CAPES interne 2 février 2010

Problème 1

Ce problème a pour objet l'étude d'une courbe de Gauss et l'approximation d'une intégrale

Partie I – Inégalités des accroissements finis

Soit m et M deux nombres réels tels que : $m \leqslant M$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point) et g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle I telle que, pour tout nombre réel x de l'intervalle I, on a :

$$m \leqslant g'(x) \leqslant M.$$

On fixe un nombre réel a dans l'intervalle I et on introduit les fonctions φ et ψ définies par :

$$\varphi(x) = g(x) - g(a) - m(x-a),$$
$$\psi(x) = g(x) - g(a) - M(x-a).$$

1. Étudier le sens de variation des fonctions φ et ψ sur l'intervalle I.
2. En déduire que, pour tous nombres réels a et b appartenant à l'intervalle I et tels que $a \leqslant b$, on a la double inégalité suivante :

$$m(b-a) \leqslant g(b) - g(a) \leqslant M(b-a).$$

Partie II – Étude d'une fonction gaussienne et de sa courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Étudier la parité de la fonction f et son sens de variations sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en indiquant les limites de f en $+\infty$.
3. **Étude de la fonction** f'
   a. Montrer que f est solution de l'équation différentielle linéaire $y' + xy = 0$.
   b. En déduire que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre réel x, sa dérivée f'' vérifie la relation suivante :

   $$f''(x) = \left(x^2 - 1\right) f(x).$$

   c. En déduire le sens de variation de la fonction f' sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
4. Montrer que, pour tout nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a : $-1 \leqslant f''(x) \leqslant 0$.
5. Montrer que pour tous nombres réels a et b tels que $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, on a :

   $$f'(b)(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant f'(a)(b-a)$$

   et que pour tous nombres réels a et b tels que $1 \leqslant a \leqslant b$, on a :

   $$f'(a)(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant f'(b)(b-a)$$

   Dans toute la suite du problème, on munit le plan euclidien d'un repère orthonormal $\left(O,~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, et on note Γ la courbe représentative de la fonction f dans ce repère.

6. Étude des tangentes à la courbe Γ

Soit a un nombre réel. On note T_a la tangente à la courbe Γ au point de coordonnées $(a\,;\,f(a))$.

Pour tout nombre réel x on note désormais $u(x)$ l'ordonnée du point de T_a d'abscisse x.

a. Expliciter une expression de $u(x)$.

b. On suppose ici que le nombre réel a appartient à l'intervalle $]0~;~1[$.
Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0~;~1]$, on a :

$$f(x) \leqslant u(x).$$

Interpréter graphiquement le résultat.

c. On suppose ici que le nombre réel a appartient à l'intervalle $]1~;~+\infty[$.
Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1~;~+\infty[$, on a :

$$f(x) \geqslant u(x).$$

Interpréter graphiquement le résultat.

d. Déterminer le signe de $f(x) - u(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x dans le cas où $a = 1$.
Interpréter graphiquement le résultat.

7. Étude des cordes de la courbe Γ

Soient a et b deux

a. Expliciter une expression de $v(x)$.

b. On suppose que les réels a et b vérifient $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

i. Montrer qu'il existe un réel c appartenant à [a ; b] tel que j'Cc) - v'(c) = O.

ii. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [a ; b], on a : f(x) v(x).

iii. Interpréter graphiquement ce résultat. Démontrer de façon analogue que, si les nombres réels a et b appartiennent à l'intervalle [1 ; +00[, on a pour tout nombre réel x de l'intervalle [a ;b] : f(x) v(x). Interpréter graphiquement ce résultat.

8. Tracer, dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm, la courbe Γ ainsi que les tangentes T_0, $T_{\frac{1}{2}}$, T_1, T_2 et les droites $D_{0,\,1}$ et $D_{1,\,2}$.

Dans toute la suite du problème, f désigne encore la fonction définie dans la partie II.

Le fait que f soit continue sur $\mathbb{R}$ justifie l'existence, pour tous nombres réels a et b, de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose : $A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire : $A = \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$. Les trois parties III, IV et V suivantes proposent de déterminer des valeurs approchées de A.

Partie III - Table de la loi normale centrée réduite

On admettra que l'on définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ en posant, pour tout nombre réel x :

$$\mathbb{P}(]-\infty\,;\,x]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to-\infty}\int_a x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On pourra écrire en particulier :

$$\mathbb{P}(]-\infty\,;\,+\infty[) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Cette probabilité $\mathbb{P}$ est celle de la loi normale centrée réduite.

1. Préciser la valeur de $\mathbb{P}(]-\infty\,;\,0])$.

2. Exprimer A en fonction de $\mathbb{P}(]-\infty\,;\,1])$.

3. Dans une table de la loi normale centrée réduite, on lit :

$$\mathbb{P}(]-\infty\,;\,1]) \approx 0{,}8413 \text{ (arrondi au dix -millième)}.$$

En déduire une approximation de A à 10^{-3} près.

Partie IV - Approximation par une somme d'aires de rectangles

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de A qui permette d'en fournir une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie de la façon suivante :

pour tout entier naturel n strictement positif, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, et pour tout nombre réel t de l'intervalle $\left[\dfrac{k-1}{n}\,;\,\dfrac{k}{n}\right]$ on a :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f(t) \leqslant f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

b. En déduire que pour tout entier naturel ‘k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

2. Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel n non nul, on a les inégalités :

$$u_n \leqslant A \leqslant \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{n\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

3. **a.** Déduire de la question précédente un encadrement de u_n valable pour tout entier naturel n non nul.

b. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

4. En utilisant les inégalités établies à la question IV. 2., déterminer une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée par défaut de A à 10^{-2} près. (On ne demande pas de calculer ici cette valeur approchée.)

Partie V - Approximation par une somme d'aires de trapèzes

On se propose dans cette partie d'obtenir une autre valeur approchée de A, en utilisant des résultats établis dans la partie II.
Pour cela, on considèrera les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{2n}f(0) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}f(1) \text{ et } w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right).$$

Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tels que $a < b$.

1. Justifier que la partie de la courbe Γ située entre les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ est située en dessous de $T_{\frac{a+b}{2}}$ et au dessus de $D_{a,\ b}$.
2. Démontrer la double inégalité suivante :

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_n \leqslant A \leqslant w_n.$$

4. Expliciter v_3 et w_3, puis donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par défaut de v_3 et une valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès de w_3.
   En déduire une valeur décimale approchée de A à 10^{-2} près.
5. **Convergence des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$**

   a. En intégrant par parties $\displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

   b. Montrer de même que :

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{(b-a)}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{b\frac{a+b}{2}} (a-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

   c. En utilisant II.4, justifier que l'on a :
   - pour tout réel t de $\left[\dfrac{a+b}{2}\ ;\ b\right]$, $0 \leqslant (t-b)f''(t) \leqslant (b-t)$;
   - pour tout réel t de $\left[a\ ;\ \dfrac{a+b}{2}\right]$, $0 \leqslant (a-t)f''(t) \leqslant (t-a)$.

   d. Déduire de V. 5. a., V. 5.b. et de V. 5. c. que :

$$0 \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \frac{1}{8}(b-a)^2.$$

   e. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $0 \leqslant w_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{8n^2}$.

   f. En utilisant V. 3 et V. 5. 5, justifier que l'on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leqslant A - v_n \leqslant \frac{1}{8n^2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant w_n - A \leqslant \frac{1}{8n^2}.$$

   En déduire que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers A.

6. **Estimation plus fine de l'erreur commise par défaut**

a. En intégrant par parties $\displaystyle\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. En utilisant II. 4. justifier que pour tout réel t de $[a\ ;\ b]$:

$$0 \leqslant (t-a)(t-b)f''(t) \leqslant (t-a)(b-t).$$

c. En utilisant V. 6. a., déduire que :
$O \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \leqslant \frac{1}{12}(b-a)^3.$

d. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif : $0 \leqslant A - v_n \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

e. À partir de quelle valeur de n est-on sûr que v_n soit une valeur approchée de A à 10^{-3} près ?

f. En notant p la valeur de n trouvée à la question précédente, déterminer une valeur approchée de v_p à la précision de la calculatrice. Ce résultat est-il en accord avec l'approximation à 10^{-3} près de A obtenue à la partie III par lecture de la table de la loi normale centrée réduite ?

Géométrie

Ce problème a pour but d'établir l'inégalité isopérimétrique dans le cas des polygones convexes et d'établir le résultat suivant :

parmi tous les polygones convexes ayant n côtés et un périmètre fixé p, le polygone régulier est de plus grande aire.

Dans tout le problème, on **admettra l'existence d'un polygone convexe d'aire maximale parmi tous les polygones convexes ayant le même nombre de côtés**, la démonstration de cette existence dépassant les limites du programme du concours.

Rappels et notations

On travaille dans le plan affme euclidien.

- Si A, B et C sont trois points du plan (avec A $\neq$ B et A $\neq$ C), on note $\widehat{\text{ABC}}$ l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0,\ \pi]$) délimité par les demi-droites [BA) et [BC).
- La distance entre deux points A et B ainsi que la longueur du segment [AB] est notée AB.
- Par abus de notation, si (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A, on appellera également hauteur la longueur AH du segment [AH], lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- Par commodité d'écriture, on pourra noter $\mathscr{P}(P)$ le périmètre d'un polygone P et $\mathscr{A}(P)$ son aire.
- On dira que des triangles ABC et A′B′C′ sont super-semblables s'il existe une similitude qui transforme respectivement A en A′, B en B′ et C en C′.
- On rappelle qu'un quadrilatère est croisé s'il possède au moins deux côtés non consécutifs qui ont un point commun.
- On dira qu'un polygone est convexe si ses sommets sont dans un même demi-plan par rapport à n'importe quel côté du polygone.

Dans tout le problème, il sera possible d'affirmer sans démonstration rigoureuse qu'un polygone est convexe ou non, en se fiant à la configuration géométrique étudiée.

Partie A - Résultat préliminaire

Dans cette partie, nous établissons le résultat suivant : « parmi tous les triangles dont on fixe le périmètre et un côté, celui qui a la plus grande aire est le triangle isocèle ».
On considère trois points A, B et C non alignés du plan affme euclidien.
On note α, β, γ les mesures respectives des angles géométriques $\widehat{\text{BAC}}$, $\widehat{\text{CBA}}$, $\widehat{\text{ACB}}$,et on pose : $x=$BC, $y=$AC, $c=$AB.
On note S l'aire du triangle ABC et p son périmètre. On fixe dans cette partie la base AB et le périmètre p.

1. Montrer que l'on a :
$$y^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos\beta.$$
Cette relation est connue sous le nom de théorème d'Al-Kashi.

2. En déduire que : $\sin\beta = \dfrac{1}{2cx}\sqrt{\left((c+x)^2-y^2\right)\left(y^2-(c-x)^2\right)}$.

3. Montrer que : $S = \dfrac{cx\sin\beta}{2}$.

4. En déduire la formule de Héron :
$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)}.$$

5. Montrer que S^2 s'exprime sous la forme : $S^2 = k(m-x)(c+x-m)$, où k et m sont des constantes que l'on déterminera en fonction de c et p. Prouver que la constante k est strictement positive.

6. Montrer que S^2 atteint un maximum pour une valeur de x que l'on déterminera en fonction de c et p.

7. En déduire que le triangle d'aire maximale est le triangle isocèle.

Partie B - Cas de polygones particuliers

I. Les triangles

1. Calculer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de son périmètre p.
On considère un triangle ABC de périmètre donné p et qui serait d'aire maximale parmi tous les triangles de même périmètre p.

2. **a.** On suppose dans cette question que BC $\neq$ AC.
Montrer que l'on peut construire un triangle ABC$'$ de périmètre p et d'aire plus grande que celle de ABC.

b. En déduire que ABC est un triangle équilatéral.

3. Montrer que tous les triangles ayant un périmètre p et une aire S vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :
$$S \leqslant \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$
Conclure.

II. Les quadrilatères

On considère un quadrilatère non croisé ABCD de périmètre fixé p et qui serait d'aire maximale parmi tous les quadrilatères non croisés de même périmètre p.

1. Montrer par l'absurde que ABCD est un quadrilatère convexe (quitte à effectuer une permutation circulaire des points A, B, C et D on pourra supposer que le point A est à l'intérieur du triangle BCD et on pourra construire à partir de ABCD un quadrilatère non croisé de même périmètre et d'aire plus grande).

2. On suppose dans cette question que $AB \neq BC$.

   Prouver que l'on peut construire un quadrilatère non croisé de même périmètre que ABCD et d'aire plus grande.
3. En déduire que ABCD est un losange.
4. On note $\alpha = \widehat{BAD}$. Calculer l'aire du losange ABCD en fonction de p et de α.
5. Pour quelle valeur de α cette aire est-elle maximale ?
6. En déduire que ABCD est un carré.
7. Montrer que tous les quadrilatères non croisés ayant un périmètre p et une aire S vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$S \leqslant \frac{p^2}{16}.$$

   Conclure.

Partie C - Polygones ayant plus de quatre côtés

I. Résultat auxiliaire

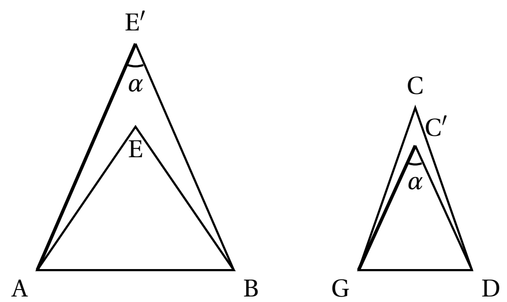
On suppose que le triangle ABC est rectangle en A et que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont super-semblables.
Montrer que l'on a : $BC \times B'C' = AB \times A'B' + AC \times A'C'$.

II. Cas des polygones à n côtés

Dans cette partie, n est un entier fixé strictement plus grand que 4, et on considère des polygones convexes ayant n côtés. On suppose que trois sommets consécutifs ne sont pas alignés.
On appelle angle interne d'un polygone convexe tout angle géométrique saillant formé par un sommet du polygone et délimité par les deux côtés du polygone issus de ce sommet.
On considère un polygone P convexe ayant n côtés de périmètre fixé p et qui serait d'aire maximale parmi tous les polygones convexes ayant n côtés de même périmètre p.
On note dans la suite A_1 A_2, ... , A_n les n sommets consécutifs du polygone P.

1. Supposons que $A_1A_2 \neq A_2A_3$. Prouver que l'on peut construire un polygone P' convexe ayant n côtés de périmètre p et d'aire supérieure à celle de P.
2. En déduire que tous les côtés de P sont de même longueur.

   On admet dans cette partie le résultat suivant, dû à Zénodore (mathématicien grec du II^e siècle avant J.-C.).



À partir de deux triangles isocèles AEB et GCD tels que : $AE = EB = GC = CD$, on peut construire deux autres triangles $AE'B$ et $GC'D$ qui vérifient les conditions suivantes :

- $AE'B$ et $GC'D$ sont isocèles et semblables,

- $\mathscr{P}(\text{AEB}) + \mathscr{P}(\text{GCD}) = \mathscr{P}(\text{AE}'\text{B}) + \mathscr{P}(\text{GC}'\text{D})$,
- $\mathscr{A}(\text{AEB}) + \mathscr{A}(\text{GCD}) < \mathscr{A}(\text{AE}'\text{B}) + \mathscr{A}(\text{GC}'\text{D})$.

Ce résultat sera démontré dans la partie III qui suit.

3. Supposons qu'il existe deux angles internes de P non consécutifs qui soient de mesure différente. En utilisant le résultat de Zénodore admis précédemment, montrer que l'on peut construire un polygone P' de même périmètre que celui de P et d'aire plus grande.

4. Montrer que P est un polygone régulier (on distinguera les cas où n est impair ou pair).

5. Montrer que tous les polygones convexes ayant un périmètre p et une aire S vérifient l'inégalité isopérimétrique suivante : $S \leqslant \dfrac{p^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}$. Conclure.

III. Démonstration du résultat de Zénodore

On considère deux triangles isocèles non plats AEB et GCD tels que :

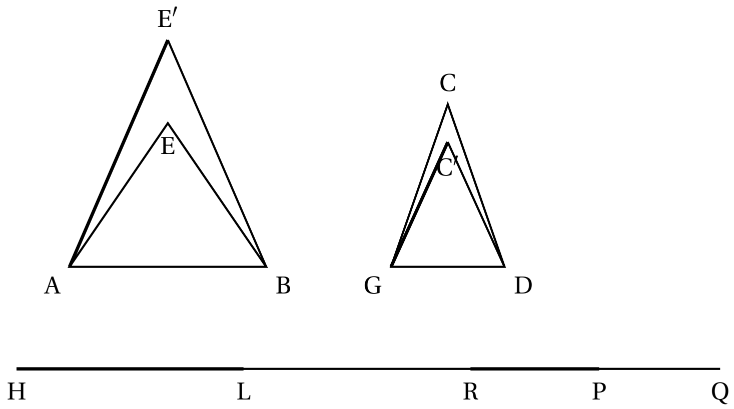
$$\text{AE} = \text{EB} = \text{GC} = \text{CD},$$

et on introduit deux points H et Q du plan tels que :

$$\text{HQ} = \text{AE} + \text{EB} + \text{GC} + \text{CD} = 4\text{AE}.$$

Soit R le point de [HQ] défini par $\dfrac{\text{HR}}{\text{RQ}} = \dfrac{\text{AB}}{\text{GD}}$.
Soit L le milieu de [HR] et P celui de [RQ].

On suppose, sans restreindre la généralité que AB > GD.



1. Montrer que HR + RQ > AB + GD.

2. En multipliant chaque membre de l'inégalité précédente par GD, montrer que RQ > GD.

En déduire que HR > AB.

On construit deux triangles AE′B et GC′D tels que :

AE′ = E′B = HL = LR et GC′ = C′D = RP = PQ (voir figure ci-dessus).

3. Montrer que : AE′ +E′B > HQ et GC′ +C′D < HQ.

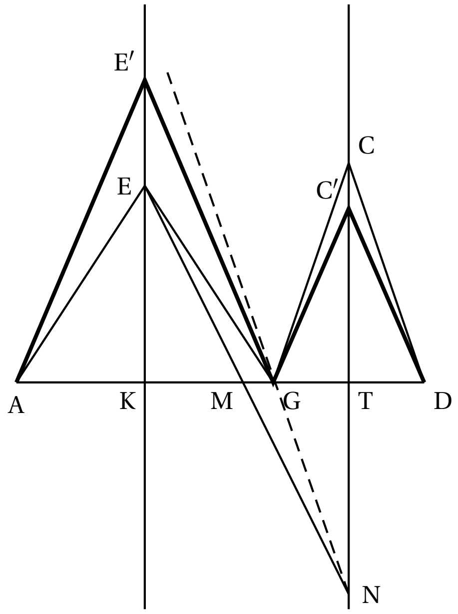
4. Montrer que les triangles AE′B et GC′D sont super-semblables.

5. Montrer que la somme des périmètres de AEB et GCD est égale à la somme des périmètres de AE′B et GC′D.

6. **a.** Montrer que $\text{HR} > \dfrac{\text{HQ}}{2}$.

b. En déduire que $AE' > AE$. On admet que, par une démarche analogue, on peut montrer que $GC' < GC$.

7. Quitte à déplacer sans déformer le triangle GCD, on peut supposer sans restreindre la généralité que l'on se trouve dans la situation de la figure suivante.



On note dans la suite K le milieu de [AG], T celui de [GD] et N le symétrique de C par rapport à T.

a. Montrer que (EE') est la médiatrice de [AG] et que (CC') est la médiatrice de [GD].

b. Montrer que $E'K > EK$ et que $C'T < CT$.

c. Comparer les angles $\widehat{CGD}$ et $\widehat{EGA}$ et montrer que $\widehat{NGT} > \widehat{EGA}$.

On admet qu'alors la droite (NE) *coupe* [GK] *en un point distinct de* G *que l'on notera* M.

d. Montrer que les triangles rectangles $E'GK$ et $C'GT$ sont super-semblables. En déduire que : $E'G \cdot GC' - E'K \cdot C'T - KG \cdot GT = 0$.

e. En utilisant la question C. III. 5., montrer que $E'G + GC' > EN$.

f. i. Montrer que : $\left(E'G + GC\right)^2 = E'K^2 + KG^2 + GT^2 + CT^2 + 2E'G \cdot GC$.

ii. En utilisant la question 7.d., montrer que :
$\left(E'G + GC'\right)^2 = \left(CT + E'K\right)^2 + TK^2$.
Nous admettrons le résultat suivant :

$$EN^2 = (EK + TN)^2 + TK^2$$

(*qui pourrait être démontré par une démarche analogue en introduisant le point* M).

g. i. Montrer que l'on a : $C'T + E'K > EK + TN$

ii. En déduire : $EE' > C'C$.

h. Montrer que l'aire du quadrilatère $AE'GE$ est strictement plus grande que celle du quadrilatère $DCGC'$.

i. Enfin, montrer que l'on a :

$$\mathscr{A}(AEG) + \mathscr{A}(GCD) < \mathscr{A}(AE'G) + \mathscr{A}(GC'D).$$

FIN