Durée : 4 heures

∽ CAPLP interne 2006 ∽

EXERCICE 1

Voici une situation pouvant être utilisée en classe de baccalauréat professionnel industriel, pour une évaluation.

Le tableau ci-dessous présente, en $\mu g/m^3$, les moyennes annuelles en dioxyde de soufre présent dans l'air, relevées dans une ville durant six années consécutives.

rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
moyenne annuelle y_i	6,6	7,3	5	4,4	2,2	2,7

En annexe se trouvent les programmes de statistique des classes de baccalauréat professionnel industriel.

Partie I

En utilisant la situation décrite ci-dessus, proposer l'énoncé d'un exercice pouvant figurer dans un sujet de baccalauréat professionnel industriel dans lequel les candidats doivent :

- tracer une droite d'ajustement d'un nuage de points ;
- utiliser cette droite pour effectuer une prévision.

Partie II

Proposer une séquence de formation, en classe de baccalauréat professionnel industriel, concernant les statistiques à deux variables et portant sur la partie « exemples d'étude d'ajustement affine » figurant en annexe dans le champ des activités.

- Indiquer les prérequis nécessaires et l'endroit de la séquence où ces prérequis interviennent.
- Faire apparaître l'organisation prévue en indiquant ce que fait le professeur, ce que font les élèves et leurs modes de travail. Justifier la pertinence des modes de travail envisagés.
- Indiquer les outils utilisés par les élèves et la plus value pédagogique apportée par l'utilisation de ces outils.

Partie III

1. La méthode dite « des moindres carrés » permet de calculer le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b d'une droite d'ajustement (D) d'un nuage de points.
   Pour la situation décrite en début d'exercice, on note M_i le point de coordonnées $\left(x_i,\ y_i\right)$ et P_i le point de (D) d'abscisse x_i. Les nombres a et b cherchés sont les réels qui rendent minimale la somme $S(a,\ b)$ des carrés des distances M_iP_i.
   a. Donner l'expression de $S(a,\ b)$ en fonction de $a,\ b,\ x_i$ et y_i.
   En tout point de $\mathbb{R}^2$, $S(a,\ b)$ admet une dérivée partielle d'ordre un par rapport à a et une dérivée partielle d'ordre un par rapport à b.
   On admet que le minimum de $S(a,\ b)$ est obtenu lorsque les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial S}{\partial a}(a,\ b)$ et $\dfrac{\partial S}{\partial b}(a,\ b)$ sont nulles.

b. Montrer que $\sum_{i=1}^{6} y_i = 6b + a\sum_{i=1}^{6} x_i$.

c. Démontrer que le point moyen $G\left(\overline{x},\ \overline{y}\right)$ du nuage de points appartient à la droite d'ajustement.

d. Montrer que $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = b\sum_{i=1}^{6} x_i + a\sum_{i=1}^{6} x_i^2$.

e. En déduire les nombres a et b pour lesquels $S(a,\ b)$ est minimale.

2. Comparer avec l'équation de la droite d'ajustement obtenue en utilisant une calculatrice en mode statistique. Conclure.

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est l'étude de séries numériques.

Partie I : Étude de la convergence d'une série numérique

On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}(n \in \mathbb{N}*)$.

1. **a.** Pour un nombre entier m supérieur à 1, comparer $\sum_{k=1}^{m-1} \dfrac{1}{k}$ et $\int_1^m \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

b. Trouver un nombre entier m tel que $\sum_{k=1}^{m-1} \dfrac{1}{k} \geqslant 1\,000$.

2. La série numérique étudiée converge-t-elle ?

Partie II : Étude de la convergence et calcul de la somme de deux séries numériques

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ pour n nombre entier strictement supérieur à 1.

a. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre entier n strictement supérieur à 1, on ait :

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}.$$

b. Calculer alors la valeur de $\sum_{k=2}^{m} \dfrac{1}{k(k-1)}$.

c. En déduire que la série étudiée est convergente et calculer sa somme.

2. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\left(n^2-1\right)}$ pour n nombre entier strictement supérieur à 1.

En reprenant la même démarche que celle utilisée à la question précédente, montrer la convergence de cette série et calculer sa somme.

EXERCICE 3

On se place dans un plan affine euclidien orienté.

ABC est un triangle équilatéral direct $\left[\left(\overrightarrow{\text{AB}}\,,\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}\right]$ de centre de gravité G.

Le point I est le milieu du segment [AB], le point A′ est le symétrique du point C par rapport au point I, et s est la similitude directe de centre C, d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ et de rapport 3 .

1. Déterminer l'image du point A et celle du point G par s, puis construire, en justifiant la construction, le point B′ image du point B par s .
2. On note J le milieu du segment [A′B′]. Prouver que les points C, B et J sont alignés.
3. Prouver que le point B est le milieu du segment [AB′].
4. On souhaite redémontrer les résultats précédents en utilisant les nombres complexes.
   On se place pour cela chez le repère orthonormé direct $\left(\text{I},\ \overrightarrow{\text{IB}},\ \overrightarrow{v}\right)$.
   a. Les points A, B, C et A′ ont respectivement pour affixe z_{A}, z_{B}, z_{C} et $z_{\text{A}'}$.
   Donner z_{A} et z_{B} puis déterminer z_{C} et $z_{\text{A}'}$.
   b. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe s et en déduire l'affixe du point B′, puis celle du point J.
   c. En déduire que le point B est le milieu du segment [AB′] et que les points C, B et J sont alignés.

EXERCICE 4

Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du XIII^e^ siècle, rapporte dans son ouvrage Flos, publié en 1225, un problème que lui a soumis Jean de Palerme. Il s'agit de résoudre l'équation du troisième degré : $x^3+2x^2+10x=20$.
L'exercice ci-dessous explore diverses méthodes de résolution de cette équation.
Soit f la fonction de la variable réelle x, définie par

$$f(x)=x^3+2x^2+10x-20.$$

On note f' et f'' respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction f, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.
On note (E) l'équation $x^3+2x^2+10x-20=0$.

Partie I : Détermination d'un encadrement de la solution réelle positive de (E)

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f.
   b. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle positive unique que l'on notera a.
   c. Encadrer le nombre réel a par deux nombres entiers consécutifs. On peut donc affirmer que a n'est pas un nombre entier.
2. Expliciter une méthode permettant d'obtenir un encadrement du nombre réel a, d'amplitude 10^{-2}.

Partie II. Détermination d'une valeur approchée de *a*, solution réelle positive de (E), par la méthode dite de Newton

Soit $x_0=2$ et A_0 le point de coordonnées $\left(x_0\ ;\ f(x_0)\right)$. On note (T_0) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A_0. On désigne par x_1 l'abscisse de M_1, point d'intersection de

(T_0) avec l'axe des abscisses.
On réitère la même opération en considérant x_1 au lieu de x_0 : on définit ainsi un réel x_2, puis de proche en proche une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Pour tout nombre entier $n > 0$, déterminer x_n en fonction de x_{n-1}.

2. Donner, sans justification, une valeur approchée à 10^{-3} près de x_i, pour $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ (on pourra s'aider d'une calculatrice).

3. Soit h, la fonction définie, pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;2]$, par

$$h(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur le même intervalle.

a. Calculer $h'(x)$.

b. Montrer que, sur l'intervalle $[1\,;2]$, les fonctions $f,\ f',\ f''$ sont strictement croissantes.
En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\,;2]$: $|h'(x)| \leqslant \left(\frac{16}{17}\right)^2$.

c. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\,;2]$:

$$0 \leqslant |h(x) - h(a)| \leqslant \left(\frac{16}{17}\right)^2 |x-a|.$$

4. Montrer que la suite (x_n) converge vers a.

5. Trouver un nombre entier n_0 tel que pour tout nombre entier $n \geqslant n_0$ on ait $|x_n - a| \leqslant 10^{-3}$.

Partie III. Détermination de la valeur exacte de a, solution réelle positive de (E), par la méthode de Cardan

a. On pose $x = X + h$. Déterminer les nombres rationnels $h,\ p,\ q$ tels que l'équation (E) s'écrive sous la forme $X^3 + pX + q = 0$.
On note (E$'$) cette nouvelle équation.

b. i. On note A l'unique solution réelle de l'équation (E$'$). Montrer l'existence de deux nombres réels u et v tels que $A = u + v$ et $3uv = ?p$.

ii. On note $U = u^3$ et $V = v^3$. Montrer que, dans ces conditions, U et V sont les solutions de l'équation $Y^2 + qY - \frac{p^3}{27} = 0$.

c. Établir la formule de Cardan :

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

d. En déduire a.