∽ CAPES avec affectation à Mayotte Option mathématiques ∽
3 avril 2023 épreuve 1

Problème 1 : suite d'intégrales

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$I_n = \int_2^3 (x-2)^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).
3. La suite (I_n) est-elle minorée ?
4. Établir la convergence de la suite (I_n).
5. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   En déduire les valeurs exactes de I_1 puis de I_2.
6. Soit p un entier naturel non nul.
   Écrire un algorithme, en langage Python, permettant de calculer I_p.

Problème 2 : complexes et médiatrices

Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$orthonormé direct.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}A = 1$ et $z_{\mathrm{B}} = 2$.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et de rayon 1. T est la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.
Pour tout nombre réel θ de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$, on pose $z_\theta = (\cos\theta + 1) + \mathrm{i}\sin\theta$.
On note M_θ le point du plan d'affixe z_θ.

Partie A

1. Donner une équation de la droite T.
2. Justifier que l'ensemble des points M_θ lorsque θ varie sur $]-\pi\,;\,\pi]$est le cercle e$\mathscr{C}$.
3. Que peut-on dire du point M_θ lorsque e $= 0$?
4. Les droites $(\mathrm{O}M_\theta)$ et T sont-elles sécantes quel que soit le nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$?
5. Soit θ un réel non nul appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
   Déterminer l'affixe du point N appartenant au cercle $\mathscr{C}$ tel que le triangle $\mathrm{O}M_\theta N$ soit rectangle en O.

Partie B- $\boldsymbol{\theta = \dfrac{2\pi}{3}}$. On note M le point $\mathbf{M}_{\frac{2\pi}{3}}$

1. Vérifier que l'affixe du point N défini dans la question A.5 est $z_N = \dfrac{3}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice D du segment [MN].
3. K est le point d'intersection des droites (OM) et T.
   L est le point d'intersection des droites (ON) et T (on admet son existence).
   Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [KL].
4. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice D' du segment [KL].
5. Démontrer qu'il existe un point J équidistant des points N, M, K et L.
   On déterminera ses coordonnées.

Problème 3 : géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath},~\overrightarrow{\mathrm{k}}\right)$.
On considère les points

$$\mathrm{A}(-1~;~2~;~4),~\mathrm{B}(1~;~1~;~3),~\mathrm{C}(-1~;~3~;~3)\text{ et }\mathrm{D}(3~;~3~;~5).$$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Démontrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ABC).
3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
4. Déterminer une équation du plan (ACD).
5. $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ACD).
   Δ est la droite passant par B de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
   Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite Δ et du plan (ACD).
6. Déterminer l'aire du triangle ACD.

Problème 4 : équation fonctionnelle

On s'intéresse dans ce problème aux fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E) :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ f(x+y)\times f(x-y) = (f(x))^2 \times (f(y))^2 \quad \text{(E)}.$$

Partie A - Existence d'une fonction satisfaisant la propriété (E)

Soit m un nombre réel. On note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = \mathrm{e}^{mx^2}.$$

Justifier que la fonction f_m vérifie la propriété (E).

Partie B - Propriétés des fonctions satisfaisant la propriété (E)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 = x^4$.

2. En déduire que, si la fonction f satisfait la propriété (E), alors $f(0) \in \{-1 ; 0 ; 1\}$.
3. Démontrer que, si f est une fonction s'annulant en 0 et satisfaisant la propriété (E), alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f une fonction satisfaisant la propriété (E).

   Démontrer que, s'il existe un nombre réel non nul a tel que $f(a) = 0$, alors, pour tout entier naturel n, $f\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 0$.

   On admet que l'on peut en déduire que f est la fonction nulle.
5. On suppose maintenant que f vérifie la propriété (E) et que f n'est pas la fonction nulle.

   Déduire de la question précédente que la fonction f est soit strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit strictement négative sur $\mathbb{R}$.

Partie C - Identification des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la propriété (E)

Soit f une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété (E).
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln[f(x)]$.

1. Démontrer, à l'aide de la question 2. de la partie B, que $g(0) = 0$.
2. Vérifier que, pour tous réels x et y : $g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$.
3. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence et de la question précédente, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $g(n) = g(1) \times n^2$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $g(nx) = n^2 g(x)$.

   Démontrer que, pour tout entier naturel p non nul : $g\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{g(1)}{p^2}$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p non nul :

   $$g\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n^2}{p^2} g(1).$$
5. On admet que, pour tout nombre réel x, $g(x) = g(1) \times x^2$.

   En déduire l'expression des fonctions f définies, continues et strictement positives sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la propriété (E).