CAPES avec affectation à Mayotte Option mathématiques juin 2021 épreuve 2

Problème 1 : Vrai-Faux

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère un entier naturel n.
   Proposition : si n^2 est pair, alors n est pair.
2. **Proposition :** toute suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -1 \\ u_1 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & 4u_{n+1}-3u_n, \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0\end{array}\right.$
   Proposition : pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3^n - 2$.
4. **Proposition :** pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.
5. Soient a et b deux réels et f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. **Proposition :** si $a \leqslant b$ et si $f(a) \leqslant f(b)$, alors f est croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.
7. **Proposition :** toute fonction définie et continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intervalle I.
8. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a\,;\,b[$ et soit $x_0 \in]a\,;\,b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.
   Proposition : la fonction f admet un extremum en x_0.
9. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Proposition : si f est impaire, alors f' est paire.
10. Soit la fonction f définie sur $R\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
    Proposition : $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point A$(2\,;\,1)$.
11. Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+5}{x}\right)$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
    Proposition : la fonction f est dérivable en 0.
12. Soit une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[-2\,;\,5]$ telle que $f(-2) = -2$ et $f(5) = 3$.
    Proposition : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[-2\,;\,5]$.
13. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
    Proposition : si $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$, alors $f(x) \geqslant 1$ pour tout nombre réel $x \in [1\,;\,2]$.

14. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{\mathrm{k}}\right)$, on note (P) le plan d'équation $3x+2y-z-1=0$ et (D) la droite de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$ passant par le point A$(2\,;\,1\,;\,7)$.

Proposition : le plan (P) et la droite (D) ont un unique point commun.

15. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite (D) d'équation $x+y+3=0$ et le cercle (C) d'équation $x^2+y^2-2y-7=0$.

Proposition :la droite (D) est tangente au cercle (C).

16. Dans le plan complexe, on considère les points M, N, P d'affixes respectives $1+3\mathrm{i}$, $5+4\mathrm{i}$, $2-\mathrm{i}$.

Proposition : le triangle MNP est isocèle rectangle en M.

17. Une entreprise fabrique des boîtes en bois qui ne peuvent présenter que deux défauts : un défaut d'aspect et un défaut de dimensions.

À la suite d'un contrôle qualité de la fabrication, on constate que :

— 91 % des boîtes fabriquées n'ont pas de défaut d'aspect;

— parmi les boîtes n'ayant pas de défaut d'aspect, 96 % n'ont pas de défaut de dimensions;

— 3 % des boîtes fabriquées présentent les deux défauts.

On prélève au hasard une boîte dans la production.

On définit l'évènement A : « la boîte ne présente pas de défaut de dimensions ».

Proposition : la probabilité de l'évènement A est égale à $0,97$.

18. On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note X la variable aléatoire donnant le numéro inscrit sur la face supérieure du dé.

On suppose que le dé est truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au carré du numéro inscrit sur cette face.

Proposition : l'espérance de la variable aléatoire X est égale à $\dfrac{63}{13}$.

19. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
k ← 0
u ← 100
S ← 100
Tant que S < 2000
    k ← k + 1
    u ← u + 5
    S = S + u
Fin Tant que
Afficher S
```

Proposition : cet algorithme retourne la valeur 15.

Problème 2 : nombres entiers, décimaux, rationnels, irrationnels

Ce problème est constitué de 6 *parties indépendantes.*

I - Nombres décimaux

Fractions et nombres décimaux au cycle 3

Ressources MEN/DGESCO-IGEN, Eduscol, novembre 2016

> Lorsqu'on coupe une unité en un nombre entier de parts égales et qu'on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité, on obtient une fraction.
> (...)
> Lorsque le partage de l'unité se fait en un nombre de parts égal à une puissance de 10 (comme 10, 100, 1 000, ...), la fraction obtenue est appelée fraction décimale : $\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{547}{100}$, $\dfrac{3}{1\,000}$, etc.
> (...)
> Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

Justifier, en utilisant les définitions du document ressource, les affirmations suivantes :

1. Les nombres entiers sont des nombres décimaux.
2. $\dfrac{1}{65\,536}$ est un nombre décimal.
3. $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

II - Division euclidienne

Soit $(a\,;\,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer qu'il existe un entier naturel n tel que nb > a.
2. Soit $S = \{s \in \mathbb{N}, bs > a\}$. Comme S est non vide, on admet qu'il possède un plus petit élément t.
   En déduire l'existence d'un couple d'entiers naturels $(q\,;\,r)$ vérifiant $bq \leqslant a < b(q+1)$.
3. Démontrer l'unicité du couple d'entiers naturels $(q\,;\,r)$ vérifiant $a = bq+r$ et $0 \leqslant r < b$.

L'opération qui associe au couple $(a\,;\,b)$ le couple $(q\,;\,r)$ est la division euclidienne de a par b. a est appelé le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste de la division euclidienne.

4. On effectue une division euclidienne où le dividende est égal à 53 et le reste à 5.
   Quels peuvent être le diviseur et le quotient ?
5. On suppose $a > b$ et on divise a et b par leur différence $a - b$.
   Comparer les quotients et les restes obtenus.

III - Division euclidienne et nombres décimaux

Soit $(a\,;\,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in N$, q_n est le quotient et r_n le reste de la division euclidienne de $a \times 10^n$ par b.

1. **a.** Déterminer (q_0, r_0), (q_1, r_1), (q_2, r_2) et (q_3, r_3) pour $a = 22$, $b = 7$.

   b. Repérer les restes r_1 et r_2 dans la division posée « en potence » de 22 par 7 pour établir une relation entre r_1, r_2, q_1, q_2 et b.

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & 2 & 2 & & & & 7 \\ \hline
- & 2 & 1 & & & & 3{,}142 \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 0 & & & \\
 & - & & 7 & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 3 & 0 & & \\
 & & - & 2 & 8 & & \\ \cline{4-5}
 & & & & 2 & 0 & \\
 & & & - & 1 & 4 & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 6 &
\end{array}$$

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{q_n}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{q_n + 1}{10^n}.$$

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n - 10 \times r_{n-1} = \left(10 \times q_{n-1} - q_n\right) \times b$.

4. Démontrer qu'il existe un entier k tel que $r_k = 0$ si et seulement si $\dfrac{a}{b}$ est un nombre décimal.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n)$ est le quotient et $R(n)$ le reste de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b.

   a. Montrer que $0 \leqslant Q(n) \leqslant 9$.

   b. Exprimer q_n et r_n en fonction de q_{n-1}, $Q(n)$ et $R(n)$.

   c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{q_{n-1}}{10^{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{10^n} \quad \text{et} \quad \frac{q_n + 1}{10^n} \leqslant \frac{q_{n-1} + 1}{10^{n-1}}.$$

On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$q_0 \leqslant \frac{q_1}{10} \leqslant \ldots \leqslant \frac{q_{n-1}}{10^{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{q_n + 1}{10^n} \leqslant \frac{q_{n-1} + 1}{10^{n-1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{q_1 + 1}{10} \leqslant q_0 + 1.$$

6. Démontrer que s'il existe $r_n \neq 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_{n+k} = r_n$, alors $r_{n+k+1} = r_{n+1}$.
   r_0, r_1, r_2 ... sont les restes partiels de la division posée « en potence ».

7. Lorsque l'on poursuit la division « en potence » de 22 par 7, on obtient $r_6 = 1$. On a alors $r_6 = r_0$.
   Est-ce que l'existence d'un reste partiel non nul répété permet de conclure à la périodicité des décimales ?

IV - Approximation de $\sqrt{2}$

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
a_0 & = & \dfrac{3}{2} \\
a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}
\end{array}\right.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;2]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$.
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $\sqrt{2}\leqslant a_{n+1}<a_n\leqslant\dfrac{3}{2}$.
3. Démontrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(a_n-\sqrt{2}\right)$.
4. En déduire que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $0<a_n-\sqrt{2}\leqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
5. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Écrire un programme en Python permettant de donner, à partir de l'encadrement du IV-4, une valeur approchée à $10^{-10}10$ de $\sqrt{2}$ à l'aide de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

V - Irrationalité de $\sqrt{2}$

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, déterminer les chiffres des unités possibles pour n^2, puis les chiffres des unités possibles pour $2n^2$?

Pour démontrer par l'absurde l'irrationalité de $\sqrt{2}$, on suppose que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, avec $\dfrac{p}{q}$ fraction irréductible.

2. En raisonnant sur le chiffre des unités de p et de q, montrer que la seule possibilité est que le chiffre des unités de p soit 0 et que celui de q soit 0 ou 5.
3. En déduire que 2 est un nombre irrationnel.

VI - Approximation de $\ln 2$

Soit f la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on découpe l'intervalle $[1;\,2]$ en n intervalles réguliers et on construit n rectangles de côtés $\dfrac{1}{n}$ et $f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ pour k entier naturel compris entre 1 et n.
On note S_n la somme des aires de ces rectangles.

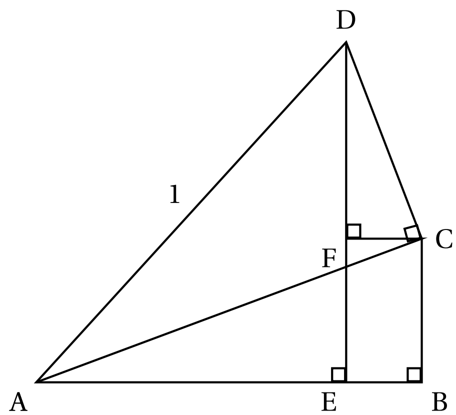
1. Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 1$,
$$Sn=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+cdots+\frac{1}{2n}.$$
2. Démontrer que la suite S_n est convergente.
3. Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 1$,
$$S_n\leqslant\int_1^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\leqslant S_n+\frac{1}{2n}.$$
4. En déduire un encadrement de S_n et déterminer sa limite.

Problème 3 : angles, relations métriques et variations de l'aire d'un triangle

---

I - Formules d'addition

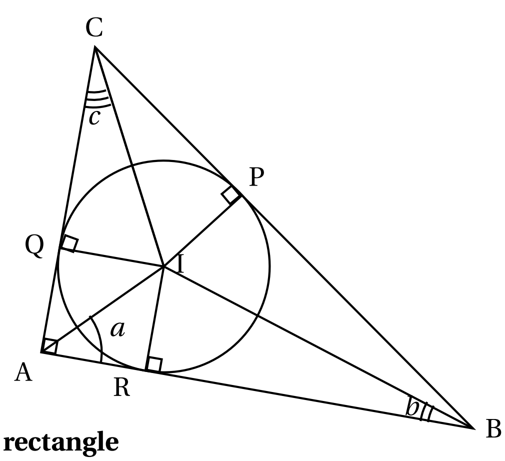
On considère la configuration du plan correspondant à la figure ci-contre.



1. Justifier que les angles $\widehat{\text{CDE}}$ et $\widehat{\text{BAC}}$ ont même mesure.
2. En remarquant que $\sin(a+b) = \text{EF} + \text{DF}$, établir la relation
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$
3. On admettra que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
En déduire la relation :
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$
4. Exprimer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan a$, puis calculer la valeur exacte de $\tan \dfrac{\pi}{8}$.

II - Relations métriques

Soit un triangle ABC, de périmètre $2p$, où p est un nombre réel strictement positif donné.
I est le centre et r le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.
P, Q et R sont les projetés orthogonaux de I respectivement sur les droites (BC),(AC) et (AB).
On note $a = \widehat{\text{BAI}}$, $b = \widehat{\text{CBI}}$ et $c = \widehat{\text{ABI}}$.



1. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale $p \times r$.
2. Démontrer que
$p = r\left(\dfrac{1}{\tan a} + \dfrac{1}{\tan b} + \dfrac{1}{\tan c}\right)$.
3. On suppose le triangle ABC rectangle en A.
   a. Exprimer $\tan c$ en fonction de $\tan b$.
   b. En déduire que $r = p\dfrac{\tan b(1-\tan b)}{1+\tan b}$.

III - Variations du rayon et de l'aire du triangle rectangle

1. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $]0\,;1[$ par
$$f(x) = p\frac{x(1-x)}{1+x},$$
où p est un nombre réel strictement positif.
Dresser le tableau de variations de f.
2. Soit g la fonction de la variable réelle b définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right[$ par $g(b) = f(\tan b)$.
Étudier le sens de variation de la fonction g.

3. Pour quelle mesure b de l'angle, le rayon du cercle inscrit dans le triangle rectangle ABC, de périmètre $2p$ donné, est-il maximal ?
4. Exprimer, en fonction de b,l'aire $S(b)$ du triangle ABC.
5. Pour quelle mesure b de l'angle, l'aire du triangle rectangle ABC, de périmètre $2p$ donné, est-elle maximale ?