

Épreuve 1

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants

Problème n° 1

Notations

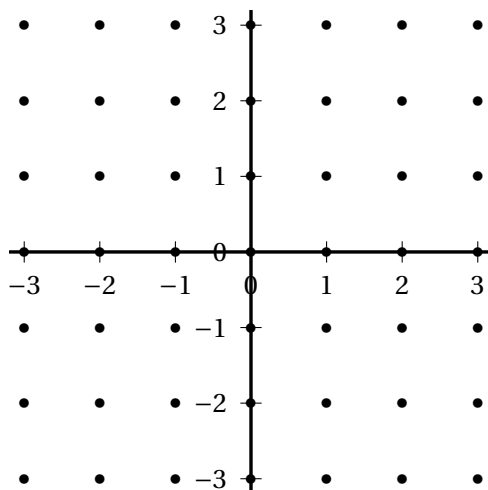
\mathbb{Z} désigne des entiers relatifs et \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

Le plan \mathbb{R}^2 est muni de sa structure usuelle de plan euclidien. La distance euclidienne sur \mathbb{R}^2 est notée d .

Les éléments de \mathbb{R}^2 sont représentés par des vecteurs colonnes à 2 lignes. On note

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On appelle réseau l'ensemble \mathbb{Z}^2 , inclus dans le plan \mathbb{R}^2 . On le note \mathcal{R} . Le schéma ci-dessous représente une partie du réseau \mathcal{R} .



Partie A : \mathbb{Z} -bases du réseau

Soient $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ une famille de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . On dit que \mathcal{B} est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} si :

- $e'_1, e'_2 \in \mathcal{R}$
- Tout élément X de \mathcal{R} s'écrit de façon unique $X = ae'_1 + be'_2$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

I. Soit $C = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Montrer que C est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} .

II. Soient $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

1. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $X = xe'_1 + ye'_2$ si, et seulement si,

$$X = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. On suppose dans cette question que (e'_1, e'_2) est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} .

a. Montrer que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.

b. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$x_1 e'_1 + y_1 e'_2 = e_1 \quad x_2 e'_1 + y_2 e'_2 = e_2.$$

c. Soit $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = I_2$.

d. En déduire que $\det(A) \in \{-1; 1\}$.

3. On suppose dans cette question que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ et que $\det(A) \in \{-1; 1\}$.

a. Montrer que A est une matrice inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

b. Montrer que (e'_1, e'_2) est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} .

4. Conclure.

III. Soit $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathcal{R} .

1. Montrer que si e'_1 est le premier vecteur d'une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} , alors a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

2. Réciproquement, montrer que si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe un vecteur e'_2 de \mathcal{R} tel que (e'_1, e'_2) soit une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} .

3. Donner une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} dont le premier vecteur est $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Partie B : transformations linéaires du réseau

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Sa matrice dans la base $C = (e_1, e_2)$ de \mathbb{R}^2 est notée A .

I. Montrer que $f(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ si, et seulement si, les coefficients de A sont tous des entiers relatifs.

II. On suppose dans cette question que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

1. Montrer que $\text{Im } f$ contient deux vecteurs linéairement indépendants.

2. En déduire que f est surjective, puis bijective.

3. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

4. Justifier que A est inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

5. Montrer que $\det(A) \in \{-1; 1\}$.

III. On suppose dans cette question que les coefficients de A sont des entiers relatifs et que $\det(A) \in \{-1; 1\}$.

1. En utilisant les résultats de la partie A., montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une \mathbb{Z} -base de \mathcal{R} .

2. En déduire que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. Conclure.

Partie C : isométries du réseau

Soit G l'ensemble des isométries affines f de \mathbb{R}^2 telles que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et soit G_0 l'ensemble des éléments f de G tels que $f(O) = O$.

I. Montrer que G , muni de la loi de composition des applications, est un groupe et que G_0 est un sous-groupe de G .

II. Soit $f \in G_0$. On remarque qu'alors f est une application linéaire et que les résultats de la partie B. s'appliquent. Soit A la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

1. Déterminer tous les points X de \mathcal{R} situés à la distance 1 de O .
2. Montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ appartiennent à l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Montrer que A appartient à l'ensemble

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

III. Soient s_1 et s_2 les applications linéaires de matrices respectives dans la base \mathcal{C}

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Décrire la nature géométrique de s_1 et s_2 .
2. Décrire la nature géométrique de $s_1 \circ s_2$ et de $s_2 \circ s_1$ et donner leurs matrices dans la base canonique.
3. Montrer que s_1 et s_2 sont des éléments de G_0 .
4. En déduire que, si la matrice dans la base canonique d'une application linéaire f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 est dans H , alors f est un élément de G_0 .

IV. Donner tous les éléments de G_0 .

V. Soit t la translation de vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $t \in G$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$.

VI. Soit $f \in G$ et soit t' la translation de vecteur $-f(O)$. Montrer que t' est un élément de G et que $g = t' \circ f$ est un élément de G_0 .

VII. Montrer que tout élément f de G s'écrit de façon unique $f = t \circ g$, avec t une translation de vecteur dans \mathcal{R} et g un élément de G_0 .

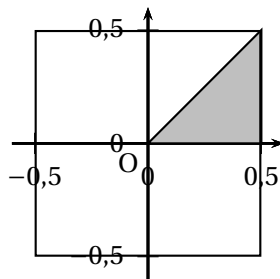
Partie D : un pavage du plan

On note T la surface délimitée par le triangle de \mathbb{R}^2 de sommets

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et on note C la surface délimitée par le carré de sommets

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**I.**

1. Justifier que

$$C = \bigcup_{g \in G_0} g(T).$$

2. Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux éléments distincts de G_0 , alors l'intersection des triangles $g_1(T)$ et $g_2(T)$ est, soit un segment, soit un point.

II. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on note t_X la translation de vecteur X .

1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{X \in \mathcal{R}} t_X(C).$$

2. Montrer que si X et Y sont deux éléments distincts de \mathcal{R} , alors l'intersection des carrés $t_X(C)$ et $t_Y(C)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

III.

1. Justifier que

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{f \in G_0} f(T).$$

2. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments distincts de G , alors l'intersection des triangles $f_1(T)$ et $f_2(T)$ est, soit un segment, soit un point, soit l'ensemble vide.

Partie E : un sous-groupe et deux frises

I. Soit k un entier relatif. On considère les applications

$$t_k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+k \\ y \end{pmatrix} \end{cases} \quad s_k : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+k \\ -y \end{pmatrix} \end{cases}$$

1. Quelle est la nature géométrique de t_k et s_k ?

2. Soit k et l deux entiers relatifs. Décrire $t_k \circ s_l$, $s_k \circ t_l$, $s_k \circ s_l$, et $t_k \circ t_l$.

II. Soit $H = \{t_k, s_k | k \in \mathbb{Z}\}$.

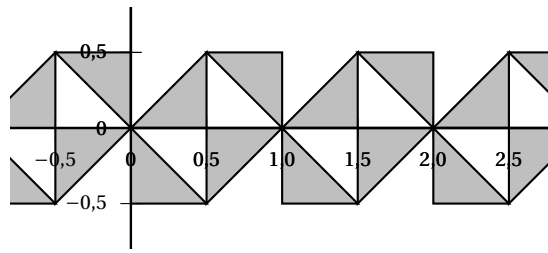
Montrer que H est un sous-groupe de G .

III. On considère l'ensemble

$$F = \bigcup_{f \in H} f(T),$$

où T est le triangle défini dans la section D. Décrire l'ensemble F .

IV. On considère la frise suivante :



Montrer que le groupe des isométries qui conservent cette frise est un sous-groupe de G qu'on décrira.

Problème n° 2

Notations

\mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels.

Dans ce problème, on cherche à déterminer les applications f définies sur $]0 ; +\infty[$ et à valeurs dans $]0 ; +\infty[$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(a) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y ,

$$f(xf(y)) = yf(x).$$

(b) f est bornée sur $]1 ; +\infty[$: il existe un nombre réel A tel que pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f(x) \leq A$.

I. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit φ une application définie sur I et à valeurs dans I . On dit que φ est une involution de I si pour tout nombre réel x dans I ,

$$\varphi(\varphi(x)) = x.$$

1. Donner un exemple d'involution de \mathbb{R} dans \mathbb{R} autre que l'identité.
2. Donner un exemple d'involution de $]0 ; +\infty[$ dans v autre que l'identité.
3. Montrer qu'une involution de I dans I est bijective.

II. Soit f une fonction vérifiant les conditions (a) et (b).

1. Soit deux nombres réels y_1, y_2 strictement positifs tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Montrer que $y_1 f(1) = y_2 f(1)$.
2. Montrer que f est injective.
3. Montrer que $f(f(1)) = f(1)$ puis que $f(1) = 1$.
4. Montrer que f est une involution de $]0 ; +\infty[$.
5. Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $f(ab) = f(a)f(b)$.
Indication : on pourra poser $y = f(b)$.

III. On note F l'ensemble des points fixes de f :

$$F = \{x \in]0 ; +\infty[, f(x) = x\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[, xf(x) \in F$.
2. Montrer que $1 \in F$.
3. Montrer que si x et y sont des éléments de F , alors xy et $\frac{x}{y}$ sont également des éléments de F .
4. Montrer que si x est un élément de F , alors pour tout entier naturel n , x^n est un élément de F .
5. Montrer que si x est un élément de F , alors $x \leq 1$.
Indication : on pourra considérer la suite $(x^n)_{n \geq 0}$.
6. Montrer que $F = \{1\}$.
7. En déduire f .

IV. Donner toutes les applications répondant au problème posé.