CAPLP Concours externe et CAFEP

Section : Mathématiques – Physique–Chimie Session 8 avril 2020

Épreuve écrite sur dossier de mathématiques

Durée : 4 heures

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Le premier exercice est un vrai-faux avec justification.
Le deuxième exercice est un exercice de nature pédagogique.
Le troisième exercice est constitué de cinq parties.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible.
2. On a la relation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.
3. Soit f la fonction définie sur $[-1~;~1]$ par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{array}\right.$$

   La fonction f est continue sur $[-1~;~1]$ et dérivable sur $]-1~;~1[$.
4. On considère un cône C dont le diamètre de la base et la hauteur mesurent 1 unité, et une boule B de diamètre 1 unité.

   Les volumes de C et de B sont dans le ratio 1 : 2.
5. On a la relation $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.
6. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n n = \cos(n)$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   La suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.
7. La documentation technique d'une machine fabriquant des pièces dans une usine indique que, quand la machine est bien réglée, les pièces présenteront un défaut dans $0,8\,\%$ des cas.

   On s'intéresse à un échantillon de 800 pièces prélevées au hasard sur le stock. On suppose que le stock est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler cela à un tirage au sort avec remise.

   Un intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence des pièces sans défaut dans l'échantillon au seuil de 95 % est $[0,985\,;\,0,999]$.

8. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\ \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$.
La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

9. L'équation différentielle $y''-3y'+2y = x^2-3x$ a pour ensemble de solutions réelles

$$\left\{x \longmapsto k_1 \exp x + k_2 \exp(2x),\ (k_1,\ k_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

10. Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé Oxy, soit Δ la droite d'équation $x+y+1=0$ et soit Γ le cercle d'équation $x^2+y^2-2x-1=0$.
La droite Δ est tangente au cercle Γ.

11. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.
On sait que $P(X<20)=0,5$.
Le paramètre λ vaut $\dfrac{1}{20}$.

12. On considère la fonction g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe z associe le nombre complexe $g(z)=z^2+2z+9$.
Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $g(z)$ soit un nombre réel est une droite.

Exercice 2

Cet exercice de type pédagogique a pour objectif l'analyse de l'activité « Extremum par balayage » proposée dans le document ressources « Algorithmique et programmation » destiné à la classe de seconde professionnelle.
Cette activité fait référence à « Rechercher un extremum par balayage sur un intervalle donné », qui est un des exemples d'algorithmes et d'activités numériques du module « Fonctions » du programme de la classe de seconde professionnelle.

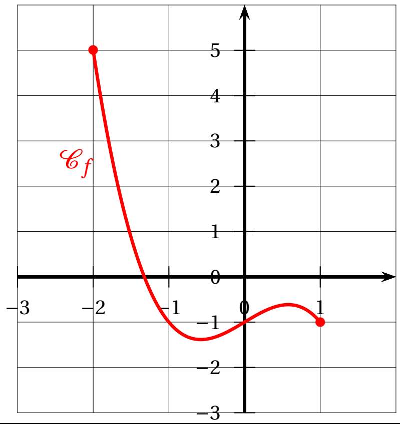
L'analyse demandée nécessite les annexes suivantes fournies en fin de sujet.

- annexe 1 : extrait du programme de la classe de seconde professionnelle, module « Fonctions » ;
- annexe 2 : extrait du programme de la classe de seconde professionnelle, module « Algorithmique et programmation » ;
- annexe 3 : éléments pour l'enseignant, extrait du document ressource « Algorithmique et programmation » pour la classe de seconde professionnelle.

Le texte de l'activité est reproduit dans l'encadré ci-dessous.

Activité : Extremum par balayage

La méthode du balayage pour approcher un extremum d'une fonction est présentée ici sans contextualisation spécifique. Cette méthode s'applique à tout type de fonctions, de la seconde professionnelle à la classe terminale.
Considérons la fonction f définie sur $[-2\,;\,1]$ par $f(x) = -x^3 + x - 1$.
On cherche à déterminer par balayage un encadrement de son minimum à un pas donné.
Remarque : Comme la fonction f est continue sur un intervalle fermé borné, on est assuré de l'existence d'un minimum, mais aussi d'un maximum, sur cet intervalle. Mais là encore, tel n'est pas le propos.



Partie A : étude du module « Fonctions » du programme de la classe de seconde professionnelle

1. Indiquer quelles connaissances de ce module « Fonctions » sont nécessaires à la réalisation de cette activité.
2. Dans cette activité, on considère la fonction f définie, sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$, par
   a. Lister les capacités du module « Fonctions » qui peuvent être travaillées en utilisant la fonction f.
   b. Pour chacune d'elles, rédiger une question, à destination d'une classe d'élèves de seconde, qui permettrait la mise en œuvre de cette capacité.

Partie B : étude de l'activité

Dans cette activité, la fonction f est définie sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$.

1. Donner la définition du minimum d'une fonction définie sur un intervalle I.
2. Déterminer graphiquement le minimum de f sur cet intervalle.
3. La fonction f admet-elle un maximum sur cet intervalle ? Si oui, lequel ?

Partie C : analyse du programme en langage Python

Le document ressource propose une méthode de résolution, qui utilise un programme de recherche d'extremum par balayage écrit en langage Python. La méthode proposée est explicitée dans l'encadré ci-dessous.

> **Méthode proposée**
> On choisit un pas h, réel strictement positif.
> La méthode peut être décrite de la façon suivante : on part de la borne gauche de l'intervalle, c'est-à-dire -2, puis on compare $f(-2)$ à $f(-2+h)$ et on conserve la plus petite des deux valeurs.
> On compare cette valeur à $f(-2+2h)$, et on conserve à chaque fois la plus petite valeur parmi celles calculées, etc.

1. Écrire un algorithme en pseudo-code, correspondant à la méthode proposée dans l'encadré ci-dessus.

Afin de mettre en œuvre la méthode, le document ressource propose le programme Python de l'encadré ci-dessous.

```
def f(x):
  return -x**3+x-1

  def minimum(f, a, b, pas):
    k=0
    mini=f(a)
    c = a
    while a+k*pas<=b :
      if f(a+k*pas)<mini:
          c=a+k*pas
          mini=f(c)
      k=k+1
    return c, mini
```

Exécution du programme

```
In [2]: minimum(f,-2,1,8,8881)
Out[2]: (-8,5773999999999999, -1,384988175176)
```

Le programme permet de penser que le minimum de f est voisin de $-1,38$.

2. La fonction informatique `minimum` de l'encadré ci-dessus utilise les variables informatiques `a`, `b`, `pas`, `k`, `mini` et `c`.

Expliquer le rôle de chacune d'elles dans l'exécution du programme.

3. Recopier et expliquer chacune des lignes de la boucle « while » utilisée par la fonction informatique `minimum`.

4. Concernant l'instruction `while`, le document ressource précise : « la fonction (...) contient une boucle non bornée caractérisée par l'instruction `while (... )`. Il est donc primordial de faire en sorte que la condition puisse être vérifiée afin d'éviter que la boucle soit infinie ». Justifier que dans le cas de la fonction informatique `minimum`,la boucle est nécessairement finie.

5. Le document indique « Le programme permet de penser que le minimum de f est voisin de -1,38 », et reproduit l'affichage obtenu lors d'une exécution du programme :

```
In [2]: minimum(f,-2,1,8,8881)
Out [2]: (- 8,5773999999999999, -1,384988175176)
```

a. Quelle est la valeur du pas h choisi dans la mise en œuvre du programme présenté ?

b. À quoi correspond le nombre affiché : $-0,5773999999999999$?

6. Dans cette activité, il est question de la fonction mathématique f et la fonction informatique `minimum`. Rédiger une explication de la différence entre fonction informatique et fonction mathématique d'une variable réelle qui pourrait être donnée à un élève de seconde professionnelle.

Partie D : étude mathématique

Des limites de cette méthode sont indiquées dans le texte de l'activité, elles sont reproduites dans l'encadré ci-dessous.

Cette méthode a des limites : on détermine en fait la plus petite image parmi celles des nombres $-2+h$, $-2+2h$, $-2+3h$, etc., mais on peut ne pas trouver le minimum de la fonction. Dans le cas de la fonction choisie ici, le minimum est atteint en $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ et vaut $-\frac{2\sqrt{3}}{9}-1$. De plus, dans le cas où l'on trouve bien le minimum ainsi, la fonction affiche un antécédent de ce minimum, mais il peut y en avoir d'autres. Il est intéressant de montrer aux élèves, à l'aide d'exemples bien choisis, les limites évoquées ci-dessus.

1. Expliquer pourquoi les auteurs écrivent « on peut ne pas trouver le minimum de la fonction ».

2. Par l'étude mathématique de la fonction f, prouver que le minimum de f est atteint sur $[-2\,;\,1]$ en $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ et vaut $-\frac{2\sqrt{3}}{9}-1$.

3. Présenter un exemple de fonction g permettant d'illustrer l'une des limites de la méthode par balayage évoquée dans l'encadré : « De plus, dans le cas où l'on trouve bien le minimum ainsi, la fonction (informatique appelée `minimum`) affiche un antécédent de ce minimum, mais il peut yen avoir d'autres. ».

Partie E : autre méthode

Rédiger, pour une classe seconde professionnelle, le texte d'une activité dans laquelle les élèves mettraient en œuvre une autre méthode pour déterminer une valeur approchée du minimum de la fonction f sur l'intervalle [-2; 1].

Exercice 3

Dans ce problème, on s'intéresse aux propriétés de certaines suites récurrentes (partie A) et de certains polynômes (partie B), qu'ont met ensuite en relation (partie C).

On notera :
$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.
$\mathbb{R}$:l'ensemble des nombres réels.

Partie A : suite de Fibonacci

Dans cette partie, on pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels est une **suite de type (F)** si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Soit r un nombre réel, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison r telle que $u_0 = 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type (F) si et seulement si $r = \varphi$ ou $r = \varphi'$.

On appelle **suite de Fibonacci** la suite $(F_n))$ de type (F) telle que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \varphi'^n\right).$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $F_n \neq 0$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $R_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $R_{n+1} = f(R_n)$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. Dans un même repère, tracer la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Expliquer et mettre en évidence sur le graphique la détermination des quatre premiers termes de la suite (R_n).

3. On définit la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$.

a. Montrer que $g = f \circ f$.

b. Étudier les variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. La courbe représentative de g sur $]0\,;\,+\infty[$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, en donner des équations.

d. Tracer une représentation graphique de g. On indiquera les asymptotes éventuelles.

e. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $R_{n+2} = g(R_n)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,on note $a_n = R_{2n-1}$ et $b_n = R_{2n}$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n < \varphi < b_n$.

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. * Fn+2

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_{n+1}R_n = \dfrac{F_{n+2}}{F_n}$ et $R_{n+1}R_n \geqslant 2$.

d. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|R_{n+1} - R_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

e. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

f. En déduire que (R_n) converge et donner sa limite.

Partie B : suite de polynômes

Dans toute cette partie, on identifiera polynômes et fonctions polynomiales. On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P_0 = 0, & & P_1 = 1 \\ P_{n+2}(X) & = & XP_{n+1}(X) - P_n(X) \end{array}\right.$$

1. Pour $2 \leqslant n \leqslant 5$, calculer le polynôme P_n.

2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, le polynôme P_n est de degré $n-1$ et a pour coefficient dominant 1.

3. Soit k un entier naturel.

a. Montrer que P_{2k} est un polynôme impair et que P_{2k+1} est un polynôme pair.

b. Que vaut $P_{2k}(0)$? Montrer que $P_{2k+1}(0) = (-1)^k$.

4. Pour tous réels a et b, montrer

$$2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b) \quad \text{et} \quad 2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b).$$

5. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ :

$$\sin(n\theta) = \sin(\theta) P_n(2\cos\theta)).$$

6. Soit n un entier naturel non nul.

a. Déterminer les réels θ tels que $\sin(n\theta) = 0$.

b. Soit $x \in [-2\,;\,2]$. Justifier qu'il existe un unique réel $\theta \in [0\,;\,\pi]$ tel que $x = 2\cos(\theta)$.

c. En déduire que l'équation $P_n(x) = 0$ admet, dans l'intervalle [-2; 2], exactement $n-1$ solutions, que l'on explicitera.

d. Montrer :

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

7. Soit m et n deux entiers naturels non nuls distincts.

a. Montrer

$$\int_0^{\pi} \sin(m\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \sin^2(n\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}.$$

b. En déduire les valeurs des intégrales

$$\int_{-2}^{2} P_m(x)P_n(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-2}^{2} P_n^2(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Partie C : suite de Fibonacci, matrices et polynômes

Dans cette partie, on établit des liens entre la suite de Fibonacci définie dans la partie A, des matrices et les polynômes définis dans la partie B.

1. Soit P la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

et que

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = P^k \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

b. Établir que $\forall (p,\,q) \in /N^* \times \mathbb{N}^*,\ F_pF_{q+1} + F_{p-1}F_q = F_{p+q}$

2. On rappelle que les polynômes P_nn sont définis dans la partie B.
On note i l'unité imaginaire $\left(\text{i}^2 = -1\right)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$P_n(\text{i}) = \text{i}^{n-1} F_n n \quad \text{et} \quad F_n = |P_n(\text{i})|.$$

b. En déduire, pour tout entier naturel non nul n,

$$F_n^2 = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

et

$$F_n = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

où m est la partie entière de $n/2$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à $n/2$.

Annexe 1

Extrait du programme de la classe de seconde professionnelle, module « Fonctions »

Capacités	Connaissances
Exploiter différents modes de représentation d'une fonction et passer de l'un à l'autre (expression, tableau de valeurs, courbe représentative). Selon le mode de représentation : – identifier la variable ; – déterminer l'image ou des antécédents éventuels d'un nombre par une fonction définie sur un ensemble donné. Reconnaître une situation de proportionnalité et déterminer la fonction linéaire qui la modélise.	Différents modes de représentation d'une fonction (expression, tableau de valeurs, courbe représentative). Variable, fonction, image, antécédent et notation $f(x)$. Intervalles de $\mathbb{R}$. Fonctions linéaires.
Relier courbe représentative et tableau de variations d'une fonction. Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.	Fonction croissante ou décroissante sur un intervalle. Tableau de variations. Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
Exploiter l'équation $y = f(x)$ d'une courbe : – vérifier l'appartenance d'un point à une courbe ; – calculer les coordonnées d'un point de la courbe.	Courbe représentative d'une fonction f :la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient $y = f(x)$.
Représenter graphiquement une fonction affine. Déterminer l'expression d'une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images. Déterminer graphiquement le coefficient directeur d'une droite non verticale. Faire le lien entre coefficient directeur et pente - dans un repère orthonormé. Reconnaître que deux droites d'équations données sont parallèles. Résoudre graphiquement, ou à l'aide d'outils numériques, un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Construire la parabole représentant la fonction carré et donner son tableau de variations.	Fonction affine : – courbe représentative ; – coefficient directeur et ordonnée à l'origine d'une droite représentant une fonction affine ; –équation réduite d'une droite ; –sens de variation en fonction du coefficient directeur de la droite qui la représente. Interprétation du coefficient directeur de la droite représentative d'une fonction affine comme taux d'accroissement. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Courbe représentative de la fonction carré. Sens de variation de la fonction carré.

Annexe 1, suite

BO LE BULLETIN OFFICIEL DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Déduire de la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle donné celle de la fonction qui à x associe $f(x)+k$, où k est un nombre réel donné, sur le même intervalle. Déduire de la courbe représentative de la fonction carré, l'allure de celle de la fonction définie par $f(x) = kx^2$, où k est un nombre réel donné. Déduire des variations d'une fonction f sur un intervalle donné celles de la fonction kf, où k est un nombre réel donné, sur le même intervalle.	
Dans le cadre de problèmes modélisés par des fonctions, résoudre par une méthode algébrique ou graphique une équation du type $f(x) = c$ ou une inéquation du type $f(x) < c$, où c est un réel donné et f une fonction affine ou une fonction du type $x \longmapsto kx^2$ (avec k réel donné).	Résolution algébrique ou graphique.

Exemples d'algorithmes et d'activités numériques

— Traduire un programme de calcul à l'aide d'une fonction en Python.

— Calculer les images de nombres par une fonction.

— Déterminer l'équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

—

— Rechercher un extremum par balayage sur un intervalle donné.

— Rechercher un encadrement ou une valeur approchée d'une solution d'une équation du type $f(x) = 0$ par balayage sur un intervalle donné.

Commentaires

— Lors de la détermination de l'expression d'une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images, on se limite à des cas simples, ne conduisant à aucune difficulté calculatoire.

— Les fonctions sont définies et étudiées sur un intervalle de IRL

— Les fonctions cube, racine carrée, inverse ou trigonométriques peuvent être évoquées lors de la résolution de problèmes en lien avec le domaine professionnel. Les droites d'équation x = a ne sont pas un attendu du programme.