CAPES INTERNE 2007
CORRIGE

Problème 1

Partie I

Majorations, minorations, encadrements

1. $c(0) = 0$, $s(0) = 0$.

$c(1) = \dfrac{1}{2}\left[e^1 + e^{-1}\right] = \dfrac{2.718 + 0367}{2} = 1,54$

$s(1) = \dfrac{1}{2}\left[e^1 + e^{-1}\right] = \dfrac{2,718 - 0,367}{2} = 1,17$ à 10^{-2} près.

2. $c(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = c(x)$

$s(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = s(x)$.

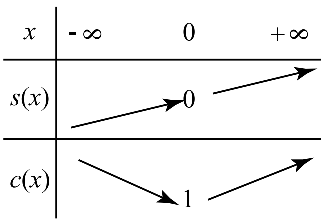
3.1. $[c(x)]^2 - [s(x)]^2 = [c(x) + s(x)]\,[c(x) - s(x)] = e^x \times e^{-x} = 1$
$0 \leqslant s^2(x) = [c(x)]^2 - 1 = [c(x) - 1] \times [c(x) + 1]$.
On sait que $c(x) + 1 > 0$, donc $c(x) \geqslant 1$.

3.2. Pour $x \geqslant 0$, on a $e^x \geqslant e^{-x}$, d'où $s(x) \geqslant 0$.
Donc $c(x) - s(x) = \dfrac{1}{c(x) + s(x)} > 0$.

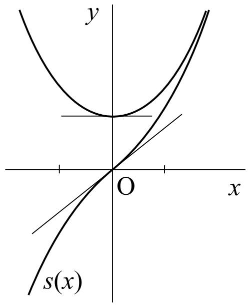
4.1. Ces fonctions sont des combinaisons linéaires de fonctions dérivables, donc elles sont dérivables.

$$c'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = s(x) \quad ; \quad s'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = c(x) > 0.$$

4.2.



4.3.



5.1. $(s(x) - x)' = c(x) - 1 \geqslant 0$
d'où, pour $x \geqslant 0$, $s(x) - x \geqslant s(0) - 0 = 0$.

5.2. $\left(c(x) - \dfrac{x^2}{2} - 1\right)' = s(x) - x \geqslant 0$, pour $x \geqslant 0$
donc, pour $x \geqslant 0$: $c(x) - \dfrac{x^2}{2} - 1 \geqslant c(0) - \dfrac{0}{2} - 1 = 0$,

$$\left(s(x) - \frac{x^3}{6} - x\right)' = c(x) - \frac{x^2}{2} - 1 \geqslant 0$$

donc, pour $x \geqslant 0$: $s(x) - \dfrac{x^3}{6} - x \geqslant s(0) - 0 = 0$.

6.1. $[2x - s(x)]' = 2 - c(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, 1]$,
d'où, pour $x \in [0, 1]$: $2x - s(x) \geqslant 0 - s(0) = 0$.
Toujours pour $x \in [0, 1]$: $\left[1 + x^2 - c(x)\right]' = 2x - s(x) \geqslant 0$.
Donc $1 + x^2 - c(x) \geqslant 1 + 0 - c(0) = 0$.

6.2. En appliquant l'inégalité précédente à la dérivée de la fonction $x + \dfrac{x^3}{3} - s(x)$,
on obtient $x + \dfrac{x^3}{3} \geqslant s(x)$,
d'où l'on déduit par la même méthode : $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} \geqslant c(x)$ $(x \in [0, 1])$.

6.3. D'après **5.2.**, on peut écrire $1 + \dfrac{x^2}{2} \leqslant c(x) \quad (x \geqslant 0)$.
D'après **6.2.**, on peut écrire $c(x) \leqslant 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} \quad (x \in [0, 1])$.
D'où les inégalités demandées :

$$1 + \frac{x^2}{2} \leqslant c(x) \leqslant 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \leqslant 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}$$

pour $x \in [0, 1]$.
De **6.1.** et **6.2.**, on déduit, comme dans les questions précédentes, pour

$x \in [0,1]$:

$$x+\frac{x^3}{6} \leqslant s(x) \leqslant x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{60} \leqslant x+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{60}.$$

Partie II

Vers une approximation de la fonction c par des fonctions polynômes

1. Posant $u(t)=x-t$ et $v(t)=s(t)$, on obtient

$$\int_0^x (x-t)c(t)dt = \Big[(x-t)s(t)\Big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (-1)\times s(t)dt = c(x)-c(0).$$

Prenant maintenant $u(t)=\dfrac{(x-t)^3}{6}$ et $v(t)=s(t)$, on obtient

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6}c(t)dt = -\int_0^x -\frac{(x-t)^2}{2}s(t)dt$$

et avec le choix $u(t)=\dfrac{(x-t)^2}{2}$, $v(t)=c(t)$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}s(t)dt = -\frac{x^2}{2}c(0) - \int_0^x -(x-t)c(t)dt = -\frac{x^2}{2}+c(x)-1.$$

2. La relation recherchée vient d'être obtenue pour $n=1$.
Soit maintenant n un entier pour lequel cette relation a lieu.
Posant $u(t)=\dfrac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}$, $v(t)=s(t)$, on a

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c(t)dt = -\int_0^x -\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)dt$$

et, posant $u(t)=\dfrac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}$, $v(t)=c(t)$, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)dt &= -\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}c(0) - \int_0^x -\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)dt \\ &= c(x)-1-\sum_1^{n+1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

La relation a donc encore lieu pour l'entier $n+1$. De proche en proche, la validité de la relation passe de 1 à tout entier $\geqslant 1$.

3. Sur l'intervalle $[0,a]$, la fonction $c(t)$ est croissante. D'où, sachant que $(a-t)^{2n+1} \geqslant 0$ sur cet intervalle, on a :

$$\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)dt \leqslant \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(a)dt = c(a) \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} dt$$
$$= c(a) \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

4.1. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{a^2}{(2n+1)(2n+2)} \leqslant \dfrac{1}{2}$, dès que $2n+1 \geqslant a\sqrt{2}$.
Si N est un entier $\geqslant \dfrac{a\sqrt{2}-1}{2}$ et si $n \geqslant N$, alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

4.2. $v_n \leqslant \dfrac{1}{2} v_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \leqslant \cdots \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} v_N$ car tous les entiers écrits en indice sont $\geqslant N$.

4.3. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$, d'où l'on déduit $\lim\limits_{n\to\infty} 2^N v_N \times \dfrac{1}{2^n} = 0$, et de $0 \leqslant v_n \leqslant 2^N v_N \times \dfrac{1}{2^n}$, il découle finalement $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

5. $0 \leqslant u_n - c(a) \leqslant c(a) \dfrac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} = c(a)v_{n+1}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c(a)$.

Partie III

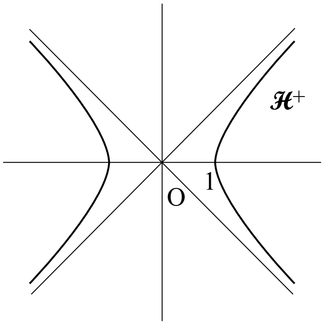
Les fonctions c et s et l'hyperbole

1. Soit $x \geqslant 0$. Les relations $x^2 - y^2 = 1$ et $y = \pm\sqrt{x^2-1}$ sont équivalentes. Si de surcroît $y \geqslant 0$, l'équivalence a bien lieu avec $y = \sqrt{x^2-1}$.

2. $x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 0$.

3. La partie de $\mathcal{H}$ formée par les points d'abscisse $>$0 est la réunion de $\mathcal{H}^+$ et de la symétrique de $\mathcal{H}^+$ par rapport à l'axe des abscisses.
On complète ensuite $\mathcal{H}$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Les symétrie permettent de tracer une autre asymptote d'équation $y = -x$.



5.1. $\mathcal{A}(x) = 2x\sqrt{x^2-1} - 4\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$

$$\mathcal{A}(x) = 4\left[\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - F(x)\right] = 4g(x).$$

5.2. On peut résoudre la question directement en montrant que le coefficient directeur de la droite (OM) est fonction croissante de x.
Mais il est plus simple de calculer

$$\mathcal{A}'(x) = 4g'(x) = 4\left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1}\right]$$
$$= 4\left[\frac{x^2-1+x^2-2(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}\right] = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} > 0.$$

Ainsi $\mathcal{A}(x)$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ donc aussi sur $[1,+\infty[$.

5.3. $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \geqslant \dfrac{1}{2x}$.

5.4. $g(x) = \displaystyle\int_0^x g'(t)dt \geqslant \int_0^x \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln x$. D'où $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$.

Lorsque x croît strictement de 1 à $+\infty$, $\mathcal{A}(x)$ croît strictement de 0 à $+\infty$, donc atteint une fois et une seule la valeur $2a \geqslant 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

6.1. $||\overrightarrow{I}||^2 = \dfrac{||\overrightarrow{i}||^2 + ||\overrightarrow{j}||^2 - 2\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j}}{2} = 1$, et de même $||\overrightarrow{J}||^2 = 1$

$\overrightarrow{I}.\overrightarrow{J} = \dfrac{(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}).(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}{2} = \dfrac{||\overrightarrow{1}||^2 - ||\overrightarrow{j}||^2}{2} = 0.$

6.2. $X\overrightarrow{I} + Y\overrightarrow{J} = X\dfrac{\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}}{\sqrt{2}} + Y\dfrac{\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}}{\sqrt{2}} = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

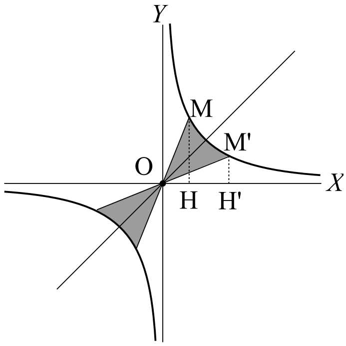
D'où $\quad x = \dfrac{Y+Y}{\sqrt{2}} \qquad y = \dfrac{-X+Y}{\sqrt{2}}$.

6.3. $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2}\left[(X+Y)^2 - (Y-X)^2\right] = 2XY$

$$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2X}.$$

7.1.
$$\left\{\begin{array}{rcl} X+Y & = & \sqrt{2} \\ -X+Y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow X = Y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

7.2.



7.3. Le point M ayant dans le repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ les coordonnées $c(a)$ et $\sqrt{c(a)^2 - 1} = s(a)$ a dans le repère $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ les coordonnées

$$X_a = \frac{c(a) - s(a)}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad Y_a = \frac{c(a) + s(a)}{\sqrt{2}}.$$

De même, M' de coordonnées $c(a)$ et $-s(a)$ dans le repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ a les coordonnées Y_a et X_a dans le repère $(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$.

On a alors $\mathcal{A}(c(a)) = 2\left[\int_0^{X_a} \frac{Y_a}{X_a} \mathrm{d}X + \int_{X_a}^{Y_a} \frac{\mathrm{d}X}{2X} - \int_0^{Y_a} \frac{X_a}{Y_a} \mathrm{d}X\right]$.
Les deux intégrales écrites aux extrémités dans le crochet sont égales à l'aire des triangles isométriques OHM et $M'H'O$.
Donc $\mathcal{A}(c(a)) = \ln \frac{Y_a}{X_a} = \ln \frac{e^a}{e^{-a}} = 2a$.

7.4. Le point de coordonnées $c(a)$, $s(a)$ sans le repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ donne la réponse cherchée.

Problème 2

Partie I

Caractérisation de l'intérieur d'un triangle

1. $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{HB} + X\overrightarrow{BC} + Y\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HB} + X\overrightarrow{BC} + Y\overrightarrow{BH} + Y\overrightarrow{HA}$
$\overrightarrow{HM} = (Y-1)\overrightarrow{BH} + X\overrightarrow{BC} + Y\overrightarrow{HA} = Z\overrightarrow{u} + Y.HA\overrightarrow{v}$, pour un $Z \in \mathbf{R}$, mais $\overrightarrow{HM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, d'où $y = Y.HA$, y et Y sont strictement de même signe.

2. Soit M barycentre du système pondéré (A,α) ; (B,β) ; (C,γ),

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}}{\alpha+\beta+\gamma}$$

. $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$ est l'ordonnée de M dans le repère $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$. On a vu que cette ordonnée est strictement positive si et seulement si M appartient au demi-plan ouvert limité par (BC) et contenant A.
On raisonne de même avec $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$ et l'on obtient que M est intérieur à ABC si et seulement si les trois coefficients α, β, γ sont strictement de même signe que $\alpha+\beta+\gamma$.

Partie II

Position du centre du cercle inscrit d'un triangle ABC non aplati

1.1. On pose $\overrightarrow{w} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{AC}$ et on définit $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\beta} + \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\gamma}$.
$\overrightarrow{U}$ est un vecteur directeur de la droite Δ_A et a pour coordonnées $\dfrac{1}{\gamma}$ et $\dfrac{1}{\beta}$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Le point M, de coordonnées x et y dans ce repère, appartient à Δ_A si et seulement si $\dfrac{x}{\frac{1}{\gamma}} = \dfrac{y}{\frac{1}{\beta}}$, c'est-à-dire $y = \gamma\dfrac{x}{\beta}$.

1.2. La droite d'équation $x+y=1$ contient B et C.

1.3. D'où, pour le point A' : $y = 1 - x = \dfrac{\gamma x}{\beta}$, $\beta = x(\beta+\gamma)$ et finalement $x_{A'} = \dfrac{\beta}{\beta+\gamma}$, $y_{A'} = \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}$.

2.1. On vient de trouver $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{\beta}{\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$, on peut donc poser $\lambda = \beta$ et $\mu = \gamma$.

2.2. Le barycentre du système pondéré (A,α) (B,β) (C,γ) est aussi le barycentre du système (A,α) $(A',\beta+\gamma)$.
Ce point appartient donc à Δ_A et l'on démontrerait de même qu'il appartient à Δ_B et Δ_C. Il s'agit donc de ω.

2.3. Les coefficients α, β, γ étant >0, ω est intérieur au triangle.

Partie III

Position du centre du cercle circonscrit d'un triangle ABC non aplati

1. Le point O est caractérisé par la relation $OA^2 = OB^2$, c'est-à-dire $x_A^2 + (y_A - y_o^2) = y_o^2 + \frac{\alpha^2}{4}$, d'où

$$-2y_o y_A = \frac{\alpha^2}{4} - x_A^2 - y_A^2, \qquad y_o = \frac{y_A}{2} + \frac{(x_A - \frac{\alpha}{2})(x_A + \frac{\alpha}{2})}{2y_A}.$$

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{\alpha}{2} - x_A\right)\left(\frac{\alpha}{2} - x_A\right) - y_A^2 = 2y_o y_A$ (vu plus haut)

3. $\widehat{BAC}$ est aigu $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est >0 $\Leftrightarrow$ $y_O > 0$ $\Leftrightarrow$ O et A sont dans le même demi-plan limité par (BC).

4. Pour que O soit dans l'intersection des trois demi-plans qui définit l'intérieur du triangle, il faut et il suffit que les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$ et $\widehat{ACB}$ soient aigus.

Partie IV

Cas particulier d'un résultat établi par Lazare Carnot

1. Les aires des triangles $B\omega C$, $C\omega A$, $A\omega B$ sont respectivement égales à $\frac{rBC}{2}$, $\frac{rCA}{2}$, $\frac{rAB}{2}$.

2.1. Les aires des triangles BOC, COA, AOB sont respectivement égales à $\frac{\alpha OM_A}{2}$, $\frac{\beta OM_B}{2}$, $\frac{\gamma OM_C}{2}$. Sachant que O est intérieur à ABC, la somme de ces aires vaut celle de ABC.

2.2. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABH_A}$ sont égaux ou supplémentaires, mais $\widehat{ABC}$ est aigu (partie III) et $\widehat{ABH_A} = 90^o - \widehat{BAH_A}$ l'est aussi. $\widehat{ABC} = \widehat{ABH_A}$ donc H_A appartient à la demi-droite $[BC)$ et de même la demi-droite $[CB)$ donc au segment $[BC]$.
On raisonne de manière analogue pour avoir : $H_B \in [AC]$, $H_C \in [AB]$.

2.3. Les deux premiers triangles sont rectangles et ont le même angle en A. Le troisième est aussi rectangle (en M_A) et l'on a :

$$\tan \widehat{BOM_A} = \frac{\alpha}{2y_O} = \frac{\alpha y_A}{2y_O h_A} = \frac{2\mathcal{A}(ABC)}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \frac{AB.AC.\sin\widehat{A}}{AB.AC.\cos\widehat{A}} = \tan\widehat{BAC}.$$

Les triangles BAH_B, CAH_C et BOM_A sont donc semblables (l'ordre des sommets respecte maintenant leur correspondance).

2.4. $\dfrac{OM_A}{AH_C} = \dfrac{BO}{CA}$, d'où $\beta OM_A = RAH_C$; et de même $\gamma OM_A = RAH_B$.

2.4'. Par permutation circulaire :

$$(\gamma+\alpha)OM_B = R(BH_C + BH_A) \quad ; \quad (\alpha+\beta)OM_C = R(CH_A + CH_B).$$

2.5. En ajoutant tout :

$$(\alpha+\beta+\gamma)(OM_A+OM_B+OM_C) = 2\mathcal{A}(ABC)+R(AH_C+BH_C+BH_A+CH_A+CH_B+AH_B)$$

ou encore $OM_A + OM_B + OM_C = r + R$.

3.1. Si O est le milieu de $[BC]$,
$\widehat{OAB} + \widehat{OAC} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{CBA} + \widehat{BCA} + \widehat{BAC}\right) = 90^{\text{o}}$.
Le triangle BAC est rectangle en A.

3.2. $R = \dfrac{\alpha}{2} \quad r = \dfrac{2\mathcal{A}(ABC)}{\alpha+\beta+\gamma}$, d'où $R + r = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$

$$\begin{aligned} OM_A + OM_B + OM_C = OM_B + OM_C &= \frac{\beta+\gamma}{2} \\ &= \frac{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma)}{2(\alpha+\beta+\gamma)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)+2\beta\gamma}{2(\alpha+\beta+\gamma)}. \end{aligned}$$

Remarques
1) Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus, on obtient $OM_B + OM_C - OM_A = R + r$.
2) Lazare Carnot a été aussi un homme politique très important.
(surnommé l'organisateur de la victoire).