Durée : 4 heures

CAPLP interne 2008

EXERCICE 1

Préciser, en argumentant la réponse, si chacune des propositions ci-dessous est vraie ou si elle est fausse.

Remarque : la réponse « proposition vraie »ou « proposition fausse »non justifiée ne rapporte aucun point.

Proposition 1

Soit a un nombre réel strictement positif.

Soit f une fonction impaire et continue sur l'intervalle $[-a\ ;\ a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Proposition 2 Soit la fonction f définie, pour tout nombre réel x différent de 1, par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

La courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1\ ;\ 1)$.

Proposition 3

Si une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors cette suite est croissante.

Proposition 4

Si l'écriture décimale d'un entier naturel n se termine par 5, alors celle de n^2 se termine par 25.

Proposition 5

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace affine E. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe trois réels $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tels que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ et tels que M soit le barycentre du système de points pondérés $\{(\mathrm{A},\ \alpha),\ (\mathrm{B},\ \beta), (\mathrm{C},\ \gamma)\}$.

EXERCICE 2

Probabilités

Partie 1

Une urne contient n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule de l'urne, puis on l'y replace. On répète .cette opération jusqu'à obtenir la boule numéro 1, les tirages successifs étant indépendants. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués pour obtenir la boule numéro 1.

On rappelle la formule suivante : $\forall x \in [0\ ;\ 1[,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(x-1)^2}$.

1. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 1)$, c'est-à-dire la probabilité que la boule numéro 1 apparaisse dès le premier tirage.
2. Soit k un entier naturel non nul, calculer la probabilité de l'évènement $(X = k)$.
3. Pour quelle valeur de k cette probabilité est-elle maximale ?
4. Calculer l'espérance de X.

Partie 2

En utilisant la partie 1 répondre aux questions suivantes :

1. Combien de fois faut-il, en moyenne, consécutivement et de façon indépendante, lancer une pièce de monnaie non truquée pour obtenir « Pile » ?

2. Combien de fois faut-il, en moyenne, consécutivement et de façon indépendante, lancer un dé équilibré à six faces pour obtenir un « 6 » ?

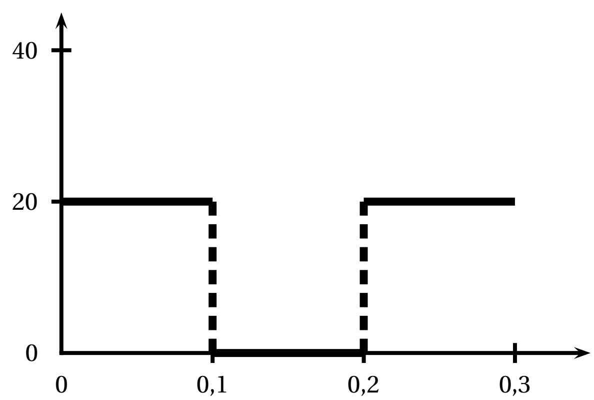
EXERCICE 3

Cet exercice à caractère pédagogique comporte d'abord l'énoncé d'un exercice qu'un enseignant propose à des élèves de terminale baccalauréat professionnel industriel puis les questions destinées aux candidats du CAPLP interne et du CAER.

Énoncé du problème proposé aux élèves de terminale baccalauréat professionnel industriel

I Calculs de tension

Une bobine d'inductance L (en henrys) et de résistance R (en ohms) est soumise à une tension carrée. Une représentation graphique de cette tension E (en volts) en fonction du temps t (en secondes) est donnée ci-dessous :



1. Donner la valeur de la tension E pour $0 < t < 0,1$.
2. Donner la valeur de la tension E pour $0,1 < t < 0,2$.

II Étude de fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,0,1]$ par

$$f(t) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-50t}\right).$$

1. Montrer que $f'(t) = 100\mathrm{e}^{-50t}$ où f' est la dérivée de la fonction f.
2. Étudier le signe de $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,0,1]$.
3. Compléter, en annexe 1, le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
4. Compléter, en annexe 1, le tableau de valeurs de la fonction f. Arrondir les résultats au centième.
5. Tracer, en annexe 1, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f.

III Exploitation

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ représente l'intensité i, en ampères, dans la bobine, en fonction du temps t.

1. Placer, en annexe 1, le point A d'ordonnée $i_0 = 1,26$ A.
2. Déterminer graphiquement l'abscisse τ de ce point A. Laisser apparents les traits de construction. :

3. L'abscisse τ du point A, appelée constante de temps, est donnée par la relation $\tau = \dfrac{L}{R}$.
En déduire la valeur de la résistance R de la bobine sachant que l'inductance L est égale à 0,2 H.

4. La valeur moyenne de l'intensité du courant dans la bobine entre les instants 0 et 0,1 est donnée par la relation : $I_{\text{moy}} = \dfrac{1}{0,1}\displaystyle\int_0^{0,1} 2\left(1-\mathrm{e}^{-50t}\right)\,\mathrm{d}t$.

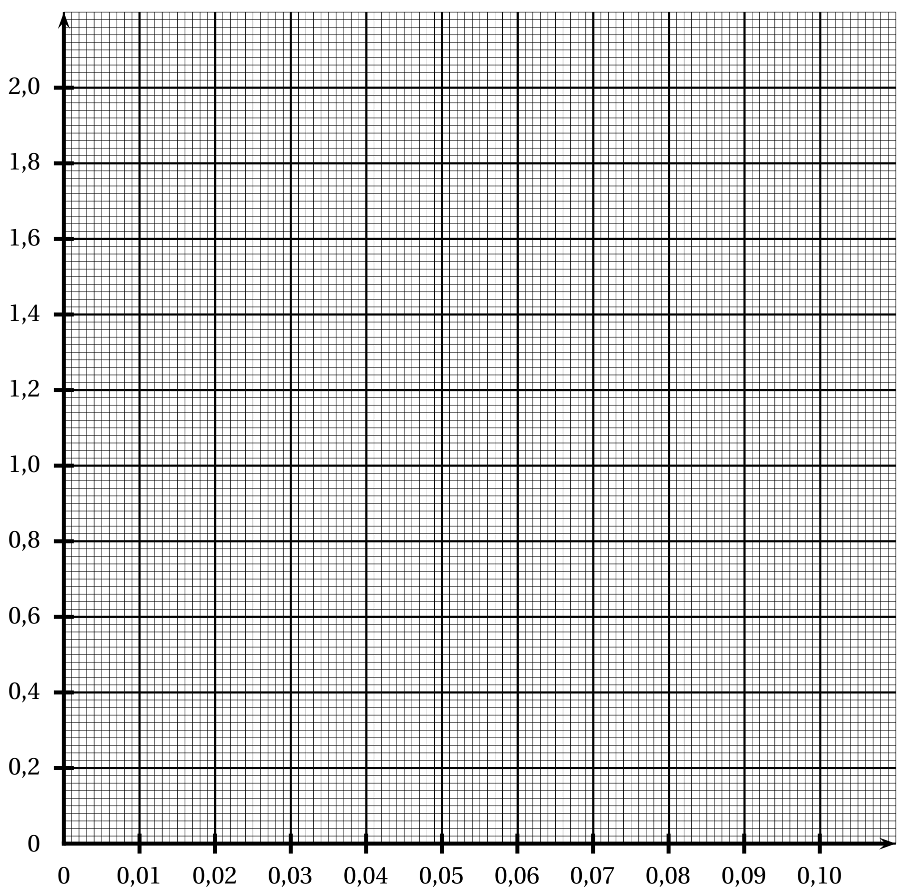
a. En utilisant le formulaire, montrer que $I_{\text{moy}} = 20\left(\displaystyle\int_0^{0,1} 1\,\mathrm{d}t - \int_0^{0,1}\left(\mathrm{e}^{-50t}\right)\,\mathrm{d}t\right)$.

b. Calculer I_{moy} ; faire apparaître les calculs intermédiaires et arrondir les résultats au dixième.

ANNEXE

t	
signe de $f'(t)$	
variation de la fonction f	

t	0	0,005	0,010	0,030	0,040	0,060	0,080	0,100
$f(t)$	0		0,79		1,73			1,99



Questions destinées aux candidats du CAPLP interne et du CAER

1. **a.** Rédiger un corrigé de toutes les questions de la partie II et des questions 1 et 2 de la partie III du problème proposé aux élèves, en précisant les savoir-faire évalués dans chacune de ces questions.

Présenter sur la copie les réponses dans un tableau de type suivant, en recopiant, si besoin est, les tableaux et graphique de l'annexe I du problème proposé aux élèves.

Corrigé	Savoir-faire évalués

b. Indiquer les questions du problème qui, a priori, pourraient poser des difficultés aux élèves. Préciser ces difficultés.

2. Ce problème est traité au cours d'une séquence d'enseignement concernant le calcul intégral.
Presenter une activité d'introduction de cette notion en indiquant les objectifs, les supports pédagogiques utilisés (en particulier l'utilisation éventuelle d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur) et situer la place du problème dans celle-ci.

EXERCICE 4

Notations et rappels

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}*$ l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de zéro.
On appellera (P) le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
La fonction $x \longmapsto \text{e}^x$, définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction exponentielle de base e.
Pour tout entier naturel n, le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction exponentielle de bas e est :

$$\text{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\tau(x) \text{ où } \lim_{x\to+\infty} \tau(x) = 0.$$

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\text{e}^{-x}-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de cette fonction dans le plan (P).

La partie III est indépendante des parties I et II

Partie I

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. a. Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et calculer le nombre dérivé $f'(0)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

b. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}*$ et calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x non nul.

4. a. On définit la fonction g qui à tout nombre réel x associe

$$g(x) = -(1 + x)\text{e}^{-x} + 1$$

Étudier les variations de la fonction g et en déduire son signe.

b. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le plan muni du repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (on peut se limiter aux points dont l'abscisse varié entre -3 et 3).

Partie II

Soit l'application s du plan (P) dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = -2z + 3\text{i}$$

1. Déterminer. l'ensemble des points invariants par l'application s. Déterminer la nature géométrique et les caractéristiques de l'application s.

2. Onpose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$ où $x,\ y,\ x'$ et y' sont des nombres réels. Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

3. On appelle $\mathscr{C}'$ l'image de la courbe $\mathscr{C}$ par l'application s.
À partir de la courbe $\mathscr{C}$, placer quatre points de la courbe $\mathscr{C}'$ puis tracer approximativement l'allure de la courbe $\mathscr{C}'$'.

4. Existe-t-il une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la courbe $\mathscr{C}'$ soit la courbe représentative de la fonction h dans le plan (P) muni du repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$?
Si oui, préciser $h(x)$ pour tout nombre réel x.

Partie III

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$; soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$.
En étudiant le signe de $\displaystyle\int_a^b \left[f_1(t) + \lambda f_2(t)\right]^2\,\text{d}t$ où λ est un nombre réel, démontrer l'inégalité de Schwarz :

$$\left[\int_a^b f_1(t)f_2(t)\,\text{d}t\right]^2 \leqslant \int_a^b \left[f_1(t)\right]^2\,\text{d}t \int_a^b \left[f_2(t)\right]^2\,\text{d}t$$

2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\left[\int_1^5 f(x)\,\text{d}t(\right]^2 \leqslant \frac{2}{5}\left(\text{e}^{-2} + 4\text{e}^{-5} - \text{e}^{10} - 4\text{e}^{-1} + 8\right).$$

3. En déduire que l'aire, exprimée en centimètres carrés, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 5$ est inférieure à $6,55$.