever 8

↓
Résultat

PARTIE A

1. Montrer que si 3 est le nombre de départ, le programme donne un résultat égal à 90.
2. Un élève choisit 2 comme nombre de départ et un autre élève choisit −2.
   Montrer qu'ils doivent obtenir le même résultat.
3. Si on nomme x le nombre de départ, montrer que le résultat du programme peut s'écrire $10x^2$.

Pour la question 1 : pas de souci. On a le bon résultat.

$$1)\ 3^2 = 9 \times 5 = 45 + 4 = 49 \times 2 = 98 - 8 = 90$$

Le signe = étant interprété comme « ça donne » (*Je fais ce qu'ils disent*) et non comme « égalité » au sens usuel en mathématique. Kostia a fait les calculs comme on les ferait à la machine, comme le ferait un algorithme, confondant égalité et affectation.

Pour la question 3, voila la solution proposée.

$$x^2 \times 5 + 4 \times 2 - 8$$
$$x^2 \times 9 \times 2 - 8$$
$$x^2 \times 18 - 8$$
$$x^2 \times 10$$
$$10x^2$$

La première ligne est tout à fait correcte (aux parenthèses près).

N'étant pas d'accord avec les calculs des lignes 2 et 3, je me suis lancé dans une explication sur les priorités des opérations, ce à quoi j'ai eu comme réponse :
C'est quoi cette histoire de priorité, ça marche quand même, j'ai le bon résultat !

Un autre exercice de la même famille (les exercices d'algorithmique de troisième sont très stéréotypés) m'a permis de le ramener dans le droit chemin !

Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

139-1 *proposé par Dominique Souder (La Rochelle)*

Un calculateur prodige ?

Le public a choisi dans une liste de nombres de 10 chiffres la valeur 4,774889059. Magic'Domino a vite dit : « C'est le logarithme décimal de 59 551. ». Vérification fut faite à l'ordinateur.
En partant de 4,497744931 ce magicien trouva de tête la partie entière de son exponentielle en base 10, soit 31 459 ; 20 224 et 57 314 à partir de 4,305867120 et 4,758260757.
Trouverez-vous le truc du magicien mentaliste ?
Donnez le couple : (le log à inscrire dans la liste si le magicien souhaite dire comme réponse 12 358 ; l'entier de 5 chiffres que le magicien doit trouver si on lui annonce son log qui est 4,193903415).

139-2 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Est-ce que, pour tout entier naturel n non nul, l'équation en nombres entiers naturels non nuls

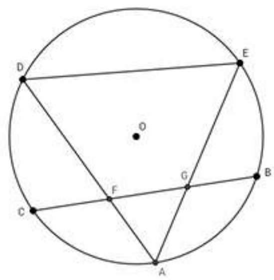
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 = x_{n+1}^2$$

admet toujours une solution ?

139-3 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Il est connu que les sommets d'un triangle équilatéral, placés dans un repère orthonormé du plan, ne peuvent pas avoir tous des coordonnées entières. En revanche, cela peut se faire si on se place dans un repère orthonormé de l'espace (prendre par exemple trois sommets convenablement choisis d'un cube). Mais si on ajoute comme condition que les trois côtés du triangle équilatéral aient des longueurs entières, est-ce encore possible ?

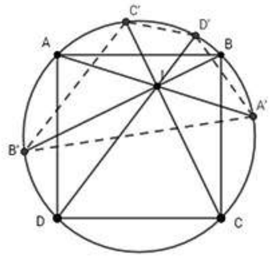
139-4 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*



Étant donné un arc BC sur une circonférence dont le centre est O, du milieu A de cet arc, on mène les deux cordes [AD] et [AE] coupant [BC] en F et G.
Démontrer que l'on a FE.DG = DF.EG + FG.DE.

Des solutions

130-4 *proposé par Jean-Christophe Laugier*



On donne un carré inscrit ABCD et un point I du plan. On joint le point I aux quatre sommets. Les droites obtenues coupent le cercle en quatre nouveaux points A', B', C', D'.
Montrer que dans le quadrilatère A'B'C'D' on a : A'B'×C'D' = A'D'×B'C'.

Solution de Frédéric de Ligt

Si I est un point du cercle on A' = B' = C' = D' = I et donc A'B' = C'D' = A'D' = B'C' = 0 et l'égalité est vraie.
Si maintenant I est un point du plan hors du cercle, la puissance de I par rapport au cercle donne les égalités : IA.IA' = IB.IB' = IC.IC' = ID.ID'

On a donc $\frac{IC}{ID'}=\frac{ID}{IC'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{C'D'}$ donc $\frac{IC}{AB}=\frac{ID'}{C'D'}$, $\frac{IB}{IC'}=\frac{IC}{IB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{B'C'}$ donc $\frac{IC}{AB}=\frac{IB'}{B'C'}$.

On obtient déjà $\frac{ID'}{C'D'}=\frac{IB'}{B'C'}$.

De même :
$\frac{IA}{ID'}=\frac{ID}{IA'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'D'}$ donc $\frac{IA}{AB}=\frac{ID'}{A'D'}$, $\frac{IA}{IB'}=\frac{IB}{IA'}=\frac{AB}{A'B'}$ donc $\frac{IA}{AB}=\frac{IB'}{A'B'}$.

On obtient alors $\frac{ID'}{A'D'}=\frac{IB'}{A'B'}$.

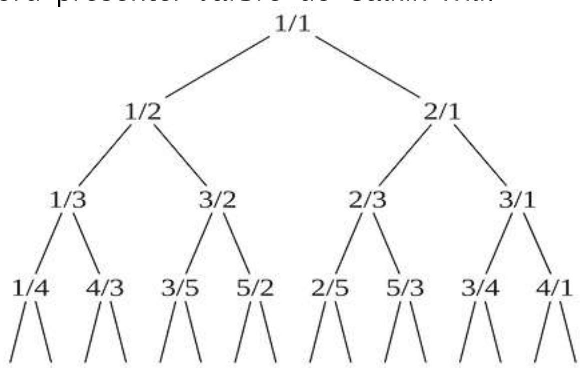
Des égalités $\frac{ID'}{IB'}=\frac{C'D'}{B'C'}=\frac{A'D'}{A'B'}$ on tire enfin *A'B'×C'D' = A'D'×B'C'*.

135-3 *proposé par Frédéric de Ligt*

Soit la fonction f définie sur les réels positifs par $f(x) = (E(x) + 1 - \{x\})^{-1}$.
Montrer que la suite (x_n), avec n entier naturel non nul, définie par $x_n = f^n(0)$, où $f^n(0)$ désigne la n$^{\text{ième}}$ itérée de 0 par f, a ses termes en bijection avec l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs.

Solution de l'auteur

Pour résoudre cette surprenante question, il faut d'abord présenter l'arbre de Calkin-Wilf.

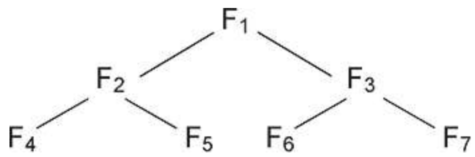


On part de la fraction 1/1. De chaque nœud portant la fraction a/b part deux branches, celle de gauche pointe vers un nœud portant $a/(a + b)$ et celle de droite pointe vers un nœud portant $(a + b)/b$.
Premiers constats : tous les nœuds qui descendent vers la gauche portent les termes de la suite harmonique alors que ceux qui descendent vers la droite portent les entiers naturels successifs (une simple récurrence permet de le prouver).
Toutes les fractions qui apparaissent dans cet arbre sont irréductibles. En effet, si l'on part d'une fraction irréductible les deux fractions $a/(a + b)$ et $(a + b)/b$ sont aussi irréductibles et cela se justifie par le fait que si PGCD(a,b) = 1 alors PGCD($a + b$,b) = 1 et PGCD($a + b$,a) = 1 pour a et $b \geq 1$ et le fait que l'arbre a pour racine la fraction irréductible 1/1.
Réciproquement, toute fraction irréductible apparaît dans cet arbre. Pour le prouver il faut raisonner par l'absurde. On suppose qu'il existe des fractions irréductibles qui n'apparaissent pas dans cet arbre. Soit q le plus petit dénominateur parmi ces fractions (comme $q \geq 1$, ce dénominateur existe), on choisit parmi les fractions de dénominateur q celle où le numérateur

$p \geq 1$ est le plus petit possible. La fraction p/q ainsi construite est unique, elle ne vaut pas $1/1$ qui est déjà dans l'arbre, et donc $p/q > 1$ ou $p/q < 1$.
Si $p/q < 1$, on considère la fraction $p/(q - p)$, $q - p \geq 1$, mais $q - p < q$. Donc puisque $p/(q - p)$ est irréductible, $p/(q - p)$ est dans l'arbre d'après la condition sur q. Si on pose $A/B = (a + b)/b$ alors $a/b = (A - B)/B$ et si on pose $A/B = a/(a + b)$ alors $a/b = A/(B - A)$. Mais alors p/q est aussi dans l'arbre. Contradiction.
Si $p/q > 1$, on considère la fraction $(p - q)/q$, mais $p - q > 1$ et $p - q < p$.
Donc puisque $(p - q)/q$ est irréductible, $(p - q)/q$ est dans l'arbre, d'après la condition sur p, mais alors p/q aussi. Contradiction.

Il reste à montrer que toutes les fractions irréductibles n'apparaissent qu'une seule fois dans cet arbre en raisonnant par l'absurde.
Dans l'arbre il y a deux sortes de fractions, celles qui sont inférieures à 1 et celles qui sont supérieures à 1.
Parmi les fractions de l'arbre qui sont inférieurs à 1 on isole celles qui apparaissent plusieurs fois et parmi celles-ci on extrait celles qui on le plus petit dénominateur. On note q ce dénominateur.
On considère l'une des fractions p/q de l'arbre (irréductibles donc) qui est inférieure à 1 ; cette fraction est issue de la fraction irréductible $p/(q - p)$ qui a un dénominateur plus petit que q. Mais $p/(q - p)$ apparaît alors plusieurs fois. Contradiction. Pour les fractions de l'arbre qui sont supérieurs à 1, on raisonne de même. La seule possibilité serait $1/1$, mais cette fraction n'apparaît qu'une seule fois.

On va maintenant numéroter les nœuds de l'arbre :



Quelle est la relation de récurrence de la suite $(F_n)_{n\geq 1}$?

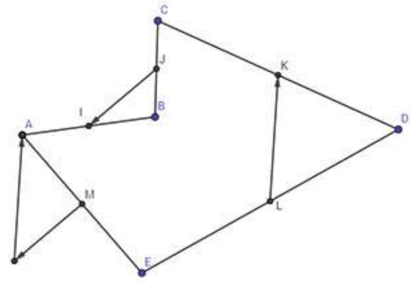
En fait $F_{n+1} = f(F_n)$; $F_1 = 1$ où on a pour tout réel positif $f(x) = (E(x) + 1 - \{x\})^{-1}$.
Si n est pair, F_n est de la forme $a/(a + b)$ car issu par la gauche du nœud a/b, $f(a/(a + b)) = (a + b)/b = F_{n+1}$ qui est le nœud issu de a/b par la branche droite. $F_{2n+1} = f(F_{2n})$.
Si n est impair, il faut d'abord retrouver la racine commune. Mettons qu'il faille remonter k nœuds pour retrouver la racine commune a/b entre F_{2n+1} et $F_{2n+2.}$
À partir de a/b, pour atteindre $F_{2n+1,}$, il faut prendre une fois à gauche et $k - 1$ fois à droite.
a/b donne par la gauche $a/(a + b)$ puis donne après $k - 1$ fois par la droite $F_{2n+1} = a/(a + b) + k - 1$.
$E(F_{2n+1}) = k - 1$ et $F_n - E(F_{2n+1}) = a/(a + b)$.
À partir de a/b, pour atteindre $F_{2n+2,}$, il faut prendre une fois à droite et $k - 1$ fois à gauche.
a/b donne par la droite $(a + b)/b$ puis donne après $k - 1$ fois par la gauche $F_{2n+2} = (b/(a + b) + k - 1)^{-1}$.
$F_{2n+2} = (1 - \{F_{2n+1}\} + E(F_{2n+1}))^{-1}$.

Enfin $f\left(F_{2^n-1}\right) = f(n) = F_{2^n} = 1/(n+1)$.
La suite $(F_n)_{n\geq 1}$ est en bijection avec l'ensemble des rationnels strictement positifs.
Enfin $f(0) = 1$ et si on pose $F_0 = 0$ on a bien $f(F_0) = F_1 = 1$.

137-4 *proposé par Jacques Chayé*

Soient I, J, K, L, et M cinq points du plan. Construire un pentagone (éventuellement dégénéré) ABCDE tel que I, J, K, L et M soient les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA].

Solution de l'auteur



Dans un tel pentagone, on passe de A à B par la symétrie de centre I, de B à C par la symétrie de centre J, de C à D par la symétrie de centre K, de D à E par la symétrie de centre L et de E à A par la symétrie de centre M. On passe alors de A à C, de C à E et de A à E par les translations $2\overrightarrow{IJ}$, $2\overrightarrow{KL}$, $2(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{KL})$.

Désignons par *t* cette dernière translation et par *s* la symétrie de centre M. Le point A sera donc le point invariant de *t* o *s* qui est une symétrie centrale, dont le centre est l'image de M par la translation de vecteur $(-1/2) \times 2(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{KL}) = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{LK}$. La construction de A s'en déduit, et, de proche en proche, celle de B, de C, de D et de E.

138-4 *proposé par Fabien Lombard :*

Montrer l'identité :
$(\sin^2(A) - \sin^2(B))/\tan(A + B) + (\sin^2(B) - \sin^2(C))/\tan(B + C) + (\sin^2(C) - \sin^2(A))/\tan(C + A) = 0$,
dès lors que les tangentes des angles considérés ne sont pas nulles.

Solution de Frédéric de Ligt

Pour alléger les écritures, on va noter $S(x)$ pour $\sin(x)$ et $T(x)$ pour $\tan(x)$. Le membre de gauche de l'égalité à établir prend donc la forme : $\dfrac{S^2(a)-S^2(b)}{T(a+b)}+\dfrac{S^2(b)-S^2(c)}{T(b+c)}+\dfrac{S^2(c)-S^2(a)}{T(c+a)}$.

On va utiliser les relations $S^2(x)=\dfrac{T^2(x)}{1+T^2(x)}$ et $T(x+y)=\dfrac{T(x)+T(y)}{1-T(x)T(y)}$.

On a $\dfrac{S^2(a)-S^2(b)}{T(a+b)}=\dfrac{\dfrac{T^2(a)}{1+T^2(a)}-\dfrac{T^2(b)}{1+T^2(b)}}{\dfrac{T(a)+T(b)}{1-T(a)T(b)}}=\dfrac{\big(T(a)-T(b)\big)\big(1-T(a)T(b)\big)}{\big(1+T^2(a)\big)\big(1+T^2(b)\big)}$.

De même $\dfrac{S^2(b)-S^2(c)}{T(b+c)}=\dfrac{\big(T(b)-T(c)\big)\big(1-T(b)T(c)\big)}{\big(1+T^2(b)\big)\big(1+T^2(c)\big)}$ et $\dfrac{S^2(c)-S^2(a)}{T(c+a)}=\dfrac{\big(T(c)-T(a)\big)\big(1-T(c)T(a)\big)}{\big(1+T^2(c)\big)\big(1+T^2(a)\big)}$.

L'addition de ces nouveaux termes, après mise au même dénominateur, donne pour numérateur :
$(T(a) - T(b))(1 - T(a)T(b))(1 + T^2(c)) + (T(b) - T(c))(1 - T(b)T(c))(1 + T^2(a)) + (T(c) - T(a))(1 - T(c)T(a))(1 + T^2(b))$.
Le développement de cette dernière somme, que je vous épargne, fait apparaître systématiquement des termes avec leurs opposés. La somme est donc nulle.

Régionale APMEP de Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : https://www.apmep.fr/La-Regionale-Poitou-Charentes
Mél. regapmep16177986@gmail.com
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de Ligt	*Éditeur*	APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction	Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon	*Siège social*	Voir adresse ci-dessus
Imprimerie	IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)	*Dépôt légal*	Décembre 2024

JOURNÉE DE LA RÉGIONALE APMEP POITOU-CHARENTES

15 JANVIER 2025

LYCÉE DE LA VENISE VERTE - NIORT

Conférence de **MICKAËL RIBARDIÈRE**
maître de conférence, laboratoire XLIM - CNRS
Université de Poitiers

IMAGER LES MONDES VIRTUELS :
LA QUÊTE DU PHOTORÉALISME

ATELIERS

1. Les mathématiques à travers les grandeurs : un enseignement qui a du sens !
2. Qu'est-ce qu'un polyèdre ?
3. Visite commentée de l'exposition « maths et images » (itinérante et réservable)
4. Faire communiquer des ordinateurs entre eux au collège : quelles possibilités ?
5. Fabjeux ou la fabrique à Jeux
6. Math city map : maths hors les murs

DÉBATS

- IA, avantages inconvénients en cours de mathématiques (lycée)
- Groupes de niveaux 6^e - 5^e

8 h 30 :	Assemblée générale de l'association (facultative) Accueil
9 h 30 :	Ouverture
9 h 45 :	Conférence
11 h 30 :	Débats
12 h 30 :	Repas
13 h 45 :	Ateliers
15 h 15 :	Pause
15 h 30 :	Ateliers
17 h :	Fin

Plus d'informations sur le site de la Régionale
www://apmep.fr/Les-Journées-de-la-Régionale-Poitou-Charentes