∽ CAPES interne 2005 ∾

Problème 1

Dans tout le problème, on considère la fonction numérique f de variable réelle définie par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel, } f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \text{ réel fixé et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

I. Étude de la fonction f

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer les deux racines de l'équation $f(x) - x = 0$.

   Ces deux racines sont réelles et de signe contraire. On note ℓ_1 la racine négative et ℓ_2 la racine positive.
3. Montrer que, pour tout x réel :

   $$\begin{array}{lll} \text{si } x < \ell_1 & \text{alors} & f(x) < \ell_1\,; \\ \text{si } 1 < x < 2 & \text{alors} & 1 < f(x) < 2. \end{array}$$
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant notmnment figurer dans le tableau les valeurs de x égales à ℓ_1, ℓ_2, 1 et 2 ainsi que les valeurs correspondantes de $f(x)$.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f, notée $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal du plan d'unité graphique 2 cm.

   Préciser les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
6. Sur le même graphique, tracer la droite D d'équation $y = x$.

   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D ainsi que la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à D.

II. Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Sur le graphique précédent représenter à l'aide de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   a. lorsque $u_0 = -0,7$;
   b. lorsque $u_0 = 1,25$.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie λ, alors λ ne peut prendre que l'une des deux valeurs ℓ_1 ou ℓ_2.
3. **Dans cette question, on suppose : $u_0 < \ell_1$**
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < \ell_1$.
   b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   c. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.
4. **Dans cette question, on suppose : $u_0 \in]1\,;\,\ell_2[$**
   a. Démontrer que $\ell_2 < u_1 < 2$.

   Dans les questions qui suivent, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies pour tout entier naturel n, par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

b. Prouver que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 < v_n < \ell_2 \quad \text{et} \quad \ell_2 < w_n < 2.$$

d. Pour tout réel x, calculer $f \circ f(x)$.

e. Déterminer a et b réels tels que, pour tout réel x,

$$f \circ f(x) - x = \left(-x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + ax + b\right).$$

f. Déterminer les valeurs du réel x telles que $f \circ f(x) - x = 0$.
En déduire le signe de $f \circ f(x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]1~;~2[$.

g. En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$ pour n entier naturel, démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Montrer par la même méthode que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

h. Prouver que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et préciser la limite de chacune d'entre elles.

i. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Problème II

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Étant donné un réel strictement positif p $(p > 0)$, on désigne par D la droite d'équation $y = -\dfrac{p}{2}$ et par F le point de coordonnées $\left(0~;~\dfrac{p}{2}\right)$.
On considère l'ensemble des points M du plan équidistants du point F et de la droite D c'est-à- dire tels que MF = MH où H est le projeté orthogonal de M sur la droite D.
Par définition, cet ensemble est la parabole $\mathscr{P}$ de directrice D et de foyer F.

Pour répondre aux différentes questions, il est vivement conseillé de faire plusieurs schémas qui pourront servir de support aux divers raisonnements.

Question préliminaire

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur la droite D.
Vérifier que O appartient à la parabole $\mathscr{P}$ et que O est le milieu du segment [FK]. O est appelé sommet de la parabole.

Partie 1 Étude de quelques propriétés de la parabole et de ses tangentes

1. Soit M un point du plan de coordonnées $(x~;~y)$.

   a. Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de M sur la droite D.

   b. Déterminer une équation de l'ensemble des points M du plan tels que :

   $$\text{MF}^2 = \text{MH}^2.$$

   c. En déduire que la parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice D a pour équation $y = \dfrac{1}{2p}x^2$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

2. En choisissant 2 cm pour unité graphique dans le plan, tracer la parabole $\mathscr{P}_0$ correspondant au cas $p = \dfrac{1}{2}$. On placera sur le graphique le foyer F_0 et la directrice D_0 de la parabole.

   On revient maintenant au cas général où p est un réel strictement positif quelconque.

3. Soient M_0 un point de la parabole $\mathscr{P}$ d'abscisse x_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D.

a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}_0$ en M_0 à la parabole $\mathscr{P}$. Préciser la tangente au sommet de la parabole ; cette droite sera désignée par d.

b. Montrer que la droite $\mathscr{T}_0$ est la médiatrice du segment $[FH_0]$.

c. Soit T_0 le point d'intersection de la tangente $\mathscr{T}_0$ en M_0 à la parabole $\mathscr{P}$ avec la droite D.

Que représente la droite $\mathscr{T}_0$ pour l'angle $\widehat{H_0T_0F}$?

d. Montrer que les droites (FT_0) et (FM_0) sont perpendiculaires.

e. Soit f_0 le projeté orthogonal de F sur la tangente $\mathscr{T}_0$ en M_0 à $\mathscr{P}$.

Montrer que f_0 est un point de la droite d.

4. Soient A et B deux points de la parabole $\mathscr{P}$ d'abscisses respectives a et b avec $a < b$. Les tangentes en A et B à la parabole $\mathscr{P}$ se coupent au point Q.

a. Déterminer les coordonnées des points A, B et Q.

b. On désigne par I le milieu du segment [AB] et par E le point d'intersection de la droite (IQ) avec la parabole $\mathscr{P}$.

Montrer que les droites (IQ) et D sont perpendiculaires.

Déterminer les coordonnées du point E ; vérifier que E est milieu du segment [IQ].

c. Montrer que la droite qui passe par les points α et β milieux respectifs des segments [AQ] et [BQ] est tangente en E à la parabole $\mathscr{P}$.

Partie II

On s'intéresse dans cette partie II à la construction « à la règle et au compas » des tangentes à la parabole $\mathscr{P}$ issues d'un point donné du plan.

1. On appelle :

« intérieur de la parabole $\mathscr{P}$ » l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $y > \dfrac{1}{2p}x^2$,

« extérieur de la parabole $\mathscr{P}$ » l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $y < \dfrac{1}{2p}x^2$.

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les distances du point M au point F et du point M à la droite D pour que ce point M appartienne à l'intérieur (respectivement à l'extérieur) de la parabole $\mathscr{P}$J'

2. Soit Mo un point de la parabole $\mathscr{P}$, H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur la droite D et $\mathscr{T}_0$ la tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point M_0.

a. Montrer que pour tout point N de la droite $\mathscr{T}_0$, $NH_0 = NF$.

b. Montrer que tout point N de la droite $\mathscr{T}_0$, distinct de M_0, est extérieur à la parabole $\mathscr{P}$.

c. N désigne un point du plan.

Déterminer le nombre de tangentes à la parabole $\mathscr{P}$ passant par N selon la position de N dans le plan.

d. Dans le cas où il existe deux tangentes à la parabole $\mathscr{P}$ passant par le point N, déduire des questions précédentes une construction « à la règle et au compas » de ces tangentes.

Partie III On s'intéresse dans cette partie à la construction « à la règle et au compas » du ou des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice D avec une droite du plan, s'ils(s) existe(nt).

Le point F et la droite D étant donnés, on désigne par Δ une droite du plan.

1. Étude de deux cas particuliers

a. Construire le (ou les) point(s) d'intersection de la droite Δ et de la parabole $\mathscr{P}$ lorsque la droite Δ est perpendiculaire à la droite D.

b. Construire, s'ils existent, le (ou les) points) d'intersection de la droite Δ et de la parabole $\mathscr{P}$ lorsque la droite Δ est parallèle à la droite D.

2. Prouver que la parabole $\mathscr{P}$ est l'ensemble des centres des cercles passant par le point F et tangents à la droite D.

3. Etude du cas général

On suppose que la droite Δ n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à D. On note T le point d'intersection de la droite D et de la droite Δ.

a. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles centrés sur la droite Δ et tangents à la droite D. Montrer que le cercle $\mathscr{C}'$ est l'image du cercle $\mathscr{C}$ par une homothétie de centre T.

On suppose dans les deux questions suivantes qu'il existe au moins un point M de la parabole $\mathscr{P}$ appartenant à la droite Δ.

b. Montrer que tout cercle centré sur la droite Δ et tangent à la droite D coupe la droite (TF) en au moins un point.

c. Proposer une construction « à la règle et au compas » du ou des points d'intersection de la droite Δ avec la parabole $\mathscr{P}$ lorsque ces points existent.

Partie IV On se propose dans cette partie de déterminer, par deux méthodes différentes, l'aire d'un « segment » de parabole c'est à dire l'aire de la partie de plan délimitée par un arc de parabole et la corde qui le sous-tend

Dans cette partie, on considère toujours la parabole $\mathscr{P}$ de directrice D et de foyer F admettant dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ l'équation $y = \dfrac{1}{2p}x^2$.

A et B sont deux points de la parabole $\mathscr{P}$; les tangentes en A et B à $\mathscr{P}$ se coupent au point Q.

1. Méthode analytique On note a et b les abscisses respectives des points A et B avec $a < b$.

a. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABQ.

b. Déterminer une équation de la droite (AB).

c. Déterminer l'aire $\mathscr{A}'$ de la partie de plan délimitée par l'arc de parabole $\overset{\frown}{\text{AB}}$ et la corde [AB] en fonction de $\mathscr{A}$.

d. Quelle relation existe-t-il entre $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$?

2. Méthode géométrique

Les résultats des questions **1.** à **4.** sont utilisés par Archimède dans son ouvrage sur la « quadrature du segment de parabole ».

I désigne le milieu du segment [AB], E l'intersection de la droite (IQ) avec la parabole $\mathscr{P}$; α et β sont les milieux respectifs des segments [AQ] et [BQ].

On admet que tout point situé à l'intérieur ou sur les côtés du triangle AEB appartient à la partie de plan délimitée par l'arc de parabole $\overset{\frown}{AB}$ et la corde [AB] qui le sous-tend et que tout point de cette partie du plan est situé à l'intérieur ou sur les côtés du triangle ABQ.

a. Montrer que E est le milieu du segment $[\alpha\beta]$

b. Exprimer l'aire du triangle ABE en fonction de $\mathscr{A}$, aire du triangle ABQ et justifier l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\mathscr{A} \leqslant \mathscr{A}' \leqslant \mathscr{A}.$$

c. On désigne par K et K′ les milieux respectifs des segments [AE] et [BE] et, par L et L′, les points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ respectivement avec les droites (αK) et (βK′).

i. Exprimer l'aire des triangles AEL et EBL′ en fonction de $\mathscr{A}$, aire du triangle ABQ.

ii. Exprimer l'aire du triangle $\alpha\beta$Q à l'aide de $\mathscr{A}$.

iii. Démontrer la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\mathscr{A}\left(1+\frac{1}{4}\right) \leqslant \mathscr{A}' \leqslant \mathscr{A}\left(1-\frac{1}{4}\right).$$

d. En itérant n fois (n entier naturel strictement positif) le procédé décrit précédemment, déterminer un encadrement de l'aire $\mathscr{A}'$ de la partie de plan délimitée par l'arc de parabole $\overset{\frown}{\text{AB}}$ et la corde [AB] en fonction de $\mathscr{A}$.

e. Qu'obtient-on par passage à la limite ?

f. À quelle époque et où vivait Archimède ? Citer au moins un résultat scientifique et au moins une invention technologique attribués à Archimède.