Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

CAPES avec affectation à Mayotte
11 avril 2022 épreuve 1

Problème 1 : un pentagone non régulier

A - Construction d'un pentagone paveur

Certains trottoirs de la ville du Caire sont pavés de pièces pentagonales non régulières. On s'intéresse à celles dont les cinq côtés ont même longueur.

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points

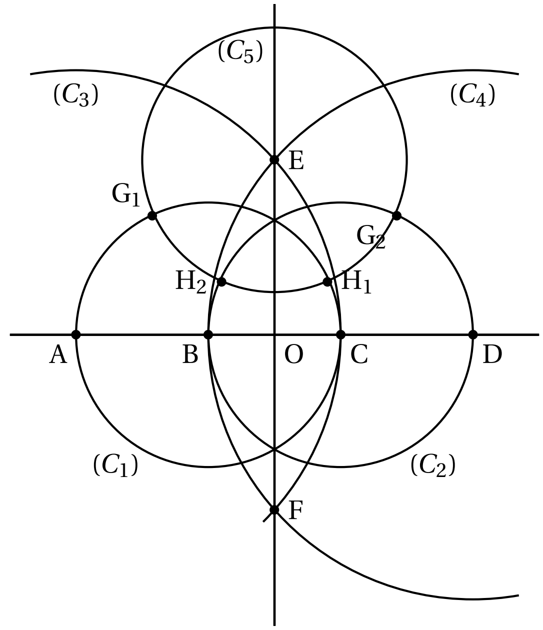
$$\mathrm{A}\left(-\frac{3}{2}\ ;\ 0\right),\quad \mathrm{B}(-2\ ;\ 0),\quad \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right) \text{ et } \mathrm{D}\left(\frac{3}{2}\ ;\ 0\right)$$

.

On construit :

- (C_1) le cercle de centre B et de rayon 1 ;
- (C_2) le cercle de centre C et de rayon 1 ;
- (C_3) le cercle de centre A et de rayon 2 ;
- (C_4) le cercle de centre D et de rayon 2 ;
- E et F les points d'intersection des cercles (C_3) et (C_4) tels que E est d'ordonnée positive ;
- (C_5) le cercle de centre E et de rayon 1 ;
- G_1 et H_1 les points d'intersection de (C_5) avec (C_1) tels que G_1 est d'abscisse négative ;
- G_2 et H_2 les points d'intersection de (C_5) avec (C_2) tels que G_2 est d'abscisse positive.

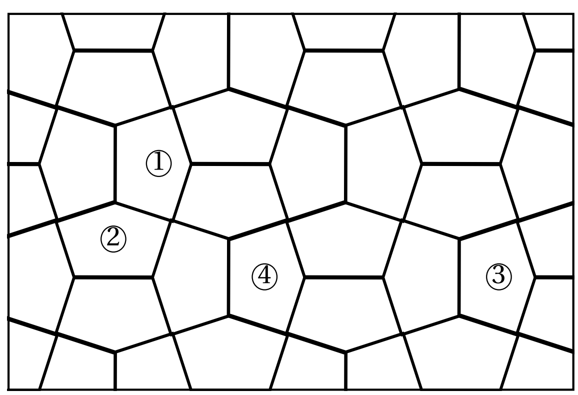
L'élément de pavage étudié est le pentagone $\mathrm{BCG_2EG_1}$.



1. Démontrer que E a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.
2. Démontrer que l'angle BGE est droit.
3. Déterminer une équation cartésienne de chacun des cercles (C_1) et (C_5) puis justifier que le point G_1 a pour coordonnées $\left(\dfrac{-\sqrt{7}-4}{4}\,;\,\dfrac{\sqrt{7}+1}{4}\right)$.

B - Pavage

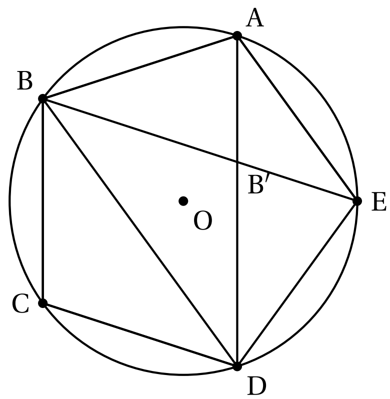
On admet que le pentagone construit dans la partie A permet de paver le plan. Quatre copies du motif pentagonal numérotées ①, ②, ③ et ① ont été mises en évidence sur la figure ci-dessous.



1. Déterminer une transformation du plan permettant de construire le pentagone ② à partir du pentagone ①. En préciser les éléments caractéristiques.
2. Déterminer de même une transformation du plan permettant de construire le pentagone ③ à partir du pentagone ①.
3. Déterminer de même une transformation du plan permettant de construire le pentagone ④ à partir du pentagone ①.

Problème 2 : le pentagone régulier

A - Triangle et nombre d'or



ABCDE est un pentagone régulier de côté 1, inscrit dans un cercle de centre O.
On rappelle que les côtés sont tous de même longueur, et que les angles aux sommets formés par les côtés du pentagone sont de même mesure. 1 - 2 - 3 - 4 - - 3n

1. Justifier que l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ mesure $\dfrac{3\pi}{5}$ radians.
2. Déterminer une mesure de chacun des angles du triangle ABD.
3. Soit B′ le point d'intersection des segments [BE] et [AD].
   Démontrer que les triangles ABB′ et ABD sont semblables.
4. On appelle φ la longueur du segment [AD].
   a. Justifier que $\text{AB}' = \varphi - 1$, puis exprimer les longueurs des côtés des triangles ABB′ et ABD en fonction de φ.
   b. Démontrer que φ est solution de l'équation [1] : $X^2 - X - 1 = 0$.
   c. En déduire la valeur de φ.

B-Une approche avec les nombres complexes

Soit $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} \in \mathbb{C}$.
Dans le plan complexe, les sommets d'un pentagone régulier sont les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 d'affixes respectives $1, \omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4.
On pose $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$

1. Démontrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, puis que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$.
   En déduire que α et β sont les solutions de l'équation [2] : $X^2 + X - 1 = 0$.
2. Justifier que $\omega^4 = \dfrac{1}{\omega}$ et que $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$.
3. En déduire que $\alpha = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ en résolvant l'équation [2].

4. On considère les points B d'affixe i et C d'affixe $-\dfrac{1}{2}$.
   Le cercle de centre C passant par B coupe l'axe des réels en un point M d'abscisse positive et un point N d'abscisse négative.
   a. Démontrer que les points M et N ont pour affixes respectives α et β.
   b. En déduire que la médiatrice du segment [OM] coupe le cercle unité en les points A_1 et A_2.
   c. Achever la construction du pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$.

Problème 3 : urne de Polya

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes.

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on réalise n fois l'opération :

- tirer au hasard une boule et regarder sa couleur ;
- remettre dans l'urne la boule et ajouter une boule de sa couleur.

On note :

- V_k l'évènement « la k- ième boule tirée est verte« , pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
- X_n la variable aléatoire comptabilisant le nombre de boules vertes extraites à l'issue des n opérations.

A - Étude du cas n = 3

Dans cette partie, l'urne contient au départ une boule verte et trois boules blanches.

1. Donner la probabilité de l'évènement V_1 « la première boule tirée est verte ».
   Calculer $P_{V_1}(V_2)$ et $P_{\overline{V_1}}(V_2)$.
2. Calculer $P(V_1 \cap V_2)$ puis montrer que $P(V_2) = \dfrac{1}{4}$.
3. Calculer $P_{V_2}(V_1)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte du problème.
4. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_3 ?
5. Donner la loi de probabilité de X_3.
6. Déterminer $\mathrm{E}(X_3)$ et $V(X_3)$.

B - Étude de la composition de l'urne au bout de *n* opérations

L'urne contient au départ une boule verte et une boule blanche.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on réalise n fois l'opération « tirage » et « ajout d'une boule dans l'urne ».

1. Démontrer que pour tout entier k compris entre 0 et n, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
2. Reconnaitre la loi de probabilité de X_n et déterminer son espérance et sa variance.
3. Compléter et recopier les lignes 6 et 8 du script de la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie la proportion de boules vertes à l'issue d'une simulation de n opérations.

```
from random import
def proportion(n) :

    (a, b) = ......
    for i in range (n) :
        if random() < ......
            a=a+1
        else :
            b=b+1
    return (a/(a+b))
```

La fonction random() retourne un nombre pseudo aléatoire strictement compris entre 0 et 1.