CAPES interne 2006

Problème 1

Notations
Dans le problème, pour toute fonction h définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note h' sa fonction dérivée.
On note E l'ensemble des fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, dérivables sur l'intervalle $[0\,;\,1[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- f' est dérivable sur $[0\,;\,1[$ et on note f'' sa fonction dérivée
- $\forall x \in [0\ ;\ l[,\ f'(x) \geqslant 0$
- $\forall x \in [0\ ;\ l[,\ f''(x) \geqslant 0$.

Pour toute fonction f de E, on note :

- $\tilde{f}$ la fonction associée à f, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $\tilde{f}(x) = x - f(x)$;
- $I(f)$ le réel défini par $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x$.

  $I(f)$ est appelé indice de Gini de f.

On admettra que si une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est monotone ou strictement monotone sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, il en est de même sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie I Étude de quelques éléments de E

1. Soit f la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right) \text{ où } \lambda \text{ est le nombre réel tel que } f(1) = 1.$$

   1.1. Préciser la valeur de λ.
   1.2. Démontrer que f est un élément de E.
   1.3. Démontrer que pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$: $x - f(x) \geqslant 0$.
   1.4. Dresser le tableau de variation de f. On précisera les valeurs exactes prises par f' en 0 et 1.
   1.5. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.
   1.6. *Application économique*
   On peut considérer que la fonction f rend compte de la concentration des richesses des habitants d'un pays donné. Par exemple, $f(0,3) \approx 0,19$ signifie que 30 % des habitants (les plus pauvres) possèdent environ 19 % des richesses du pays. Dans ces conditions, l'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses dans ce pays.
   Calculer l'indice de Gini pour le pays considéré. En donner une interprétation graphique.
2. Soit n un entier naturel strictement positif et f_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f_n(x) = x^n$.
   2.1. Démontrer que f_n est un élément de E.
   2.2. Calculer $I(f_n)$.
   2.3. Démontrer que la suite $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}*}$ est convergente et préciser sa limite.
3. Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et g_n la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$g_n(x) = 1 - (1 - x)^{\frac{1}{n}}.$$

3.1. Démontrer que g_n est un élément de E.

3.2. Calculer $I\left(g_n\right)$. Comparer $\left(I\left(f_n\right)\right)$ et $\left(I\left(g_n\right)\right)$ pour tout entier naturel $n > 1$.

3.3. Dans cette question, on suppose $n = 2$.

3.3.1. Résoudre dans l'intervalle $]0\,;\,1[$ l'équation $f_2(x) = g_2(x)$.

3.3.2. Justifier le sens de variations des fonctions f_2 et g_2.

3.3.3. Donner sous la forme d'un tableau les valeurs de $f_2\left(\dfrac{p}{10}\right)$ et les arrondis au centième de $g_2\left(\dfrac{p}{10}\right)$ pour p entier compris entre 0 et 10.

3.3.4. Tracer les courbes représentatives de f_2 et de g_2 dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

3.3.5. Donner une interprétation graphique de la relation qui existe entre $I\left(f_2\right)$ et $I\left(g_2\right)$.

3.3.6. Dans le cas où f_2 et g_2 rendent compte de la concentration des richesses des habitants de deux pays différents, que vaut l'indice de Gini pour chacun de ces deux pays ? Dans ce cas, l'indice de Gini vous semble-t-il signifiant ?

Partie II Quelques propriétés de la fonction $\tilde{f}$

On considère dans cette partie une fonction f élément de E et $\tilde{f}$ la fonction associée à f

1. Démontrer que pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$: $\tilde{f} \leqslant x$.
2. Dans cette question on étudie la fonction $\tilde{f}'$ dérivée de $\tilde{f}$.
   2.1. Étudier le sens de variation de la fonction $\tilde{f}'$ sur $[0\,;\,1[$.
   2.2. Démontrer que si l'on suppose que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,1[$, $\tilde{f}'(x) < 0$, on aboutit à une impossibilité.
   De même, démontrer que si l'on suppose que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,1[$, $\tilde{f}'(x) > 0$, on aboutit à une impossibilité.
   2.3. En déduire qu'il existe un élément x_0 de $]0\,;\,1[$ tel que : $\tilde{f}'\left(x_0\right) = 0$.
3. Démontrer que $\tilde{f}'(0)$ est égal à 0 si et seulement si la fonction $\tilde{f}$ est nulle sur $[0\,;\,1]$. Que.peut-on dire alors de la fonction f ?
4. On suppose dans cette question que $\tilde{f}'(0) \neq 0$.
   4.1. Étudier le signe de $\tilde{f}'$ sur $[0\,;\,1\,[$ et préciser les variations de $\tilde{f}'$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   4.2. Justifier que, pour tout x appartenant à. l'intervalle $]0\,;\,1[$: $\tilde{f}'(x) > 0$.
   4.3. En déduire. que la fonction $\tilde{f}$ admet sur $[0\,;\,1]$ un maximum, strictement positif, atteint en x_0.

Partie III Quelques propriétés de l'indice de Gini

Les résultats de la partie II pourront être utilisés pour résoudre les questions de la partie III.

Dans toute cette partie, f désigne toujours une fonction de E et $\tilde{f}$ la fonction associée à f

1. Démontrer que $I(f) \geqslant 0$.
2. Démontrer que $I(f) \leqslant 1$.
3. Dans cette question, on veut démontrer que $I(f) < 1$.
   3.1. Prouver que, pour tout réel α appartenant à $[0\,;\,1[$, on a :
   $$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant f(\alpha)(1-\alpha).$$
   3.2. Démontrer que la condition $f(1) = 1$ implique l'existence d'un réel α_0 de l'intervalle $]0\,;\,1[$ tel que $f\left(\alpha_0\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   3.3. En déduire que $I(f) < 1$.
4. À l'aide de la question 2.3.. de la partie I, démontrer que, quel que soit le réel $A < 1$, on peut trouver une fonction f de E telle que $I(f) > A$.
5. Dans cette question, on suppose que $\tilde{f}'(0) \neq 0$ et on considère x_0 appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1\,[$tel que $\tilde{f}'(0) = 0$.
   On note φ la fonction numérique de la variable x définie sur l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$ par :
   $$\varphi(x) = \tilde{f}(x) - M\frac{x}{x_0}$$

$$\text{où } M = \tilde{f}\,(x_0)$$

5.1. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\,(x_0)$.

5.2. Justifier que $\varphi'(0) < 0$ et que φ' s'annule sur l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$.

5.3. En déduire, que pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ x_0]$, $\tilde{f}(x) \geqslant M\dfrac{x}{x_0}$.

Par un raisonnement analogue, on peut établir le résultat suivant que nous admettons :

$$\forall x \in [x_0\ \ ;\ 1]\,,\ \tilde{f}(x) \geqslant M\frac{x-1}{x_0-1}.$$

5.4. En déduire que $I(f) \geqslant M$.

6. Soit H la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$H(x) = \int_0^x \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.1. Démontrer que, pour, tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $H(x) \geqslant 0$.

6.2. Prouver que H est une fonction croissante sur $[0\,;\,1]$.

6.3. Démontrer que si $I(f) = 0$ alors H est la fonction nulle.

6.4. En déduire que si $I(f) = 0$ alors pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x) = x$.

Problème 2

Les parties I, II et Ill qui constituent le problème 2 sont indépendantes les unes des autres.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à déplacer un jeton sur une piste composée de cases numérotées à partir de 0 ; l'opérateur dispose, d'un dé cubique parfaitement équilibré dont chaque face porte un numéro. Le dé étant parfaitement équilibré, chaque face a la même probabilité d'apparaître lors d'un lancer.

Case 0	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	$\cdots$

Les modalités de l'expérience sont les suivantes :

- *au départ, le jeton est sur la case 0 ;*
- *l'opérateur lance le dé ;*
- *il déplace le jeton de la gauche vers la droite d'un nombre de cases égal au résultat donné par le dé lors du lancer ;*
- *puis l'opérateur relance le dé et déplace le jeton selon la procédure précédente autant de fois que nécessaire.*

Au cours de l'expérience, N désignant un entier strictement positif :

- *on dit que la case N est atteinte au i^e lancer lorsque c'est la case sur laquelle arrive le jeton au i^e lancer.*
- *on dit que la case N est dépassée au i^e lancer si une case de numéro supérieur ou égal à N est atteinte au i^e lancer.*

Partie I

Dans cette partie, le dé porte sur trois de ses faces le numéro 1 et sur les trois autres faces le numéro 2.

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   A_1 : « atteindre la case 1 au 1^{er} lancer »
   A_2 : « atteindre la case 2 au 1^{er} lancer »
   A_3 : « atteindre la case 3 au 1^{er} lancer »
   B_1 : « atteindre la case 1 au 2^{e} lancer ».
   B_2 : « atteindre la case 2 au 2^{e} tancer ». .
   B_3 : « atteindre la case 3 au 2^{e} lancer »
   B_4 : « atteindre la case. 4 au 2^{e} lancer »
   B_5 : « atteindre la case 5 au 2^{e} lancer ».

   On considère la variable aléatoire X_n ou n est un entier strictement supérieur à 1 telle que :
   - Si i désigne un entier strictement supérieur à 1, $X_n = i$ si la case n est dépassée au i^{e} lancer et ne l'était pas au $(i-1)^{e}$ lancer ;
   - $X_n = 1$ si la case n est dépassée au 1^{er} lancer.

2. **Cas où $n = 2$**
   2.1. Exprimer les évènements $\{X_2 = 1\}$ et $\{X_2 = 2\}$ à l'aide des évènements de probabilité non nulle définis dans la question précédente.
   2.2. Quelles sont les valeurs prises par X_2 ?
   2.3. Déterminer la loi de probabilité de X_2.
3. **Cas où $n = 3$**
   3.1. On note $(x_1\ , x_2)$ le couple correspondant aux deux résultats successifs donnés par le dé lors des deux premiers lancers. Enumérer tous les couples $(x_1\ , x_2)$ correspondant à la réalisation de l'évènement $\{X_3 = 2\}$.
   3.2. On note $(x_1\ , x_2,\ x_3)$ le triplet correspondant aux trois résultats successifs donnés par le dé lors des trois premiers lancers. Énumérer tous les triplets $(x_1\ , x_2,\ x_3)$ correspondant à la réalisation de l'évènement $\{X_3 = 3\}$.
   3.3. Déterminer la valeur minimale m_3 prise par X_3 ?
   3.4. Déterminer la valeur maximale M_3 prise par X_3 ?
   3.5. Determiner, la loi de probabilité de X_3.

4. **Cas où $n = 4$**
   4.1. Quelles sont les valeurs prises par X_4 ?
   4.2. On note $(x_1\ , x_2,\ x_3)$ le triplet correspondant aux trois résultats successifs donnés par le dé lors des trois premiers lancers. Énumérer tous les triplets $(x_1\ , x_2,\ x_3)$ correspondant à la réalisation de l'évènement $\{X_4 = 3\}$.
   4.3. Déterminer la loi de probabilité de X_4.

5. **Cas où n est un entier quelconque $(n > 1)$**
   5.1. Soit p un entier appartenant à l'intervalle $\left[\frac{n}{2}\ ;\ n\right]$.
   On désigne par $(x_1,\ \ x_2,\ ...,\ x_p)$ un p-uplet d'entiers tels que : ? pour tout i appartenant à $\{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}$, $x_i = 1$ ou $x_i = 2$.
   5.1.1. Soit q un entier compris entre 0 et p.
   Déterminer le nombre de p-uplets $(x_1,\ \ x_2,\ ...,\ x_p)$ comportant exactement q éléments égaux à 2.
   5.1.2. Soit $(x_1,\ \ x_2,\ ...,\ x_p)$ un p-uplet tel que $x_1 + x_2 + .. \cdots + x_p = n$.
   Exprimer en fonction de n et p le nombre q des éléments de ce p-uplet égaux à 2.
   5.1.3. En déduire, en fonction de n et p, le nombre de p-uplets $(x_1,\ \ x_2,\ ...,\ x_p)$ tels que $x_1 + x_2 + .. \cdots + x_p = n$
   5.2. Justifier que les valeurs prises par X_n appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{n}{2}\ ;\ n\right]$.
   5.3. Soit p un entier appartenant à l'intervalle $\left[\frac{n}{2}\ ;\ n\right]$ et $(x_1,\ \ x_2,\ ...,\ x_p)$ le p-uplet cor-

respondant aux p résultats successifs donnés par le dé lors des p premiers lancers.

5.3.1. Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- $X_n = p$
- $[(x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n]$ ou $(x_1 + x >_2 + \cdots + x_{p-1} = n - 1$ et $x_p = 2)]$

5.3.2. Calculer $P(X_n = p)$, probabilité de l'évènement $\{X_n = p\}$.

Partie II
Dans cette partie, le dé porte sur deux de ses faces le numéro 1, sur deux autres faces le numéro 2 et sur les deux dernières faces le numéro 3.

On considère la variable aléatoire, Y_n où n est un entier strictement supérieur à 1 telle que :

- Si i désigne un entier strictement supérieur à 1, $Y_n = i$ si la case n est dépassée au i^{e} lancer et ne l'était pas au $(i-1)^{\text{e}}$ lancer ;
- $Y_n = 1$ si la case n est dépassée au 1^{er} lancer.

1. L'opérateur lance le dé. Soit k un entier appartenant. à l'intervalle $[1\,;\,3]$.
   Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro k ?
2. Expliquer pourquoi les valeurs prises par Y_4 sont 2, 3 ou 4.
3. On note $(y_1,\ y_2)$ le couple correspondant aux deux résultats successifs donnés par le dé lors des deux premiers lancers. Énumérer tous les couples $(y_1,\ y_2)$ correspondant à la réalisation de l'événement $\{Y_4 = 2\}$.
4. On note $(y_1,\ \ y_2,\ \ y_3,\ y_4)$ le quadruplet correspondant aux quatre résultats successifs donnés par le dé lors des quatre premiers lancers. Énumérer tous les quadruplets $(y_1,\ \ y_2,\ \ y_3,\ y_4)$ correspondant à la réalisation de l'évènement $\{Y_4 = 4\}$.
5. Déterminer la loi de probabilité de Y_4.
6. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y_4.

Partie III
Dans cette partie, le dé porte sur deux de ses faces le numéro 1, sur deux autres faces le numéro 2 et sur les deux dernières faces le numéro 3.

On désigne par Z_n la variable aléatoire égale au numéro de la case atteinte au n^{e} lancer lorsque le joueur lance le dé n fois, n étant un entier strictement positif.
On note $P(Z_n = j)$ la probabilité de l'évènement $\{Z_n = j\}$ où j désigne un entier.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par $Z_1,\ Z_2$ et Z_3 puis les lois de probabilité de $Z_1,\ Z_2$ et Z_3.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Z_n dans le cas général.
3. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier compris entre 1 et 3.
   Interpréter l'évènement $\{Z_n - Z_{n-1} = k\}$ en terme de lancer du dé.
4. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et j un entier tel que l'évènement $\{Z_n = j\}$ soit non vide .
   Déterminer les valeurs de l'éntier j pour lesquelles chacune des probabilités suivantes $P(Z_{n-1} = j - 1)\,,\ P(Z_{n-1} = j - 2)\,,\ P(Z_{n-1} = j - 3)$ est non nulle.
5. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour tout entier j compris entre $n + 2$ et $3n - 2$, on a la relation suivante :
   $$\{Z_n = j\} = \bigcup_{k=1}^{3} \Big(\{Z_{n-1} = j - k\} \bigcap \{Z_n - Z_{n-1} = k\} \Big).$$
   Cette égalité est-elle encore vérifiée pour tout entier j compris entre n et $3n$?
6. En déduire l'existence de $a,\ b,\ c$ réels non nuls tels. que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout entier j compris entre n et $3n$ on ait la relation suivante :
   $$P(Z_n = j) = aP(Z_{n-1} = j - 1) + bP(Z_{n-1} = j - 2) + cP(Z_{n-1} = j - 3)\,.$$

7. On définit la matrice A, à coefficients réels et comportant 10 lignes et 30 colonnes, telle que :

$$\forall i \in \{1,\ 2,\ ...,\ l0\},\ \forall j \in \{1,\ 2,\ ...,\ 30\},\ a_{ij} = P\left(Z_i = j\right).$$

Écrire un algorithme permettant de calculer tous les coefficients de la matrice A.