

Problème n° 1

Les parties D et E de ce problème sont indépendantes des parties B et C

Notations

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

Pour m et n deux entiers naturels, $\llbracket m, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I , n fois dérivables et dont la dérivée n -ième est continue.

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour tout entier naturel n , $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient a_1, \dots, a_n des réels deux à deux distincts.

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

2. On considère l'application

$$F: \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ P & \rightarrow (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{cases}$$

- a. Montrer que F est une application linéaire.
 - b. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.
 - c. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.
3. Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
 - a. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses a_1, \dots, a_n .
 - b. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses a_1, \dots, a_n à l'aide des polynômes L_1, \dots, L_n et des valeurs de f en a_1, \dots, a_n .

Partie B : erreur d'interpolation

Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a, b])$ et $a_1 < \dots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a, b]$.

On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses a_1, \dots, a_n (on rappelle que $P \in R_{n-1}[X]$).

Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a, b]$.

1. Soit g une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .
 - a. Question de cours. Énoncer le théorème de Rolle.
 - b. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n -ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.
2. On fixe $c \in [a, b]$, distinct de a_1, \dots, a_n . On définit la fonction g_c sur $[a, b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - [f(c) - P(c)] \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

- a. Montrer que g_c s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.
 - b. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a, b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.
 - c. Soit h_c la fonction définie sur \mathbb{R} par $h_c(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{c - a_k}$.
En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n , donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.
3. a. Dédire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^n (c - a_k).$$

- b. Montrer que le résultat établi dans la question 3. a. reste vrai si c est égal à l'un des a_k .
- c. En déduire que $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a, b]} \prod_{k=1}^n |x - a_k|$.

Partie C : un exemple

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \begin{cases} [0; \pi] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow \sin(x). \end{cases}$$

1. Première méthode

On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

- a. Calculer P .
- b. En utilisant les résultats de la partie B, montrer que pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{x \in [0; \pi]} \frac{x \left(x - \frac{\pi}{2}\right) (x - \pi)}{6}.$$

c. En déduire que pour tout $x \in [0 ; \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3 \sqrt{3}}{216}.$$

2. Seconde méthode

On choisit un entier $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) d'interpolation de f aux deux points d'abscisses $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$.

On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{n}, \\ P_1(x) & \text{si } \frac{\pi}{n} \leq x < \frac{2\pi}{n}, \\ \vdots & \vdots \\ P_k(x) & \text{si } \frac{k\pi}{n} \leq x < \frac{(k+1)\pi}{n} \quad (k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket), \\ \vdots & \vdots \\ P_{n-1}(x) & \text{si } \frac{(n-1)\pi}{n} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

a. Calculer Q_1 et Q_2 . Tracer la courbe représentative de Q_2 .

b. Justifier que Q_n est continue sur $[0 ; \pi]$.

c. Soit $k \in [0 ; n-1]$. Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n} ; \frac{(k+1)\pi}{n} \right]$

$$\left| \left(x - \frac{k\pi}{n} \right) \left(x - \frac{(k+1)\pi}{n} \right) \right| \leq \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

d. Montrer que pour tout $x \in [0 ; \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

3. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure? Justifier la réponse.

Partie D : déterminant de Vandermonde

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a_1, \dots, a_n sont des nombres réels.

On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

1. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

2. Première méthode.

- a. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question A. 2. dans des bases bien choisies.
- b. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.
- c. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux?
- d. Conclure.

3. Seconde méthode

On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_{n-1}).$$

- a. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \dots + \lambda_1X + \lambda_0.$$

- b. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A . Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \dots + \lambda_0C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

- c. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

- d. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k).$$

- e. Conclure.

Partie E : application à la recherche de paraboles

On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3 .

1. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$.

Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées $(a_i; b_i)$ pour $1 \leq i \leq 3$.

- a. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α) , avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha = b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha = b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha = b_3. \end{cases}$$

- b. Montrer que si deux des points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.
- c. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.
- Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α) .
 - Exprimer α sous forme d'un quotient de déterminants.
 - Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - $\alpha = 0$.
 - $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$.
 - A_1, A_2 et A_3 sont alignés.
- d. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites $(A_1A_2), (A_2A_3)$ et (A_1A_3) n'est parallèle à D .
2. a. On suppose A_1, A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1, A_2 et A_3 .
- b. On suppose que A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1, A_2 et A_3 et préciser les directions de leurs axes.

Problème n° 2

Notations

Pour m et n deux entiers naturels, $\llbracket m, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, n fois dérivable et dont la dérivée n -ième est continue.

Partie A : calcul d'un déterminant et applications

On fixe un entier $n \geq 1$. On considère la matrice A_n à n lignes et n colonnes définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Le déterminant de cette matrice est noté D_n .
 - Calculer D_1, D_2 et D_3 .
 - Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.
 - En déduire une expression de D_n .

d. Montrer que pour entier $n \geq 1$, A_n est inversible.

2. Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

a. Montrer que $U = A_n^{-1}B$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = b_i,$$

à condition de poser $u_0 = u_{n+1} = 0$.

On suppose désormais que $U = A_n^{-1}B$.

b. On suppose dans cette question que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_i = 1$. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $u_i = \frac{i(n+1-i)}{2}$.

En déduire que $\max(u_1, \dots, u_n) \leq \frac{(n+1)^2}{8}$.

c. On suppose dans cette question que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_i \geq 0$.

i. Soit j le plus grand indice tel que $u_j = \min(u_1, \dots, u_n)$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $j = 1$ ou $j = n$.

ii. En déduire que toutes les composantes de U sont positives ou nulles.

d. On ne fait dans cette question aucune hypothèse sur le signe des b_i .

Soit $\beta = \max(|b_1|, \dots, |b_n|)$. On considère les vecteurs V et $W \in \mathbb{R}^n$ définis par

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = A_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \beta \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + B.$$

i. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_i \geq 0$ et $w_i \geq 0$.

ii. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v_i + w_i \leq \beta \frac{(n+1)^2}{4}$.

iii. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u_i = \frac{w_i - v_i}{2} \leq \frac{v_i + w_i}{2} \leq \beta \frac{(n+1)^2}{8}.$$

Partie B : inégalité de Taylor-Lagrange

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Soient deux nombres réels a et b dans l'intervalle I .

1. a. Justifier que $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$.

b. Montrer que si $n \geq 2$, alors $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t) dt$.

c. Montrer que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (b-t) dt.$$

Cette égalité est connue sous le nom de *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n* .

2. a. Justifier l'existence de $M_n = \max_{x \in [a; b]} |f^{(n)}(x)|$.

b. Démontrer que

$$\left| f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right| \leq M_n \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f*.

Partie C : un problème de condition aux bords

Soient a, b deux nombres réels, $g \in \mathcal{C}^2([0; 1])$, $M = \max_{x \in [0; 1]} |g''(x)|$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^4([0; 1])$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in [0; 1], f''(x) = g(x) \\ f(0) = a, f(1) = b \text{ (condition aux bords).} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de chercher une approximation des valeurs de f .

2. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à un ordre et sur des intervalles bien choisis, montrer que, pour tous nombres réels x et h tels que $0 \leq x-h \leq x \leq x+h \leq 1$,

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{Mh^2}{12}.$$

3. On fixe un entier $n \geq 1$ et d'après la question précédente, on convient d'approcher $f''(x)$ par

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2},$$

avec $h = \frac{1}{n+1}$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, on pose $x_i = ih$. Sachant que

$f'' = g$, $f(0) = a$ et $f(1) = b$, on approxime $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f(x_{n+1})$ par respectivement $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$ avec $u_0 = a$, $u_{n+1} = b$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2} = g(x_i).$$

a. La matrice A_n a été définie dans la partie A. Montrer qu'il existe un vecteur $B \in \mathbb{R}^n$, que l'on explicitera, tel que

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A_n^{-1} B.$$

b. Soit F le vecteur $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs absolues des composantes du

vecteur $A_n(F - U)$ sont majorées par $M \frac{h^4}{12}$.

- c. En utilisant les résultats de la partie A, donner une majoration des réels $|f(x_i) - u_i|$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ en fonction de n et M .
- d. Conclure.