∽ CAPLP externe 2013 et CAFEP ∾

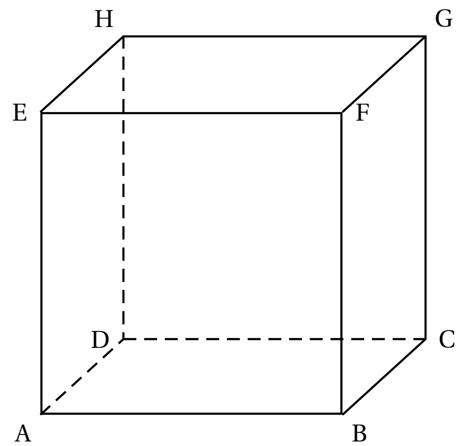
Durée : 5 heures

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants.
Le premier exercice est un test vrai :faux avec justification.
Le deuxième exercice étudie un modèle d'urnes aléatoires et porte sur l'étude de variables aléatoires.
Le troisième exercice étudie un modèle d'évolution de population el po rIe sur l'étude des solutions d'une équation différentielle.
Le quatrième exercice porte sur l'etude de courbes visualisées sur lm oscilloscope utilisé en modeXY.

Exercice 1

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse puis justifier la réponse.

1. Soit α la racine positive de l'équation $x2 - x - 1 = 0$. Alors $\alpha^5 = 5\alpha + 5$.
2. Si f est une fonction impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée f' est une fonction paire.
3. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = 0$.
4. La section d'un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 8 cm par un plan parallèle à son axe peut être un carré.
5. On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous. Le point M défini par
   $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FG} \wedge \overrightarrow{BH}$ est un sommet du cube.



6. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \int_1^2 \frac{(\ln t)^n}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v_n = (\ln 2)^{n+1}.$$

   Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

Exercice 2

Cet exercice a pour objet l'étude d'un modèle d'urnes aléatoires dites « de Polya » qui peut servir de modélisation de l'évolution génétique d'une population dans laquelle deux versions d'un même gène coexistent.

On considère une urne contenant 1 boule blanche et 1 boule noire.
À chaque tirage on tire une boule de l'urne puis on la remet dans l'urne avec une autre boule de la même couleur.

1. On propose de simuler avec un tableur une suite de tirages dans l'urne qui contient au départ 1 boule blanche et 1 boule noire.

a. La simulation d'**une suite de tirages avec un tableur fournit le tableau de valeurs ci-dessous**.

Justifier que la formule utilisée en B3 est **SI(ALEA()<D2 ;B2+1 ;B2)**

	A	B	C	D
1	Tirages	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires	Proportion de boules blanches
2	0	1	1	0,5
3	1	1	2	0,33
4	2	2	2	0,5
5	3	2	3	0,4
6	4	2	4	0,33
7	5	2	5	0,29
8	6	2	6	0,25
9	7	2	7	0,22
10	8	3	7	0,3

b. Quelle formule faut-il inscrire dans la case D3 et recopier vers le bas pour pouvoir obtenir la simulation d'une suite de tirages ?

2. Soit X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne au bout de n tirages, n entier supérieur ou égal à 1.

a. Déterminer la loi de X_1.

b. À l'aide d'un arbre déterminer les lois de X_2 et de X_3.

c. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout entier k compris entre 2 et n, on a :

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)\, P(X_n = k | X_{n-1} = k-1) + P(X_{n-1} = k)\, P(X_n = k | X_{n-1} = k). \quad (1)$$

d. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier k appartenant à $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

e. Exprimer par une phrase ce que signifie la relation démontrée à la question 2. d.

f. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on appelle B_n l'évènement « tirer une boule blanche au n-ième tirage ».

i. Calculer $P(B_3)$.

ii. Justifier, pour tout entier $n \geqslant 2$, que :

$$p(B_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k+1 | X_{n-1} = k).$$

iii. En déduire la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage.

Exercice 3

On s'intéresse à une étude portant sur l'évolution du nombre d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence.

On admet que Le nombre d'individus en millions présents à l'instant t (exprimé en heures) est égal à $N(t)$ où N est une fonction dérivable et strictement positive sur $[0~;~+\infty[$.
On suppose qu'il existe une constante M strictement positive telle que, pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on ait :

$$(E_1): \qquad N'(t) = N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{M}\right)$$

1. Démontrer qu'une fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et à valeurs strictement positives vérifie l'équation différentielle (E_1) si et seulement si la fonction $\dfrac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle

$$(E_2): \qquad y' + y = M$$

2. Résoudre l'équation (E_2).

3. En déduire les solutions de l'équation (E_1) strictement positives sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

On suppose dans la suite que, dans l'expérience observée, la fonction N est définie pour tout réel positif t par :

$$N(t) = \frac{M}{1 + C\mathrm{e}^{-t}}$$

où C est une constante réelle strictement supérieure à 1.

4. **a.** Étudier les variations de la fonction N sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

b. Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$.

c. Décrire l'évolution du nombre d'organismes vivants au cours du temps.

5. Démontrer qu'il existe un unique réel t_0 positif tel que :

$$N\left(t_0\right) = \frac{M}{2}.$$

6. **a.** Justifier que la fonction N est deux fois dérivable. On admet que, pour tout réel positif t :

$$N''(t) = \frac{MC\mathrm{e}^{-t}\left(C\mathrm{e}^{-t} - 1\right)}{\left(1 + C\mathrm{e}^{-t}\right)^3}$$

b. Étudier le signe de la fonction N''.

c. En déduire que la vitesse d'accroissement du nombre d'organismes vivants est décroissante à partir de l'instant t_0 et exprimer t_0 en fonction de C.

7. Soit T un réel strictement positif. Le nombre moyen d'organismes vivants sur l'intervalle de temps $[0~;~T]$ est la valeur moyenne de la fonction N sur ('intervalle $[0, T]$.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a~;~b]$ est donnée par $\mu = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Calculer la valeur moyenne de la fonction N sur l'intervalle $[0~;~t_0]$.

On pourra observer que : $N(t) = \dfrac{M}{1 + C\mathrm{e}^{-t}} = \dfrac{M\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{t} + C}$.

b. En déduire le nombre moyen d'organismes vivants entre les instants 0 et t_0 en fonction de $N(0)$ et de la constante C.

Exercice 4

Cet exercice porte sur l'étude de courbes que l'on peut visualiser sur un oscilloscope. Sur un oscilloscope utilisé en mode XY, on applique deux tensions de même pulsation ω ($\omega > 1$) présentant entre elles un décalage de phase, exprimé en radians et noté φ ; $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Les tensions, exprimées en volts appliquées sur les entrées X et Y sont :

$$U_1(t) = V_1\cos(\omega t) \quad \text{et} U_2(t) = V_2\cos(\omega t - \varphi), \quad \left(t \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{D}\right[\right).$$

Dans tout le problème, on se place dans un repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ orthonormé d'unité graphique 1 cm correspondant à 1 volt sur chacun des deux axes.
On appelle Γ_φ la courbe de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & v_1\cos(\omega t)\\ y & = & v_2\cos(\omega t - \varphi)\end{array}\right. \qquad \left(t \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{\omega}\right[\right),\ v_1, v_2 \text{ réels strictement positifs}$$

Pour $t \in \left[0\,;\,\frac{2\pi}{\omega}\right[$, on note $M(t)$ le point de coordonnées $\left(v_1\cos(\omega t), v_2\cos(\omega t - \varphi)\right)$.

Partie I

On considère dans cette partie que $\varphi = 0$.

1. Montrer que la courbe Γ_0 a pour équation cartésienne dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$:

$$y = \frac{v_2}{v_1}x, \quad x \in [-v_1\,;\,v_1].$$

2. En déduire la nature de la courbe Γ_0.

3. Tracer Γ_0 pour les valeurs de v_1 et v_2 suivantes : $v_1 = 4$ et $v_2 = 3$.

Partie II

On considère désormais que $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
On appelle (E) la courbe d'équation cartésienne dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$:

$$\frac{x^2}{v_1^2} + \frac{y^2}{v_2^2} = 1.$$

1. **a.** Montrer que tout point M de $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ appartient à la courbe (E).

b. Réciproquement, soit $M(x\,;\,y)$ un point de (E). On pose $u = \frac{x}{v_1}$ et $v = \frac{y}{v_2}$.
Montrer que $u^2 + v^2 = 1$. En déduire que le point M appartient à la courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.

c. Que peut-on déduire des questions précédentes ?

2. **a.** Soit $M(x\,;\,y)$ appartenant à $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$. Montrer que le point $M'(-x\,;\,y)$ appartient aussi à $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.

b. En déduire que l'axe (Oy) est axe de symétrie de $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.

c. Montrer que l'axe (Ox) est lui aussi axe de symétrie de $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.

d. Déduire des questions précédentes que le centre O du repère est centre de symétrie de $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.

e. Soit (E$'$) la courbe d'équation : x2 y2

$$\frac{x^2}{v_1^2} + \frac{y^2}{v_2^2} = 1, \quad x \geqslant 0 ; y \geqslant 0.$$

Indiquer, sans justifier, par quelles transformations géométriques simples on obtient l'intégralité de la courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ à partir de la courbe (E$'$).

3. Montrer que (E′) est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\ ;\ v_1]$ par :

$$f(x) = \frac{v_1}{v_2}\sqrt{v_1^2 - x^2}.$$

a. Démontrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ v_1[$ et calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0\ ;\ v_1[$.

b. Montrer que la courbe (E′) admet une tangente verticale en v_1.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d. Tracer (E′), puis $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra $v_1 = 4$ et $v_2 = 3$.

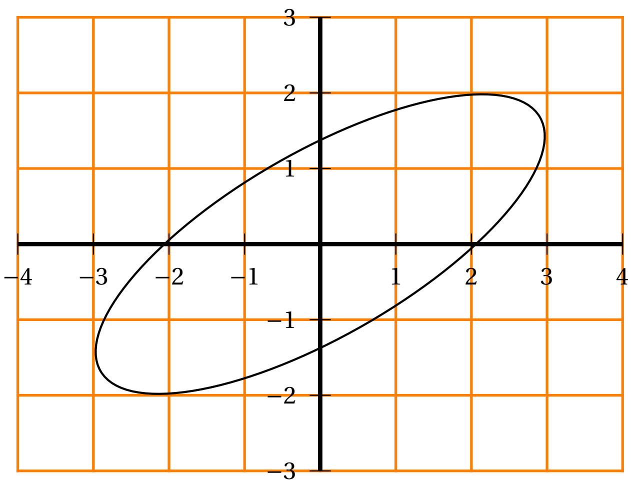
4. Un oscilloscope, utilisé en mode XY, fournit l'image ci-dessous. Les axes de l'écran sont gradués en volts.
On a appliqué sur les entrées X et Y respectivement deux tensions u_1 et u_2 de même pulsation ω, présentant entre elles un décalage de phase φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
Ces tensions sont définies en fonction du temps respectivement par

$$U_1(t) = V_1\cos(\omega t) \quad \text{et} \quad U_2(t) = V_2\cos(\omega t - \varphi),$$

avec $t \in \left[0\ ;\ \frac{2\pi}{\omega}\right[$.
On admet que les valeurs maximales des tensions U_1 et U_2 exprimées en volts sont entières et que le point A de coordonnées $(0\ ;\ 1,4)$ appartient au tracé fourni par l'oscilloscope.

a. Lire sur le graphique les valeurs de V_1 et de V_2.

b. Calculer une valeur approchée de φ au degré près. (On pourra utiliser le fait que le point A appartient. au tracé et déterminer $\sin\varphi$).



Partie III

L'objectif de cette partie est d'étudier quelques propriétés géométriques de la courbe r d'équation cartésienne dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

1. Soit $M(x\ ;\ y)$ appartenant à la courbe Γ et soient $\text{F}\left(\sqrt{7}\ ;\ 0\right)$ et $\text{F}'\left(-\sqrt{7}\ ;\ 0\right)$ deux points de l'axe (Ox).

a. Montrer que $\text{MF}^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{4}x - 4\right)^2$.

b. En déduire que tout point M de Γ vérifie $\text{MF} + \text{MF}' = 8$.

2. Réciproquement, on cherche à déterminer l'ensemble (E) des points du plan tels que $\text{MF} + \text{MF}' = 8$.

a. Soit $M(x~;~y)$ un point du plan, Calculer $\text{MF}^2 - \text{MF}'^2$ et $\text{MF}^2 + \text{MF}'^2$.

b. Montrer que si M appartient à (E), alors $\text{MF} - \text{MF}' = -\frac{\sqrt{7}}{4}x$.

c. En déduire que tout point de (E) appartient à Γ.