Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

CAPES avec affectation à Mayotte Option mathématiques juin 2021 épreuve 1

Exercice 1

Les deux parties sont indépendantes.

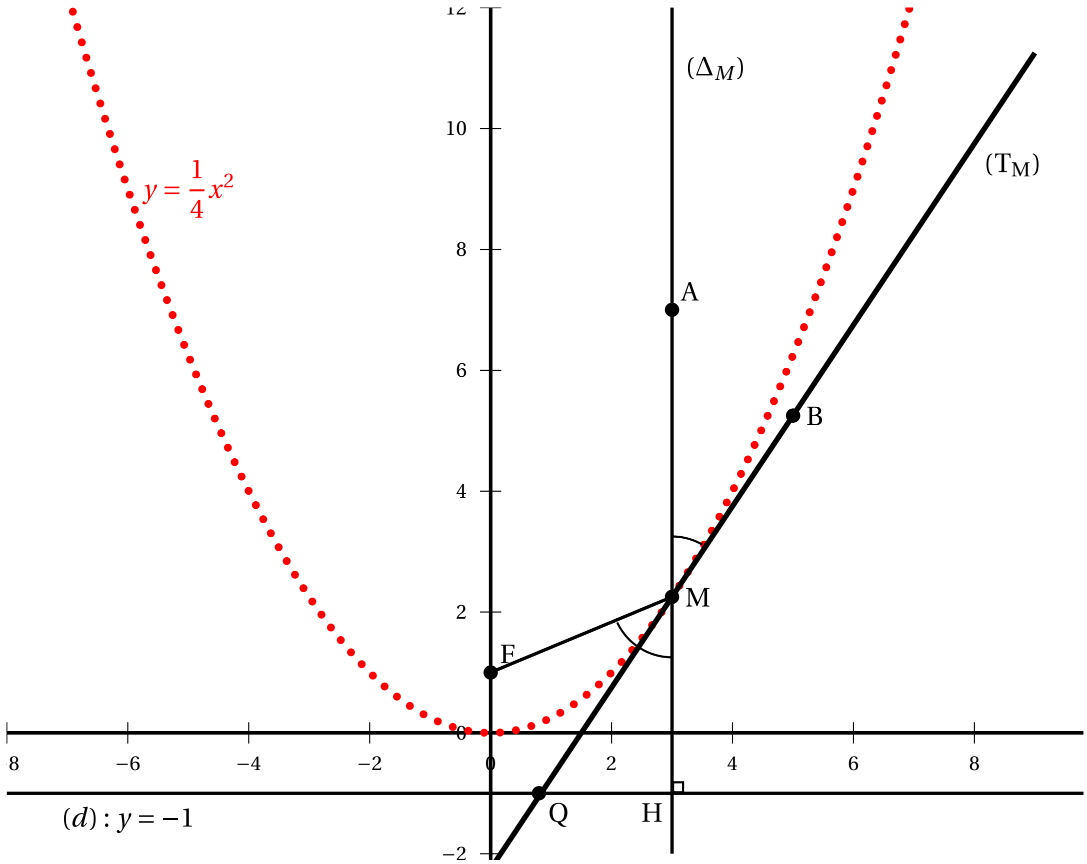
Partie A

Dans un repère orthonormé du plan, on considère le point F(0 ; 1) et la droite (d) ayant pour équation $y = -1$.

1. Démontrer que l'ensemble des points équidistants du point F et de la droite (d) est la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y = \dfrac{1}{4}x^2$.

Soit M un point sur la parabole d'équation $y = \dfrac{1}{4}x^2$ d'abscisse non nulle. On note :

- H son projeté orthogonal sur la droite (d).
- (Δ_M) la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par M.
- A un point sur la droite (Δ_M) distinct de M tel que le point M appartienne au segment [AH].
- $(\mathrm{T_M})$ la tangente à la parabole $(\mathscr{P})$ au point M.
- Q le point d'intersection des droites (d) et $(\mathrm{T_M})$.
- B un point sur la droite $(\mathrm{T_M})$ distinct de M tel que le point M appartienne au segment [BQ].



2. **a.** Expliquer pourquoi les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{HMQ}$ sont égaux.

   b. Démontrer que FQ = QH.

   c. En déduire que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{FMQ}$ sont égaux.

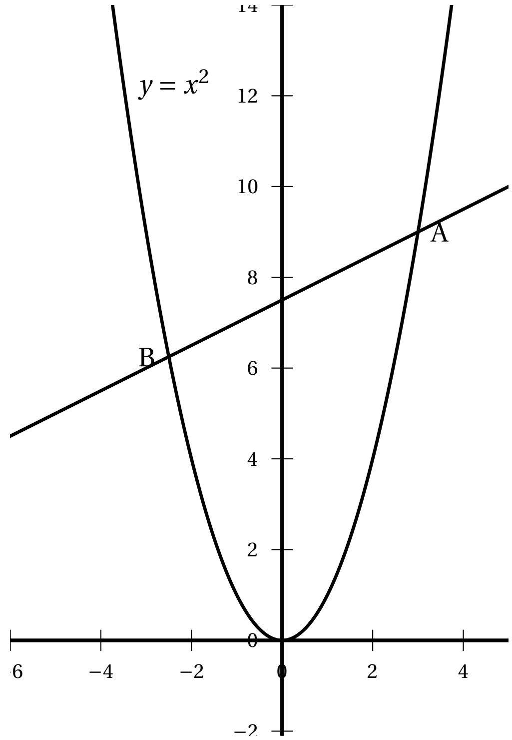
   d. Citer une application physique de cette propriété.

Partie B

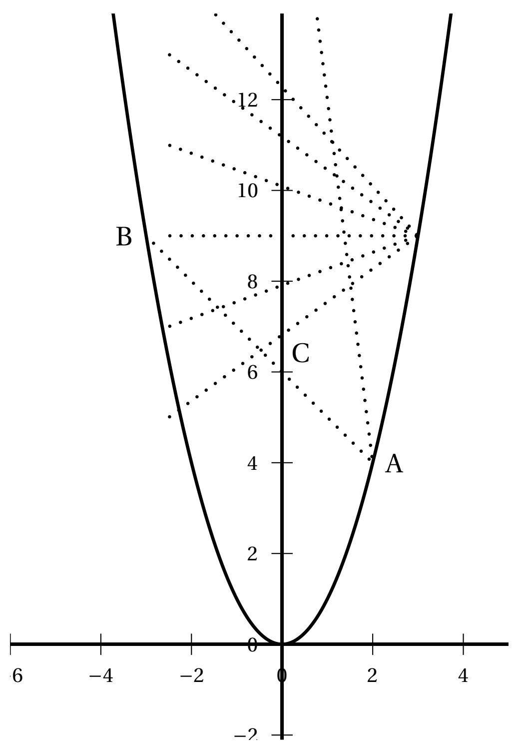
Dans un repère du plan, on considère la parabole d'équation

$$y = x^2.$$

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.
On note A et B les points de la parabole d'abscisse respectives et $-b$ et C le point d'intersection de la droite (AB) et de l'axe des ordonnées.



1. Démontrer que le point C a pour ordonnée ab.



3. Conformément à la figure ci-contre, on considère tous les points C obtenus en faisant varier les réels a et b de la question précédente dans $\mathbb{N}* \setminus \{1\}$.

Quelle propriété vérifie l'ordonnée des points de l'axe des ordonnées de coordonnées entières qui ne sont pas atteints par cette construction ?

Exercice 2

Partie A : conjecture

Soit a un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & (n+1)u_n - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$ où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Écrire, en langage Python, un algorithme « suite » qui calcule et affiche les quinze premiers termes de la suite (u_n) en fonction du réel a.
2. Le tableau ci-dessous présente l'exécution d'un tel algorithme pour différentes valeurs de a.

   Conjecturer, selon la valeur de a, la nature de la suite (u_n).

>>> suite(1)		>>> suite(0.5)		>>> suite(1-exp(- 1)))	
0	1	0	0.5	0	0.6321205588285577
1	0.6321205588285577	1	0.13212055882855767	1	0.26424111765711533
2	0.896361676485673	2	-0.103638323514327	2	0.16060279414278833
3	2.3212055882855767	3	-0.67879441171442334	3	0.11392894125692266
4	8.916942911970864	4	-3.0830570880291357	4	0.08783632385624829
5	44.21683511868288	5	-15.783164881317122	5	0.07130217810979911
6	264.93313127092586	6	-95.06686872907417	6	0.059933627487352314
7	1854.1640394553094	7	-665.8359605446907	7	0.05165595124002387
8	14832.944436201304	8	-5327.055563798697	8	0.045368168748748605
9	133496.13204637056	9	-47943.867953629444	9	0.04043407756729511
10	1334960.9525842643	10	-479439.0474157356	10	0.03646133450150879
11	14684570.110547466	11	-5273829.889452533	11	0.033195238345154365
12	176214840.95869014	12	-63285959.04130984	12	0.03046341897041005
13	2290792932.0950923	13	-822717467.9049073	13	0.028145005443888316
14	32071101048.963413	14	-11518044551.036583	14	0.026150635042994086

Partie B : cas où $a = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Calculer v_0.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = (n+1)v_n - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
2. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0.

   b. En déduire que la suite (v_n) est convergente.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$:

   $$\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1.$$

   b. En déduire que pour tout entier naturel n :

   $$0 \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

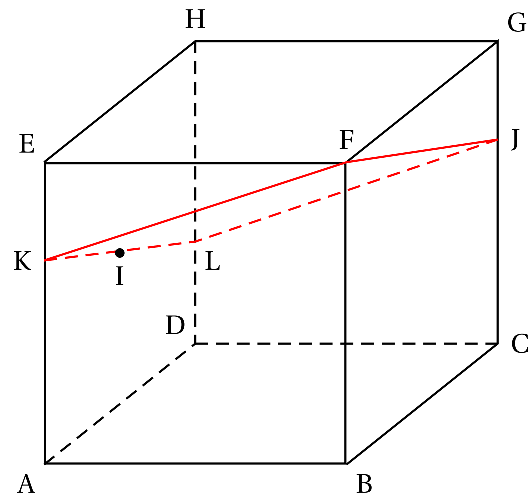
c. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Partie C : cas général

1. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n = v_n + n!\,(u_0 - v_0)$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) selon la valeur du réel a.

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube.
I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].
Il existe donc un réel $\alpha \in [0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = \alpha\overrightarrow{CG}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH)
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.



Partie A

1. Démontrer que les coordonnées des points K et L sont $K\left(0\,;\,0\,;\,1-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ et $L\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le quadrilatère FJLK est-il

2. un parallélogramme ?
3. un losange ?
4. un rectangle ?
5. un carré ?

Partie B

Dans cette partie $\alpha = \dfrac{2}{3}$.

1. Déterminer les coordonnées du point N projeté orthogonal de H sur le plan (FKJ) et en déduire que $HN = \dfrac{2}{\sqrt{11}}$.
2. En déduire le volume de la pyramide HFJLK en unité de volume.

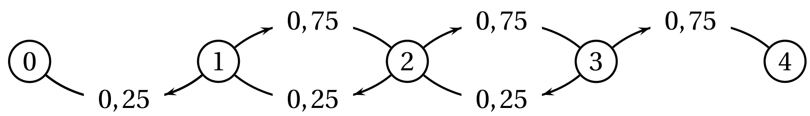
Exercice 4

Modélisation de la trajectoire d'une particule

On modélise le déplacement d'une particule de la façon suivante

On considère que la particule emprunte un chemin comptant cinq positions : 0; 1; 2; 3 et 4.

- À l'instant initial, la particule se trouve sur l'une des positions.
- À chaque instant, elle avance d'une position avec la probabilité $\frac{3}{4}$ ou elle recule d'une position avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Le processus s'arrête lorsque la particule a atteint les positions 0 ou 4.



Pour $n \in \{0~;~1~;~2~;~3~;~4\}$, on note p_n la probabilité que la particule, partant de la position n à l'instant initial s'arrête en position 0.

Partie A : conjectures et premiers résultats

1. **a.** Démontrer que $p_1 \geqslant \frac{1}{4}$.

   b. Démontrer que $p_2 \geqslant \frac{1}{16}$.

   c. Démontrer que $p_3 \geqslant \frac{1}{64}$.

2. On a obtenu la copie d'écran ci-dessous en utilisant le langage Python.

```
from math import *
import random

def marche(position_initiale) :
   position=position_initiale
   while position!=0 and position!=4 :
      hasard=random.random()
      if hasard < 3/4 :
         position=position+1
      else
         position=position-1
   return(position)

def freq_zero(nb_marches,position_initiale) :
   compteur=0
   for k in range (nb_marches) :
      position=marche(position_initiale)
      if position==0 :
         compteur=compteur+1
   frequence=compteur/nb_marches
   return(frequence)

```

```
Shell
>>>
>>> freq_zero(1000000,1)
0.324773

>>> freq_zero(1000000,2)
0.099997
>>> freq_zero(1000000,3)
0.024848
```

a. Expliquer le rôle des deux fonctions « marche »et « freq_zero ».

b. Conjecturer les valeurs de p_n pour $n \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

Partie B

1. Justifier que $p_0 = 1$ et que $p_4 = 0$.

2. Justifier que pour $n \in \{1 ; 2 ; 3 : p_n = \frac{3}{4}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_{n-1}$.

3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n. On pourra résoudre un système.

Partie C : plusieurs particules

On admet que $p_3 = 0,025$.

1. 100 particules sont en position 3 à l'instant initial. On considère que le comportement de chacune des particules est indépendant.

Quelle est la probabilité qu'au moins trois d'entre elles s'arrêtent en position zéro ?

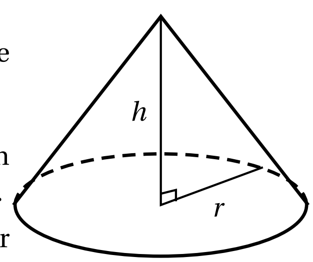
2. Combien faut-il de particules, dont le comportement est indépendant, en position 3 à l'instant initial pour être sûr, au risque 1 %, qu'au moins une d'entre elles s'arrête en position zéro ?

Exercice 5

On souhaite déterminer le rayon et la hauteur qui minimisent l'aire de la surface latérale du cône droit pour un volume donné.

On considère un cône droit dont la base est un disque.

On note h sa hauteur, r son rayon, A l'aire de sa surface latérale et V son volume.



1. **a.** Rappeler la formule donnant le volume V en fonction de r et de h. Aucune démonstration n'est demandée.

b. Tracer un schéma du patron du cône et démontrer que :

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}.$$

3. Dans cette question, le volume est fixé à 250 cm^3.

Quelles formules doit-on inscrire dans les cellules A3, B2 et C2 pour construire la feuille de tableur ci-dessous en utilisant la recopie vers le bas ?

	A	B	C	D	E	F
1	Rayon	Hauteur	Aire			
2	1	238,732415	750,00658			
3	2	59,683104	375,210492			
4	3	26,525824	251,593796			
5	4	14,920776	194,120758			
6	5	9,549297	169,317757		Volume	250
7	6	6,631456	168,570482			
8	7	4,87209	187,554024			
9	8	3,730194	221,844455			
10	9	2,947314	267,766538			
11	10	2,387324	322,987684			
12	11	1,972995	386,198962			
13	12	1,657864	456,686289			

4. Soit A la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui au rayon r associe l'aire A de la surface latérale.

a. Démontrer que

$$A(r) = \frac{\sqrt{\pi^2 r^6 + 9V^2}}{r}.$$

b. Déterminer en fonction de V le rayon r qui rend minimale l'aire de la surface latérale.

c. Calculer une valeur approchée au mm près du rayon et de la hauteur qui minimisent l'aire de la surface latérale d'un cône de 250 cm^3.