CONCOURS INTERNE

Section : Mathématiques – Sciences Physiques

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures.

Le sujet est constitué de quatre exercices indépendants.

Le premier exercice a pour but de tester quelques savoir-faire mathématiques.

Le deuxième exercice, de nature pédagogique, a pour objet l'étude d'une situation en géométrie dans l'espace au niveau du baccalauréat professionnel.

Le troisième exercice a pour objet d'établir la formule de Stirling.

Le quatrième exercice a pour but d'étudier quelques propriétés géométriques d'une inversion du plan affine euclidien.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction, interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies, ainsi que, dans la partie concernée, le savoir-faire pédagogique et l'intervention de méthodes en conformité avec les programmes en vigueur dans les lycées professionnels.

L'usage des calculatrices de poche est autorisé (conformément aux directives de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999).

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Préciser si la proposition suivante est vraie ou est fausse en justifiant la réponse :

   Pour tout couple (z , z') de nombres complexes on a :

   $$(z^2 + z'^2 = 0) \Rightarrow (z = 0 \text{ et } z' = 0).$$

2. Soit n un nombre entier naturel non nul.
   Établir une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de n entiers consécutifs soit un multiple de n.

3. Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} \text{pour tout nombre entier naturel } n : u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \ , \\ \text{avec } u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1\ . \end{cases}$

   Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

4. Une pièce automobile fabriquée en très grande série présente au plus deux défauts codés α et β.
   Le service chargé du contrôle de qualité examine un lot de 10 000 pièces et fait les constats suivants :
   - 90 pièces présentaient au moins le défaut α,
   - 80 pièces présentaient au moins le défaut β,
   - 30 pièces présentaient à la fois le défaut α et le défaut β.

   On prélève, au hasard, une de ces 10 000 pièces. Chaque pièce a la même probabilité d'être prélevée.
   On note A l'évènement « la pièce prélevée présente au moins le défaut α », et B l'évènement « la pièce prélevée présente au moins le défaut β ».
   a. Quelle est la probabilité que la pièce prélevée ne présente aucun défaut ?
   b. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2

Le thème de cet exercice pédagogique est la géométrie dans l'espace.
Des extraits des programmes de mathématiques se trouvent en annexe pages 9 et 10.

Afin de préparer des élèves à leur examen, un professeur leur donne le problème ci-dessous tiré d'une épreuve de baccalauréat professionnel.

Énoncé du problème donné aux élèves

Lors d'une exposition d'art contemporain, il est prévu d'installer un panneau triangulaire, dans une salle qui a la forme d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH :

où AB = 7 m AE = 4 m AD = 12 m

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ représenté en perspective cavalière ci-dessous.
Les segments [AB], [AD] et [AE] ont pour support respectivement l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et l'axe des cotes.
Soit I le point de coordonnées $(7;9;4)$.

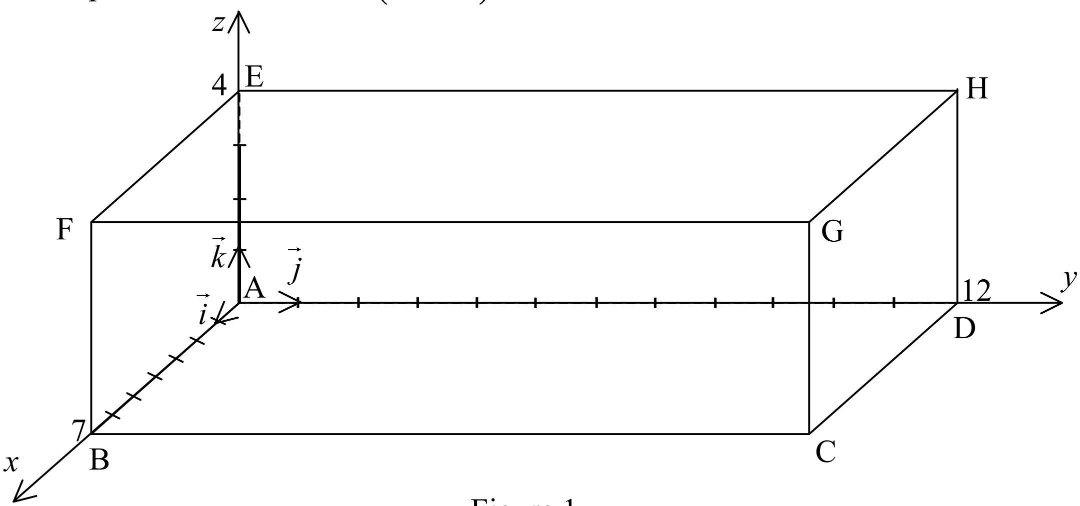

Figure 1

Le panneau de forme triangulaire sera représenté par le triangle ICH.

1) Placer le point I sur la figure 1.
2) Lire et noter les coordonnées des points C, G et H.
3) Tracer le triangle ICH sur la figure 1.
4) Déterminer, d'après la figure 1, les longueurs des segments [GC], [GI], [GH].
5) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IH}$, $\overrightarrow{CH}$.
6) Calculer, en mètres, les longueurs des segments [IC], [IH], [CH].
   Exprimer les résultats à 0,01 près.

Questions aux candidats du CAPLP

1. Donner les résultats des questions 5 et 6 du problème donné aux élèves.

2. Lors de la correction en classe et après observation de la figure 1, deux élèves interviennent :

    a. Le premier dit : « Les points B, I, H me semblent alignés ».

    b. Le deuxième réplique : « Pas du tout, l'angle $\widehat{BIH}$ est droit ».

    Pour chaque élève, élaborer une réponse argumentée, qui repère et corrige les éventuelles erreurs. Les réponses fournies doivent être accessibles aux élèves de baccalauréat professionnel.

3. Après cette discussion, on pose le problème suivant : existe-t-il un point J du segment [FG] tel que la droite (BJ) soit perpendiculaire au plan CJH ?

    Détailler les questions permettant aux élèves de répondre à ce problème, puis rédiger le corrigé correspondant.

Exercice 3

L'objet de cet exercice est d'établir la formule de Stirling qui donne un ordre de grandeur de n ! lorsque n tend vers $+\infty$.

On rappelle que si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels non nuls, on dit que u_n est équivalent à v_n lorsque *n* tend vers $+\infty$ si le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Partie A

Cette partie porte sur l'étude des intégrales de Wallis.

Soit I_n l'intégrale définie, pour tout nombre entier naturel *n*, par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x .$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel *n*, $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$.
3. Établir la relation de récurrence suivante valable pour tout nombre entier naturel $n > 1$:

    $$n\, I_n = (n-1)\, I_{n-2} .$$

    On pourra utiliser une intégration par parties.

4. Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
5. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1\,.$$

6. En déduire que I_n, I_{n-1} et $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\ n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Partie B

Cette partie porte sur l'étude d'une fonction.

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]-1\,;\,1[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ f(0) = 1. & \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. Prouver que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$:

$$2x + \frac{2x^3}{3} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

On admettra pour la suite de l'exercice que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\,0\,;\,1\,[$:

$$2x + \frac{2x^3}{3} \leq \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \leq 2x + \frac{2x^3}{3(1-x^2)}.$$

Partie C

Cette partie permet d'aboutir à la formule de Stirling.

On considère la suite de nombres réels de terme général u_n définie pour tout nombre entier naturel n non nul par :

$$u_n = n!\ \mathrm{e}^n\ n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

1. Montrer que, si on pose $p = \dfrac{1}{2n+1}$, on obtient : $\ln\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = f(p) - 1$.
2. En déduire que pour tout nombre entier naturel n non nul :

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} \leq \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{12n(n+1)},$$

puis que :

$$\frac{1}{12(n+1)(n+2)} \leq \ln\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{12n(n+1)}.$$

3. Soient les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies pour tout nombre entier naturel n non nul par :

$$v_n = \ln(u_n) - \frac{1}{12n} \qquad \text{et} \qquad w_n = \ln(u_n) - \frac{1}{12(n+1)}.$$

   Montrer que les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

   On notera ℓ leur limite commune lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Justifier que n ! est équivalent à $e^{\ell}e^{-n}n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. En déduire que $e^{\ell} = \sqrt{2\pi}$. On pourra utiliser les questions 6 et 7 de la partie A.

Exercice 4

On note P le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note P^* le plan P privé de l'origine O et $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.
À tout point M du plan P de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z = x + \mathrm{i}\, y$.
On note f l'application de $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbf{C}^*$ qui à tout nombre complexe z associe le complexe z' défini par $z' = f(z) = \frac{\mathrm{k}}{\overline{z}}$, où k est un nombre réel non nul.

On note I l'application de P^* dans P^* qui à tout point M d'affixe z associe le point M' = I (M) d'affixe $z' = f(z) = \frac{\mathrm{k}}{\overline{z}}\cdot$

L'application I est appelée inversion de centre O et de puissance k.
Un cercle (ou une droite) passant par le point O, mais privé(e) du point O, sera par la suite également dénommé(e) cercle (respectivement droite).

I. Quelques généralités.

1. Exprimer la longueur OM' en fonction de la longueur OM.
2. Montrer que les points O, M et M' sont alignés et que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}'}$ est égal à k.

3. Déterminer, en fonction du nombre réel non nul k, la nature de l'ensemble des points M de P^* invariants par l'application I.
4. Vérifier que l'inversion I est involutive, c'est-à-dire que $I \circ I = Id$, où Id est l'application identité du plan.
5. Déterminer l'image par l'application I du cercle de centre O et de rayon $r > 0$.

II. Image par l'inversion *I* d'un cercle passant par le point O.

Soit C un cercle de centre Ω (d'affixe $\omega \neq 0$) et de rayon $r > 0$, passant par le point O.

On note H le point du cercle C diamétralement opposé au point O.

On note H' l'image du point H par l'inversion I et on note D la droite passant par le point H' orthogonale à la droite (OH).

Soit M un point du cercle C différent du point O et du point H.

Soit N le point d'intersection des droites (OM) et D.

1. On suppose $k < 0$.
   a. Cas particulier .
      Faire une figure faisant apparaître le cercle C, les points H, H', M, N ainsi que la droite D, dans le cas particulier où $\omega = 4 + 3i$ et $k = -30$.
   b. Cas général avec $k < 0$.
      i. Justifier que les triangles OMH et OH'N sont semblables.
      ii. En déduire que le point N est l'image du point M par l'inversion I.
      iii. Quelle est l'image du cercle C par l'inversion I ?

2. On suppose $k > 0$. Quelle est la nature de l'image du cercle C par l'inversion I ?

III. Image par l'inversion *I* d'un cercle ne passant pas par le point O.

Soit C un cercle de centre Ω (d'affixe ω) et de rayon $r > 0$, ne passant pas par le point O.

Soient M un point de P^* d'affixe z et M' son image par l'inversion I.

On note z' l'affixe du point M'.

1. Démontrer que :

$$M \in C \Leftrightarrow z\overline{z} - \overline{\omega}z - \omega\overline{z} = r^2 - \omega\overline{\omega}.$$

2. En déduire que l'image du cercle C par l'inversion I est un cercle C' ne passant pas par le point O.
3. Justifier que le cercle C' est aussi l'image du cercle C par une homothétie de centre O.

ANNEXE

Extrait des programmes de BEP

5) <u>Étude expérimentale de droites et de plans de l'espace</u> : observation de solides usuels dans le but de préciser des positions relatives et en particulier de mettre en évidence des situations de parallélisme et d'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.	Les objets usuels étudiés dans les classes antérieures (cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide, sphère, cylindre et cône de révolution) constituent un terrain privilégié pour les activités. L'objectif n'est pas de mettre en place des résultats théoriques mais de familiariser les élèves avec des configurations courantes.
6) <u>Description de solides usuels en utilisant des projections orthogonales, sections planes, développement.</u>	La recherche de sections planes de solides doit se limiter à des cas très simples ; elle permettra de préciser la forme du solide dans l'espace et sera le support d'activités numériques. Les élèves seront alors amenés à choisir certaines sections planes de solides mais, pour les travaux non encadrés par le professeur, les "plans de coupe" seront indiqués. Les activités exploiteront conjointement des maquettes des objets étudiés et des représentations de ces objets effectuées, selon les problèmes posés, à main levée ou à l'aide des instruments de dessin.
7) <u>Exemples de calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes dans les configurations usuelles du plan et de l'espace.</u>	Les formules donnant les aires et volumes des solides usuels sont admises. Des activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les volumes.

Extrait des programmes de baccalauréat professionnel

III – ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Mettant en oeuvre les connaissances de géométrie ou de trigonométrie du programme de BEP, cette partie ne comporte que la rubrique " Champ des activités ". En outre, elles peuvent constituer un support pour les notions nouvelles du programme.

Champ des activités

Exemples d'étude de problèmes liés à la profession, faisant intervenir dans le plan des constructions géométriques de configurations simples, des transformations géométriques (symétrie axiale, symétrie centrale, translation) ou conduisant à des calculs simples de distances, d'angles, d'aires. Exemples d'étude de solides usuels conduisant à l'utilisation de sections planes ou à des calculs de distances, d'angles, d'aires ou de volumes.	Toutes les indications utiles doivent être fournies. Toutes les indications utiles doivent être fournies.

VI – TRIGONOMÉTRIE, GÉOMÉTRIE, VECTEURS

Cette partie du programme permet d'aborder des notions de trigonométrie et de géométrie, notamment vectorielle, du plan et de l'espace, qui dépasse le cadre d'un tronc commun. La partie "Géométrie dans le plan" constitue un approfondissement de notions vues en BEP et donne lieu à un champ d'activités nouvelles où l'exploitation de situations du domaine professionnel est développé avec intérêt.

La partie "Géométrie dans l'espace" permet d'aborder des notions vectorielles simples et est l'occasion d'activités de recherche et de représentation débouchant sur l'utilisation de l'outil vectoriel dans l'espace.

2 – Géométrie dans l'espace

a) Repérage d'un point dans l'espace : repères orthonormaux, coordonnées cartésiennes d'un point. b) Coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormal.	L'extension à l'espace de l'expression des propriétés des vecteurs du plan se fait de façon intuitive.
c) Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs, norme d'un vecteur dans un repère orthonormal.	L'extension à l'espace de l'expression du produit scalaire et de ses propriétés est admise.

Champ des activités

Exemples de calculs de distances, d'angles dans des configurations usuelles de l'espace.	L'extension à l'espace de la condition d'orthogonalité de deux vecteurs se fait intuitivement.