CAPLP Concours externe et CAFEP
Section : Mathématiques – Physique–Chimie Session 2023

Durée : 4 heures

PARTIE 1 : MATHÉMATIQUES

La partie Mathématiques est constituée de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre quelconque.
Le premier exercice est un vrai faux avec justification.
Le deuxième exercice est constitué de quatre parties.

Exercice 1

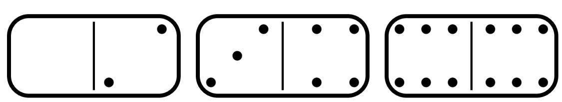
Préciser si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Un fabriquant de gâteaux souhaite faire des offres promotionnelles.

   Affirmation : « En tant que consommateur, il est préférable d'avoir une réduction tarifaire de 20 % plutôt que 24 % de produit en plus pour le prix initial ».

2. Un domino est constitué de deux cases, chaque case contenant un nombre de points compris entre 0 et 6.

   Exemples de dominos :

   Affirmation : « Il y a 28 dominos différents ».

3. (u_n) la suite définie par $u_0 = 1,5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3 - u_n}$.

   Affirmation : « La suite (u_n) vérifie l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».

4. Soit k un nombre entier naturel non nul. On pose pour tout réel x, $f_k(x) = x - 2 + k\mathrm{e}^{-x}$ et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative.

   On admet que pour tout entier naturel k non nul, la fonction f_k admet un minimum et on appelle A_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ correspondant.

   Affirmation : « Les points A_k appartiennent tous à une même droite ».

5. Un sujet de physique est créé par l'un des trois professeurs M. Lavoisier, M. Newton et M. Galilée.

   Statistiquement, on sait que 35 % des sujets sont écrits par M. Lavoisier, 40 % sont écrits par M. Newton et que les autres sujets sont écrits par M. Galilée.

   Les étudiants savent que 20 % des sujets écrits par M. Lavoisier traitent de la relativité, que la moitié des sujets écrits par M. Newton portent sur le thème de la relativité et que 80 % des sujets écrits par M. Galilée portent sur le thème de la relativité.

   Lors de l'épreuve, ils découvrent un sujet sur le thème de la relativité.

   Affirmation : « La probabilité qu'il ait été écrit par M. Newton est égale à 0,40 ».

6. La fonction f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour tous réels x et y,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et telle que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 1$.
Affirmation : « Seule la fonction identité répond à ces conditions ».

7. On considère l'équation différentielle

$$4y'' - 12y' + 9y = 1.$$

Affirmation : « Il existe une solution à cette équation différentielle qui est strictement négative sur $\mathbb{R}$. ».

8. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère la droite d d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2t \\ y & = & 5-t, \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(5~;~2)$ et de rayon 4.

Affirmation : « Le point A de la droite d de coordonnées $(3\,;6)$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est le point le plus proche du cercle $\mathscr{C}$ ».

9. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Affirmation : « La suite (u_n) est décroissante minorée par 0 et converge vers 0 ».

10. Soit l'ensemble E des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels.

Affirmation : « La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans E ».

11. On considère la proposition suivante : « Si deux matrices B et C carrées de taille 3×3 sont égales, alors pour toute matrice A carrée de taille 3×3, on a $A \times B = A \times C$ ».
Affirmation : « La proposition réciproque est vraie ».

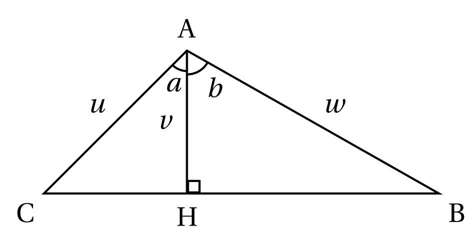
Exercice 2

Partie 1 : La fonction sinus

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On note $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique de centre O et M_x le point de $(\mathscr{C})$ tel que x soit une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\vec{\imath}~;~\overrightarrow{\text{O}M_x}\right)$.
Rappeler la définition des nombres $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour tout x réel.

2. Montrer que l'aire d'un triangle dont on connaît l'un des angles θ et les longueurs α et β des côtés adjacents à cet angle est égale à $\dfrac{\alpha\beta\sin\theta}{2}$.

3. Sur la figure ci-contre, a et b désignent les mesures en radian des angles $\left(\overrightarrow{\text{AC}}~;~\overrightarrow{\text{AH}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{AH}}~;~\overrightarrow{\text{AB}}\right)$ et u, v et w sont respectivement les longueurs AC, AH et AB.
En vous appuyant sur cette figure, démontrer à l'aide de la question précédente l'égalité suivante :



$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

pour tous réels a et b positifs vérifiant $0 < a+b < \pi$.

4. À l'aide de l'exponentielle complexe, montrer que l'égalité de la question 3 est vraie pour tous les réels a et b.

Partie 2 : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^5(x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans le repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

5. a. Montrer que la fonction f est 2π-périodique et impaire sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que pour tout $t \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)$.

c. Justifier que l'étude de la fonction f peut être limitée à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et en déduire celui de f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

7. Déterminer l'équation des tangentes à la courbe respectivement aux points d'abscisse 0, d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$, puis d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

8. Démontrer que la fonction f admet un unique point d'inflexion sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

9. Représenter une allure de la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.

10. En utilisant la méthode des rectangles à gauche et à droite avec 5 rectangles dont la longueur de la base est $\dfrac{\pi}{10}$, donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

11. On utilise la méthode des rectangles avec n rectangles dont la longueur de la base est $\dfrac{\pi}{2n}$.
Préciser ce qu'il faut écrire à la place du mot TEXTE dans l'algorithme ci-contre, écrit en langage Python, afin d'obtenir une valeur approchée par défaut du nombre $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,\mathrm{d}x$.
Il n'est pas demandé ici d'en calculer une valeur approchée.

```
from math import*

def integrale (n) :
    aire = 0
    for k in range (n) :
        aire aire = aire + TEXTE
    return aire
```

Partie 3 : Les intégrales de Wallis

On considère la suite d'intégrales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

12. Les premiers termes

a. Calculer S_0 et S_1.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$ et en déduire la valeur de S_2.

c. Après avoir justifié que, pour tout réel x, on a $\sin^3(x) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x)$, calculer la valeur de S_3.

13. Sens de variation de la suite

a. Justifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout entier naturel n, on a : $0 < \sin^{n+1}(x) < \sin^n(x)$.

b. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

14. Limite de la suite

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n,

$$S_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} S_n.$$

-

b. Montrer que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $R_n = (n+1)S_n S_{n+1}$ est constante et donner la valeur de cette constante.

c. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0.

15. Application aux calculs des termes

a. À l'aide de la relation de récurrence trouvée précédemment, retrouver la valeur de S_3 déjà obtenue à la question 12.

b. Donner l'expression générale de S_n selon la parité de n.

Partie 4 : Une loi de probabilité

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par

$$g(x) = \frac{15}{16}\sin^5(x)$$

et sa courbe Γ dans un repère orthogonal.

16. Dans cette question, on cherche l'expression d'une primitive de la fonction g sur $[0\,;\,\pi]$.

a. Rappeler la formule générale du binôme de Newton.

b. Développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)^5$.

c. En déduire que pour tout réel x,

$$\sin^5(x) = \frac{1}{16}\sin(5x) - \frac{5}{16}\sin(3x) + \frac{5}{8}\sin(x).$$

d. En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

17. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

b. En déduire que g définit la fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

On note X la variable aléatoire de densité g et P la probabilité associée définie, pour tout $t \in [0\,;\,\pi]$ par $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^{t} g(x)\,\mathrm{d}x$.

18. Montrer que $P\left(X \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right) = P\left(X \geqslant \dfrac{\pi}{2}\right) = 0,5$.

19. En admettant que $P\left(X \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right) \approx 0,02$, donner une valeur approchée de $P\left(\dfrac{\pi}{2} \leqslant X <\leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

20. Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in \left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $P\left(X \leqslant t_0\right) = 0,3$.

21. Par la méthode de votre choix, déterminer une valeur approchée de t_0 à 0,01 près.

22. Dans cette question, on cherche à calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

a. Pour tout nombre k réel non nul, déterminer l'expression de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(kx)\mathrm{d}x$.

b. En déduire l'espérance de X.