CAPES Concours externe Option mathématiques session 1er avril 2019 Épreuve 1

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Notations.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Pour $z \in \mathbb{C}$, on note le conjugué de z par $\overline{z}$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients complexes. L'ensemble des matrices inversibles pour la multiplication matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Partie A : rotations et translations du plan

On se place dans un plan euclidien orienté P, muni d'un repère orthonormé direct.
Notations.
Soit θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π et D un point de P. La rotation de centre Ω et d'angle θ est notée $r_{\Omega,\theta}$.
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de P. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée $t_{\overrightarrow{u}}$.

I. Question de cours. Soient θ un nombre réel non congru à 0 modulo 2π, Ω un point de P et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de P. L'affixe de Ω est notée ω et l'affixe de $\overrightarrow{u}$ est notée $z_{\overrightarrow{u}}$. Soit M un point de P, d'affixe z. Déterminer l'affixe z' de l'image de M par $t_{\overrightarrow{u}}$.
Déterminer l'affixe z'' de l'image de M par $r_{\Omega,\theta}$.

II. Soient a un nombre complexe de module 1 et b un nombre complexe. On considère l'application f de P dans lui-même qui a tout point d'affixe z associe le point d'affixe $az + b$.

1. Montrer que si $a = 1$, alors f est une translation dont on précisera le vecteur.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 1$.
   - **a.** Montrer que f possède un unique point fixe Ω dont on précisera l'affixe ω.
   - **b.** Montrer que l'image par f du point M d'affixe z est le point d'affixe $a(z - \omega) + \omega$.
   - **c.** Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

III. Soient a_1 et a_2 deux nombres complexes de module 1 et b_1 et b_2 deux nombres complexes.
On considère l'application f_1, respectivement f_2, de P dans lui-même, envoyant le point d'affixe z sur le point d'affixe $a_1 z + b_1$, respectivement $a_2 z + b_2$.

1. Soit $f = f_1 \circ f_2$. Pour tout point M d'affixe z, calculer l'affixe de $f(M)$.

2. Montrer que f est une translation ou une rotation.

IV. Soient r_1 la rotation de centre d'affixe 1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre d'affixe 0 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$.

V. On considère l'ensemble G formé des rotations de P et des translations de P. Montrer que G est un groupe pour une loi que l'on précisera.

Partie B : une construction géométrique

On se place de nouveau dans le plan euclidien orienté P. On a montré dans la partie précédente que, sous certaines conditions, la composée de deux rotations est une rotation.
On cherche ici à construire le centre de cette rotation.
Notations.
Soit D une droite de P. La symétrie orthogonale d'axe D est notée s_D.
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls de P, on note $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

VI. Soients D_1 et D_2 deux droites du plan, sécantes en un point Ω. On désigne par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs de D_1 et D_2 respectivement. On considère l'application $f = s_{D_2} \circ s_{D_1}$.

1. Montrer que Ω est un point fixe de f.
2. Soit M un point de P distinct de Ω. Soient $M' = s_{D_1}(M)$ et $M'' = s_{D_2}\left(M'\right)$.
   Montrer que les angles $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{u_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$ sont égaux.
   On montrerait de même que les angles $\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{u_2}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{\Omega M''}\right)$ sont égaux.
3. Montrer que $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)\ [2\pi]$.
4. Montrer que $\Omega M = \Omega M' = \Omega M''$.
5. Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

VII. Soient r_1 et r_2 deux rotations, de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et d'angles respectifs θ_1 et θ_2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

1. Déterminer deux droites D_1 et D_2 telles que $r_1 = D_1 \circ s_{(\Omega_1\Omega_2)}$ et $r_2 = s_{(\Omega_1\Omega_2)} \circ s_{D_2}$.
2. Montrer que $r_1 \circ r_2 = s_{D_1} \circ s_{D_2}$.
3. On suppose D_1 et $D2$ sécantes en un point Ω. Montrer qu'alors $r_1 \circ r_2$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
4. Donner une construction à la règle et au compas du centre de la rotation $r_1 \circ r_2$ lorsque r_1 est la rotation de centre d'affixe i et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_2 est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

5. Que se passe t-il si D_1 et $D2$ sont parallèles ?

Partie C : structure des quaternions

Soient a et b deux nombres complexes. On note $M(a,b)$ la matrice complexe suivante :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}.$$

Une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(a,b)$ est appelée un quaternion.
On considère en particulier les quaternions suivants :

$$E = M(1,0), I = M(\mathrm{i},0), J = M(0,1), K = M(0,\mathrm{i}).$$

On veillera à ne pas confondre la matrice $I = M(\mathrm{i},0)$ avec la matrice identité d'ordre 2, $I_2 = E$.
On note $\mathbb{H} = \{M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$.

VIII.

1. Donner sans justification une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ puis une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, dont une base est (E, I, J, K).
   En conséquence, tout quaternion q s'écrit de manière unique
   $q = xE + yI + zJ + tK$, avec x, y, z, $t \in \mathbb{R}$.
3. Pour a, b, a', b' des nombres complexes, calculer $M(a,b)M(a',b')$.
   En déduire que $\mathbb{H}$ est stable par la multiplication matricielle.

IX.

1. Calculer les produits deux à deux des matrices E, I, J et K. On présentera les résultats dans un tableau à double entrée.
2. La multiplication dans $\mathbb{H}$ est-elle commutative ?

X. Montrer que tout quaternion $q = M(a,b)$ avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, est un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dont l'inverse q^{-1} est un quaternion.

XI. Montrer que $\{q \in \mathbb{H} | \forall r \in \mathbb{H}, qr = rq\} = \{xE | x \in \mathbb{R}\}$.

Partie D : conjugué, parties réelle et imaginaire d'un quaternion

Soit $q = xE + yI + zJ + tK \in \mathbb{H}$, avec x, y, z, $t \in \mathbb{R}$. On définit le quaternion conjugué de q, noté $q*$, par :

$$q* = xE - yI - zJ - tK.$$

On définit la partie réelle de q, notée $\Re(q)$, par $\Re(q) = xE$.
On définit la partie imaginaire de q, notée $\Im(q)$, par $\Im(q) = yI + zJ + tK$.
On définit l'ensemble des quaternions purs, noté $\mathbb{H}_{pur}$, par $\mathbb{H}_{pur} = \{q \in \mathbb{H} | \Re(q) = 0\}$.

XII.

1. Soit q un quaternion. Montrer que $q*$ est la transposée de la matrice obtenue en conjugant tous les coefficients de q.
2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $(qr)* = r * q*$.

XIII. Pour tout quaternion q, on pose $N(q) = qq*$.

1. Montrer que, pour tout quaternion $q = xE + yI + zJ + tK$, avec $x,\ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}$, $N(q) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right)E$.
2. Montrer que, pour tous quaternions q, r, $N(qr) = N(q)N(r)$.

Partie E : norme sur $\mathbb{H}$

On admet qu'on définit une norme euclidienne sur $\mathbb{H}$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q = xE + yI + zJ + tK & \longmapsto & \left\|q\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2} \end{array}\right.$$

XIV. Quel est le produit scalaire associé à cette norme euclidienne ?

XV.

1. Montrer que, pour tout quaternion q, $N(q) = \|q\|^2 E$.
2. En déduire que, pour tous quaternions q, r, $\|q\| = \|q\| \times \|r\|$.
3. En déduire que pour tout quaternion non nul q, $|q^{-1}\| = \dfrac{1}{\|q\|}$.

XVI. On considère l'application suivante :

$$\Psi : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{H}_{pur} \\ \overrightarrow{q} = (y, z, t) & \longmapsto & q = yI + zJ + tK. \end{array}\right.$$

Le quaternion pur $\Psi(q)$ est appelé quaternion pur associé au vecteur $\overrightarrow{q}$. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et est supposé orienté. Son produit scalaire est noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$. De plus, $\mathbb{H}_{pur}$ est muni de la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{H}_{pur}$.

1. Montrer que Ψ est une isométrie, c'est-à-dire que pour tout $q \in \mathbb{R}^3$,
$$\Psi\left(\overrightarrow{q}\right)11 = \|\overrightarrow{q}\|.$$
2. Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{pur}$ respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $Re\left(q_1 q_2\right) = -\langle\overrightarrow{q_1}\,|\,\overrightarrow{q_2}\rangle E$ et que $Im\left(q_1 q_2\right) = \Psi\left(\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}\right)$, où $\overrightarrow{q_1} \wedge \overrightarrow{q_2}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$.
3. Soit $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $Re\left(q^2\right)$ et $Im\left(q^2\right)$. En déduire q^2.
4. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $q \in \mathbb{H}_{pur}$. Calculer $(aE + bq)(cE + dq)$.
5. Soient q_1 et q_2 deux quaternions purs, respectivement associés aux vecteurs $\overrightarrow{q_1}$ et $\overrightarrow{q_2}$. Montrer que $\langle\overrightarrow{q_1}\,|\,\overrightarrow{q_2}\rangle = 0$ si et seulement si $q_1 q_2 + q_2 q_1 = 0$.

Partie F : quaternions unitaires et rotations vectorielles

On note $U = \{q \in \mathbb{H} | N(q) = E\}$. Les éléments de U sont appelés quaternions unitaires.

XVII. Montrer que U est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

XVIII. Soit $p \in U$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel θ et un quaternion $u \in U \cap \mathbb{H}_{pur}$ tel que

$$p = \cos(\theta)E + \sin\theta)u.$$

2. Vérifier que $p^{-1} = p* = \cos(\theta)E - \sin(\theta)u$.

XIX. Soit $p \in U$. On définit l'application suivante :

$$r_p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \to & \mathbb{H} \\ q & \mapsto & pqp^{-1} \end{array} \right.$$

1. Montrer que r_p est une application linéaire.
2. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{H}$, $\|r_p(q)\| = \|q\|$.
3. Soient p_1 et p_2 deux éléments de U. Montrer que $r_{p_1} \circ r_{p_2} = r_{p_1 p_2}$. En déduire que pour tout $p \in U$, r_p est une bijection d'inverse $r_{p^{-1}}$.
4. Montrer que r_p est égale à l'identité de $\mathbb{H}$ si et seulement si $p = E$ ou $p = -E$.
5. Soient p_1 et p_2 deux quaternions unitaires. Déduire de la question précédente que $r_{p_1} = r_{p_2}$ si et seulement si $p_1 = p_2$ ou $p_1 = -p_2$.

XX. On suppose maintenant que p est un quaternion unitaire différent de E et de $-E$.
D'après la question **XVIII. 1.**, le quaternion p s'écrit sous la forme
$p = \cos(\theta)E + \sin(\theta)u$, où θ est un nombre réel et u est un quaternion pur unitaire.
On associe à u le vecteur $\overrightarrow{u}$ par l'application Ψ définie dans la question **XVI**.
Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$: On pose $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. On note v et w les quaternions purs associés aux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

1. Que peut-on dire de la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$?
2. Montrer que $uv = -vu = w,\ uw = -wu = -v,\ u^2 = -E$ et que $u^3 = -u$.
3. Calculer $r_p(u),\ r_p(v)$ et $r_p(w)$.
4. Montrer qu'il existe une rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ notée R, dont on précisera l'axe et l'angle, telle que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$ si $q = \Psi\left(\overrightarrow{q}\right)$, alors $r_p(q) = \Psi\left(R\left(\overrightarrow{q}\right)\right)$.

   XXI. Soit R une rotation vectorielle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, d'axe la droite D dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{d}$ et d'angle ϕ.
   Montrer qu'il existe $p \in U$ tel que pour tout $q \in \mathbb{H}_{pur}$ si $q = \Psi\left(\overrightarrow{q}\right)$, alors $r_p(q) = \Psi\left(R\left(\overrightarrow{q}\right)\right)$.

XXII. *Application.* Soient R_1 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et d'axe engendré par $(1,\ -1,\ -1)$ et R_2 la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle π et d'axe engendrée par $(0, 1, 0)$.
Montrer que $R_2 \circ R_1$ et $R_1 \circ R_2$ sont des rotations dont on précisera les axes et les angles

Problème nº 2

Notations
On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Soit $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B sont deux événements de Ω avec B de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé est notée $\mathbb{P}_B(A)$.
Soient k et n des entiers naturels, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial donnant le nombre de parties à k éléments est noté $\binom{n}{k}$.
On utilisera la convention $0^0 = 1$ dans tout le problème.

Partie A : quelques études de séries

I..

1. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x différent de 1, une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

3. Soit $x \in]-1\ ;\ 1[$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{b \geqslant 1} nx^{n-1}$ et donner la valeur de sa somme.

II. Soit k un entier naturel. On considère la série entière

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de $S_k(x)$.

2. Montrer que S_k est dérivable sur $]-1\ ;\ 1[$ et que, pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$S'_k(x) = (k+1)S_{k+1}(x).$$

3. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-1\ ;\ 1[$,

$$S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

4. Soit $x \in]-1\,;\,1[$. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} n^2 x^{n-1}$ et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

Indication : on pourra écrire n^2 en fonction de $\binom{n}{1}$ et de $\binom{n}{2}$.

III. Application : soit (D, A, P) un espace probabilisé. Soit P un réel de]0; 1 [. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire une variable aléatoire définie sur D, telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que X^2 admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Partie B : étude d'une séance de tir à l'arc

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible de manière indépendante.
L'archer A_1 (respectivement A_2) touche sa cible avec une probabilité p_1 (respectivement p_2) strictement comprise entre 0 et 1. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres. On appelle X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs nécessaires à l'archer A_1 (respectivement A_2) pour qu'il touche sa cible pour la première fois.
On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

IV. Déterminer les valeurs possibles prises par X_1.

V. On introduit, pour tout entier naturel non nul i, l'évènement E_i : « le joueur A_i touche la cible à son i-ème tir ».
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $(X_1 = k)$ à l'aide des évènements E_i, $i \in \mathbb{N}^*$.

VI. En déduire la loi de Xl.

VII.

1. Pour tout entier naturel non nul k, calculer $\mathbb{P}(X_1 > k)$.
2. Montrer que

$$\forall (m,\ n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{(X_1>k)}\left(X_1 > n+m\right) = \mathbb{P}\left(X_1 > n\right).$$

VIII. Calculer $\mathbb{P}\left(X_1 = X_2\right)$.

IX. Calculer $\mathbb{P}\left(X_1 > X_2\right)$.

X. Que vaut $\mathbb{P}\left(X_2 > X_1\right)$?

XI. On réalise à présent une deuxième expérience avec les deux archers A_1 et A_2 de la manière suivante : l'archer A_1 tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle X_1

la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur Al pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de sa cible dans les mêmes conditions que la première expérience.
On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On suppose dans cette partie que $p_1 = p_2$ et on note

$$p = p_1 = p_2, \qquad q = 1 - p = 1 - p_1 = 1 - p_2.$$

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_1=n)}(G = k)$. On distinguera les cas $k > n$ et $k \leqslant n$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(G\ k) = q^{k-1} p^{k+1} \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} q^{2n-2k}$.

3. En utilisant la partie A., montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(G = k) = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

4. Montrer que G admet une espérance et que celle-ci vaut 1. Interpréter ce résultat.

Partie C : étude d'une variable discrète sans mémoire

Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y \geqslant n) > 0$.
On suppose également que Y est sans mémoire c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (m,\ n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathbb{P}_{(Y \geqslant m)}(Y \geqslant n + m) = \mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

On pose $\mathbb{P}(Y = 0) = p$ et $q = 1 - p$.

XII. Montrer que $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = q$. En déduire que $0 < q\ 1$.

XIII. Montrer que pour tout couple $(m,\ n)$ d'entiers naturels,

$$\mathbb{P}(Y \geqslant n + m) = \mathbb{P}(Y \geqslant m)\mathbb{P}(Y \geqslant n).$$

XIV. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y \geqslant n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Y \geqslant n)$ en fonction de n et de q.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \geqslant n) - \mathbb{P}(Y \geqslant n + 1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = n) = q^n p$.

5. En déduire que q est différent de 1.

XV. Reconnaître la loi suivie par la variable aléatoire y + 1.

XVI. Conclure que Y est sans mémoire si et seulement si $Y + 1$ est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0\ ;\ 1[$.

Partie D : taux de panne d'une variable discrète

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n,

$$P(Z \geqslant n) > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle taux de panne de Z à l'instant n, le réel noté λ_n défini par

$$\lambda_n = \mathbb{P}_{(Z \geqslant n)}(Z = n).$$

XVII.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$1 - \lambda_n = \frac{\mathbb{P}(Z \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(Z \geqslant n)}$$

2. Vérifier alors que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant \lambda_n < 1$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$P(Z \geqslant n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda_k).$$

XVIII.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, n-l

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z = k) = 1 - \mathbb{P}(Z \geqslant n).$$

2. En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z \geqslant n)$ existe et vaut 0.

3. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \ln(1 - \lambda_n)$?

4. Que dire alors de la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \lambda_n$?

XIX. On suppose maintenant qu'il existe un nombre réel c tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = c$.
Ce réel est appelé taux de panne de Z.

1. Montrer que $0 \leqslant c < 1$.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer $\mathbb{P}(Z \geqslant n)$ en fonction de c et de n.

3. Montrer que c est non nul.

4. En déduire une caractérisation des variables aléatoires ayant un taux de panne constant.